В.В. Додонов, О.В. Манько

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПАРАКСИАЛЬНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

Известно, что в случае гармонических волновых полей, распространяющихся в слабонеоднородных средах, уравнение Гельмгольца для компонент поля в параксиальном приближении Леонтовича-Фока [1] сводится к параболическому уравнению типа нестационарного уравнения Шредингера [2]. Если ось z прямоугольной системы координат $\{x_1, x_2, z\}$ выбрать вдоль направления распространения волны, то исходное уравнение параболического приближения записывается в виде:

$$i\lambda\!\!\!^{-} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\lambda\!\!\!^{-2}}{2n_0}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}\right] + \frac{n_0^2 - n^2}{2n_0}\psi = -\frac{\lambda\!\!\!^{-2}}{2n_0}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}\right] + V\psi, \tag{1}$$

$E = 2n_o^{-\frac{1}{2}} \psi \exp(\frac{i}{\lambda\!\!\!^{-}} \int\limits_0^z n_0(z)dz)$ - одна из компонент поля, $n_0 = n(0, 0, z)$ - показатель преломления среды на оси z, $k = 2\pi/\lambda = \lambda\!\!\!^{-}{}^{-1}$ - волновое число в пустоте, ψ - медленно изменяющаяся на длине волны амплитуда.

С точностью до замены $k^{-1} \to \hbar$ и $z \to t$ уравнение (1) есть квантово-механическое уравнение Шредингера для частицы единичной массы, движущейся в потенциальном поле $V = (n_o^2 - n^2)/2n_o$.

Операторы канонически сопряженных переменных $\hat{x}_i \to x_i$ и $\hat{p}_i \to -i\lambda\!\!\!^{-}\frac{\partial}{\partial x_i}$ удовлетворяют обычным соотношениям коммутации:

$$\left[\hat{x}_i, \hat{p}_j\right] = i\lambda\!\!\!^{-}\delta_{ij}, \ (i, j = 1,2).$$

Указанная формальная аналогия [2] параболического уравнения с уравнением Шредингера позволяет использовать методы, разработанные в квантовой механике, при решении задач распространения волн в неоднородных средах.

В работе [3] показано, что для некоторых классов гамильтонианов, в частности, для любых неоднородных многомерных квадратичных форм от операторов, коммутаторы между которыми являются с-числами, существуют сохраняющиеся во времени (вдоль оси пучка в данном случае) величины, зависящие от начального состояния системы и вида коммутационных соотношений, но совершенно не зависящие от коэффициентов соответствующих квадратичных или линейных форм. Такие величины были названы универсальными инвариантами, по аналогии с универсальными инвариантами Пуанкаре-Картана в классической механике. Чтобы получить аналогичные инварианты в задаче распространения параксиального пучка в световоде, рассмотрим систему четырех операторов:

$$\hat{Q}_1 = \hat{x}, \ \hat{Q}_2 = \hat{y}, \ \hat{Q}_3 = (-i\lambda\!\!\!^{-} \frac{\partial}{\partial x}), \ \hat{Q}_4 = (-i\lambda\!\!\!^{-} \frac{\partial}{\partial y}).$$

В этом состоит специфика задачи, рассматриваемой в данной работе, и отличие ее от работы [3]: вместо рассмотрения систем с любым числом степеней свободы мы ограничиваемся всего двумя измерениями, но зато получаем явный вид инвариантов.

Если диэлектрическая проницаемость среды n^2 квадратично или линейно зависит от поперечных координат x, y (и произвольно от координаты вдоль оси пучка z), то в представлении Гейзенберга операторы $\hat{Q}_\alpha(z)$ линейно выражаются через $\hat{Q}_\alpha(0)$:

$$\hat{Q}_\alpha(z) = \Lambda_{\alpha\beta}(z)\hat{Q}_\beta(0) + \hat{\delta}_\alpha(z). \tag{2}$$

Введем центрированный момент второго порядка

$$Q_{\alpha\beta} = \overline{Q_\alpha Q_\beta} = \left\langle \frac{1}{2}(\hat{Q}_\alpha\hat{Q}_\beta + \hat{Q}_\beta\hat{Q}_\alpha)\right\rangle - \langle\hat{Q}_\alpha\rangle\langle\hat{Q}_\beta\rangle, \tag{3}$$

где символ <...> означает усреднение, то есть переход от операторов к числам.

Вторые моменты подчиняются соотношениям, вытекающим из (2):

$$Q_{\alpha\beta}(z) = \Lambda_{\alpha\mu}(z)Q_{\mu\nu}(0)\Lambda_{\beta\nu}(z). \tag{4}$$

Поскольку преобразование [2] сохраняет коммутационные соотношения, то имеет место тождество

$$\Lambda(z)\Sigma\widetilde{\Lambda}(z) = \Sigma, \qquad \Sigma = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| \tag{5}$$

$$\Lambda = \left\|\Lambda_{\alpha\beta}\right\|$$

Отсюда следует, что $\det\Lambda(z) = 1$.

Переписав (4) в матричном виде

$$Q(z) = \left\|Q_{\alpha\beta}(z)\right\| = \Lambda(z)Q(0)\widetilde{\Lambda}(z) \tag{6}$$

и сравнив это равенство с (5), получаем, что для любого параметра μ справедливо тождество (предполагаем, что матрица Σ не вырождена):

$$D(\mu) = \det\left[\Sigma Q(z) - \mu E\right] = \sum_{m=0}^{N} D_{2m}^{(N)}\,\mu^{2m}. \tag{7}$$

Величины $D_{2m}^{(N)}$ являются универсальными инвариантами, так как сохраняются по мере распространения пучка вдоль оси z и не зависят от конкретного вида коэффициентов в квадратичной зависимости диэлектрической проницаемости от координат x и y. В разложении (7) присутствуют только четные степени параметра μ, поскольку матрица Q симметрична, а Σ антисимметрична. N – число поперечных координат, от которых зависит амплитуда (оно может быть равно 1 или 2).

Коэффициенты D_{2m} в двумерном случае при любой квадратичной зависимости диэлектрической проницаемости от координат имеют вид [4]:

$$D_2 = -2(\overline{xp_y})(\overline{yp_x}) - (\overline{yp_y})^2 - (\overline{xp_x})^2 + (\overline{p_y^2})(\overline{y^2}) + (\overline{p_x^2})(\overline{x^2}) + 2(\overline{xy})(\overline{p_xp_y}), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} D_0 = {} & (\overline{xp_x})^2(\overline{yp_y})^2 + (\overline{xp_y})^2(\overline{yp_x})^2 - 2(\overline{xy})(\overline{p_xp_y})(\overline{xp_x})(\overline{yp_y}) - \\ & -2(\overline{xp_x})(\overline{yp_y})(\overline{xp_y})(\overline{yp_x}) + 2(\overline{xy})(\overline{p_x^2})(\overline{xp_y})(\overline{yp_y}) - (\overline{y^2})(\overline{p_x^2})(\overline{xp_y})^2 + \\ & + 2(\overline{xp_x})(\overline{xp_y})(\overline{p_xp_y})(\overline{y^2}) + 2(\overline{xp_x})(\overline{p_y^2})(\overline{xy})(\overline{yp_x}) - (\overline{y^2})(\overline{p_y^2})(\overline{xp_x})^2 - \\ & - 2(\overline{xy})(\overline{p_xp_y})(\overline{xp_y})(\overline{yp_x}) + 2(\overline{x^2})(\overline{yp_x})(\overline{yp_y})(\overline{p_xp_y}) - (\overline{x^2})(\overline{p_x^2})(\overline{yp_y})^2 - \\ & - (\overline{x^2})(\overline{p_y^2})(\overline{yp_x})^2 + (\overline{x^2})(\overline{y^2})(\overline{p_x^2})(\overline{p_y^2}) - (\overline{p_xp_y})^2(\overline{x^2})(\overline{y^2}) - \\ & - (\overline{xy})^2(\overline{p_x^2})(\overline{p_y^2}) + (\overline{xy})^2(\overline{p_xp_y})^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Представляет интерес важный частный случай аксиально-симметричной среды, когда n^2 зависит только от x^2+y^2 (волоконный световод). Тогда, если матрица Q(z) в плоскости z=0 была инвариантна относительно преобразования одновременного поворота на угол Φ в плоскости (x,y) и в плоскости (p_x,p_y), то она остается инвариантной относительно этого преобразования по мере распространения пучка вдоль оси z. В этом случае инварианты $D_{2m}^{(N)}$ будут иметь вид (с точностью до постоянного множителя):

$$D_2^{(2)} = (\overline{xp_y})^2 - (\overline{xp_x})^2 + (\overline{x^2})(\overline{p_x^2}), \tag{10}$$

$$D_0^{(2)} = \left[(\overline{xp_x})^2 + (\overline{xp_y})^2 - (\overline{x^2})(\overline{p_x^2})\right]^2. \tag{11}$$

В одномерном случае (N=1) (планарный световод) универсальный инвариант имеет вид:

$$D_0^{(1)} = (\overline{x^2})(\overline{p_x^2}) - (\overline{xp_x})^2. \tag{12}$$

В параксиальном приближении не только уравнение Гельмгольца, но и полное волновое уравнение можно представить в виде, аналогичном уравнению Шредингера:

$$i\lambda\!\!\!^{-} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\lambda\!\!\!^{-2}}{2n_0}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right] + \frac{n_0}{2}\psi. \tag{13}$$

Следовательно, при любой (достаточно плавной) зависимости показателя преломления n от продольной координаты z существуют универсальные инварианты, включающие в себя временные моменты типа

$$(\overline{t^2}) = \int \psi^*(x,y,t)\,t^2\psi(x,y,t)\,dxdydt, \; (\overline{p_t^2}) =$$
$$= -\lambda\!\!\!^{-2} \int \psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,y,t)\,dxdydt, \quad \left(\hat{p}_t = i\lambda\!\!\!^{-}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

то есть описывающие пучки, ограниченные не только в пространстве, но и во времени:

$$D_2^{(1)} = (\overline{t^2})(\overline{p_t^2}) + (\overline{x^2})(\overline{p_x^2}) - (\overline{tp_t})^2 - (\overline{xp_x})^2 - 2(\overline{xt})(\overline{p_xp_t}) + 2(\overline{xp_t})(\overline{tp_x}), \tag{14}$$

$$\begin{aligned} D_0^{(1)} = {} & (\overline{x^2})(\overline{t^2})(\overline{p_x^2})(\overline{p_t^2}) + (\overline{xt})^2(\overline{p_xp_t})^2 + (\overline{xp_x})^2(\overline{tp_t})^2 + \\ & + (\overline{xp_t})^2(\overline{tp_x})^2 - (\overline{p_x^2})(\overline{p_t^2})(\overline{xt})^2 - (\overline{x^2})(\overline{t^2})(\overline{p_xp_t})^2 - (\overline{x^2})(\overline{p_x^2})(\overline{tp_t})^2 - \\ & - (\overline{t^2})(\overline{p_x^2})(\overline{xp_t})^2 - (\overline{p_t^2})(\overline{t^2})(\overline{xp_x})^2 - (\overline{x^2})(\overline{p_t^2})(\overline{tp_x})^2 + \\ & + 2(\overline{p_t^2})(\overline{xp_x})(\overline{tp_x})(\overline{xt}) + 2(\overline{t^2})(\overline{xp_x})(\overline{p_xp_t})(\overline{xp_t}) + \\ & + 2(\overline{p_x^2})(\overline{xt})(\overline{xp_t})(\overline{tp_x}) + 2(\overline{x^2})(\overline{tp_x})(\overline{p_xp_t})(\overline{tp_t}) - \\ & - 2(\overline{xp_x})(\overline{tp_t})(\overline{tp_x})(\overline{xp_t}) - 2(\overline{xp_x})(\overline{tp_t})(\overline{xt})(\overline{p_xp_t}) - \\ & - 2(\overline{xt})(\overline{p_xp_t})(\overline{tp_x})(\overline{xp_t}), \end{aligned} \tag{15}$$

$$D_6^{(2)} = 1$$

$$D_4^{(2)} = 2(\overline{xy})(\overline{p_x p_y}) - (\overline{tp_t})^2 - (\overline{yp_y})^2 - 2(\overline{xt})(\overline{p_x p_t}) +$$

$$+ (\overline{x^2})(\overline{p_x^2}) + (\overline{y^2})(\overline{p_y^2}) + (\overline{t^2})(\overline{p_t^2}) - (\overline{xp_x})^2 - \qquad (16)$$

$$- 2(\overline{yt})(\overline{p_y p_t}) - 2(\overline{xp_y})(\overline{yp_x}) + 2(\overline{xp_t})(\overline{tp_x}) + 2(\overline{yp_t})(\overline{tp_y}).$$

Введем гауссовую матрицу плотности аксиально-симметричного оптического пучка, распространяющегося в аксиально-симметричной среде

$$\rho = N \exp\left(- a(x_1^2 + y_1^2) - a^*(x_2^2 + y_2^2) + 2b(x_1 x_2 + y_1 y_2) - f x_1 y_2 - f^* x_2 y_1\right).$$

Вычислив дисперсии и подставив их в универсальные инварианты, мы получаем следующие соотношения:

$$\frac{(a + a^*)^2 - f^2}{(a + a^*)^2 - 4b^2} = \mathrm{const}, \quad \frac{4b^2 + f^2}{(a + a^*)^2 - 4b^2} = \mathrm{const},$$

$$\frac{4b^2 + f^2}{(a + a^*)^2 - f^2} = \mathrm{const}, \quad \frac{b}{a + a^*} = \mathrm{const},$$

$$\frac{2}{\lambda^2}\left[D_0^{(2)} - D_2^{(2)}\right] = \frac{f}{(a + a^* - 2b)} = \mathrm{const}.$$

Физический смысл этих равенств состоит в том, что сохраняется отношение радиуса корреляции к ширине пучка, а также "момент импульса" $\langle xp_y - yp_x \rangle$.

В заключение обсудим вопрос о сохранении введенных выше инвариантов в случае неквадратичной среды на примере одномерной задачи с эффективным потенциалом $V(x)$ (см. уравнение (1)) вида

$$V(x) = \frac{w^2}{2} x^2 + \sum_{n\geq 3} A_n \, x^n/n.$$

При $A_n \equiv 0$ имеем инвариант (12). Если же коэффициенты A_n отличны от нуля, то легко получить уравнение

$$\frac{dD}{dz} = \sum_{n\geq 3} A_n \left[\langle x^n\rangle\langle px + xp\rangle - \langle x^2\rangle\langle px^{n-1} + x^{n-1} p\rangle\right]. \qquad (17)$$

Из него ясно, что, вообще говоря, величина D зависит от z, если $A_n \neq 0$. Однако если ангармонические члены малы, то есть $A_n \to 0$, то для нахождения зависимости $D(z)$ в правую часть уравнения (17) можно подставить значения входящих в нее высших моментов, вычисленных в нулевом приближении (то есть в предположении $A_n = 0$). В таком случае функция $D(z)$ будет колебаться около начального значения, причем размах колебаний будет иметь порядок A_n при $A_n \to 0$. Самым замечательным является, однако, то, что для некоторых классов начальных состояний размах колебаний может быть величиной высшего порядка малости по сравнению с A_n. Например, если отличны от нуля лишь коэффициенты A_3 и A_4, то такая ситуация имеет место для гауссовых начальных состояний (когда функция взаимной когерентности является экспонентой от квадратичной формы), поскольку в нулевом приближении гауссово состояние остается гауссовым с нулевыми средними первого порядка, если оно было таковым в начальный момент времени. При этом коэффициент при A_3 обращается в нуль, так как для гауссова состояния моменты всех нечетных порядков равны нулю, если они нулевые в первом порядке, а коэффициент при A_4 равен нулю в силу известных соотношений для гауссовых распределений:

$$\langle x^4\rangle = 3(\langle x^2\rangle)^2, \quad \langle px^3 + x^3p\rangle = 3\langle x^2\rangle\langle xp + px\rangle.$$

Интересным является также то, что и для негауссовых состояний в случае, когда лишь $A_3 \neq 0$ (в нулевом приближении), функция $D(z)$ также будет колебаться около начального значения $D(0)$:

$$D = D(0) + \Delta D = AB - C^2 - 3A_3\,\frac{1}{\gamma}\Big[\frac{\sin 3\gamma z}{3}\,\Big(\frac{CM}{4} + \frac{CL}{4\gamma^2} + \frac{AN}{4\gamma^2} - \frac{AP}{4} - \frac{BP}{2\gamma^2}\Big) + \sin\gamma z\,\Big(\frac{3CM}{4} - \frac{CL}{4\gamma^2} - \frac{AN}{4\gamma^2} + \frac{BP}{2\gamma^2} - \frac{3AP}{4}\Big) +$$

$$+ \frac{1-\cos 3\gamma z}{3}\,\Big(\frac{CP}{4\gamma} + \frac{CN}{4\gamma^3} - \frac{AL}{2\gamma} - \frac{BL}{4\gamma^3} + \frac{BM}{4\gamma}\Big) +$$

$$+ (1-\cos\gamma z)\,\Big(-\frac{3CP}{4\gamma} + \frac{3CN}{4\gamma^3} - \frac{AL}{2\gamma} + \frac{3BL}{4\gamma^3} + \frac{BM}{4\gamma}\Big)\Big],$$

где $A = (\overline{x^2})|_{z=0}$, $B = (\overline{p^2})|_{z=0}$, $C = (\overline{xp})|_{z=0}$, $M = (\overline{x^3})|_{z=0}$, $P = (\overline{px^2})|_{z=0}$, $L = (\overline{xp^2})|_{z=0}$, $N = (\overline{p^3})|_{z=0}$.

В случае, когда отличен от нуля лишь коэффициент A_4, будет наблюдаться рост $D(z)$, а именно:

$$D(z) = AB - C^2 + \frac{1}{4\gamma^2}A_4\Big[\frac{\sin 4\gamma z}{4}\,\Big(\frac{aC\gamma}{8} - \frac{Cb}{8\gamma^2} + \frac{Bk}{8\gamma^3} - \frac{3Bn}{8\gamma} - \frac{An\gamma}{8} + \frac{3Ak}{8\gamma}\Big) - \frac{\cos 4\gamma z}{4}\,\Big(\frac{Ck}{4\gamma^2} - \frac{Cn}{4} - \frac{aB}{8} + \frac{3Bm}{8\gamma^2} +$$

$$+ \frac{Ab}{8\gamma^2} - \frac{3Am}{8}\Big) - \frac{\cos 2\gamma z}{2}\,\Big(\frac{Cn}{2} - \frac{Ck}{2\gamma^2} + \frac{aB}{4} - \frac{3Bm}{4\gamma^2} - \frac{Ab}{4\gamma^2} +$$

$$+ \frac{3Am}{4}\Big) + \frac{3}{2}\gamma z\,\Big(\frac{aC\gamma}{4} - \frac{Cb}{4\gamma^3} + \frac{Bk}{4\gamma^3} + \frac{Bn}{4\gamma} - \frac{An\gamma}{4} - \frac{Ak}{4\gamma}\Big) +$$

$$+ \frac{\sin 2\gamma z}{2}\,\Big(\frac{aC\gamma}{2} + \frac{Cb}{2\gamma^3} - \frac{Bk}{2\gamma^3} - \frac{An\gamma}{2}\Big)\Big],$$

где $n = (\overline{x^3p})|_{z=0}$, $k = (\overline{p^3x})|_{z=0}$, $a = (\overline{x^4})|_{z=0}$, $b = (\overline{p^4})|_{z=0}$, $m = (\overline{x^2p^2})|_{z=0}$.

Помимо вышеприведенных инвариантов, связанных с моментами второго порядка, можно построить универсальные инварианты более сложного вида, выраженные через моменты четвертого порядка [4].

Литература

1. Леонтович М.А., Фок В.А. - ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 557.

2. Маркузе Д. Оптические волноводы. - М.: Мир, 1974, с. 135.

3. Додонов В.В., Манько В.И. Универсальные инварианты квантовых систем и обобщенные соотношения неопределенностей. - В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. - М.: Наука, 1983, т. 2, с. 11-33.

4. Додонов В.В., Манько О.В. Универсальные инварианты параксиальных оптических пучков. - В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. - М.: Наука, 1986, т. 2, с. 434-435, 437-440.