

*М. А. Голуб, Л. Л. Досколович, И. Н. Сисакян,
В. А. Сойфер, С. И. Харитонов*

**ДИФРАКЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ
ПРИ ФОКУСИРОВКЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОТРЕЗОК**

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] приведен алгоритм расчета фокусатора в кривую, основанный на геометрической аппроксимации оператора распространения комплексной амплитуды света. В этом приближении фокальная кривая представляет собой полосу, имеющую нулевую ширину. Распределение интенсивности в фокальной плоскости характеризуется в этом случае линейной плотностью. Фокальная кривая представляет собой каустику, и поэтому большое значение имеют дифракционные эффекты, которые не учитываются в решении обратной задачи фокусировки. В данной статье предлагается метод расчета фазовой функции фокусатора в отрезок, использующий геометрическое приближение вблизи фокусатора, но учитывающий волновые поправки вблизи фокального отрезка.

Пусть лазерное излучение с комплексной амплитудой $W_0(\vec{u}) = \sqrt{I_0(\vec{u})} \exp[ik\psi_0(\vec{u})]$, где $I_0(\vec{u})$ — интенсивность освещающего пучка, $\psi_0(\vec{u})$ — эйконал пучка, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — длина волны падает на фокусатор с апертурой G , расположенной в плоскости $\vec{u} = (u, v)$ при $z = 0$ (рис. 1), который преобразует падающее излучение в поле $W(\vec{u}) = W_0(\vec{u}) \exp[ik\psi(\vec{u})] = \sqrt{I_0(\vec{u})} \exp[ik\psi_1(\vec{u})]$, где $\psi(\vec{u})$ — эйконал фокусатора, $\psi_1(\vec{u}) = \psi_0(\vec{u}) + \psi(\vec{u})$ — эйконал непосредственно за плоскостью фокусатора. Задача состоит в отыскании эйконала фокусатора $\psi(\vec{u})$, обеспечивающего при $z = f$ в плоскости $\vec{x} = (x, y)$ формирование светового поля с интенсивностью $I(\vec{x})$, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} I(x, y) dy = \theta(x), \quad |x| < \frac{L}{2}, \quad (1)$$

соответствующему заданному распределению количества энергии $\theta(x)$ в ϵ — окрестности отрезка длины L , лежащего на оси x . При этом корректное задание $I_0(\vec{u}), I(\vec{x})$ требует выполнения условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(\vec{x}) d^2\vec{x} = \int_G I_0(\vec{u}) d^2\vec{u}.$$

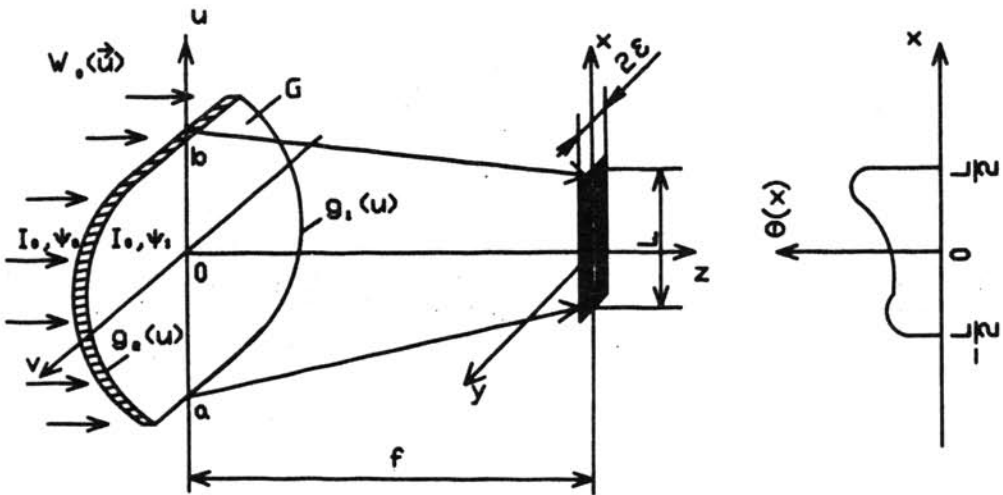


Рис. 1. Геометрия задачи фокусировки

Введем Δ — дифракционную ширину отрезка. При $2\epsilon \gg \Delta$ функция $\theta(x)$ представляет собой линейную плотность [1] энергии вдоль отрезка. При $2\epsilon \ll \Delta$ функция $\theta(x)$ пропорциональна значению интенсивности $I(x, 0)$ на геометрическом отрезке. Будем искать такое решение $\psi(\vec{u})$, при котором все лучи, проведенные из произвольной "фокусирующей кривой" $u = \text{const}$ пересекают плоскость фокусировки в одной точке фокального отрезка, имеющей координаты:

$$\begin{cases} x = \kappa(u) \\ y = 0. \end{cases} \quad (2)$$

"Фокусирующая кривая" может наглядно интерпретироваться как узкая светящаяся полоска на фокусаторе, видимая из точки наблюдения $(x, 0, f)$.

Так как уравнение эйконала выполнено в окрестности фокусатора, то в параксиальном приближении нетрудно получить уравнение наклонов

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial u} = \frac{\kappa(u) - u}{f}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial v} = -\frac{v}{f}, \quad (3)$$

позволяющее записать эйконал фокусатора $\psi(\vec{u})$ в виде

$$\psi(u, v) = -\frac{u^2 + v^2}{2f} + \frac{1}{f} \int_{u_0}^u \kappa(\xi) d\xi - \psi_0(u, v). \quad (4)$$

В работе [1] вид фокусирующей кривой однозначно связывался с выполнением геометрической оптики и наличием одного геометрооптического эйконала как вблизи фокусатора, так и в фокальной плоскости. Это приводило лишь к частному случаю "фокусирующей кривой", названной "слоем" и имеющей вид гиперболы. Обобщенное определение (2) — (4) описывает случай, когда геометрооптическая оптика действует в окрестности фокусатора, но переста-

ет действовать вблизи фокальной плоскости, например при длине отрезка порядка нескольких Δ или наличии всплеска функции $\theta(x)$ на длине порядка Δ . При больших фокальных отрезках и плавной функции $\theta(x)$ фокусирующие кривые переходят в слои [1]. Кроме того, геометрикооптический подход ограничивается лишь случаем $\epsilon \rightarrow \infty$, в то время как прикладной интерес представляет фокусировка в отрезок заданной, например, дифракционной ширины.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ В ПАРАКСИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В паракиальном приближении интеграла Кирхгофа комплексная амплитуда $w(\vec{x})$ в плоскости фокусировки имеет вид:

$$w(\vec{x}) = \frac{k \exp(ikf)}{2\pi if} \int_G \sqrt{I_0(\vec{u})} \exp[ik\psi_1(\vec{u})] \exp\left[\frac{ik}{2f}(\vec{x} - \vec{u})^2\right] d^2\vec{u}, \quad (5)$$

где $\psi_1(\vec{u})$ – эйконал пучка сразу за фокусатором

$$\psi_1(\vec{u}) = -\frac{u^2 + v^2}{2f} + \frac{1}{f} \int_{u_0}^u \kappa(\xi) d\xi. \quad (6)$$

Пусть апертура фокусатора G ограничена кривыми $v = g_1(u)$, $v = g_2(u)$ и отрезками прямых $u = a$, $u = b$, параллельных оси v (рис. 1). Согласно методу дифракционного расчета [2] при фокусировке в отрезок может быть получена дифракционная аппроксимация интеграла (6), основанная на использовании метода стационарной фазы при интегрировании поперек фокусирующей кривой, то есть по переменной u , причем

$$I(\vec{x}) = \left| \sqrt{\frac{k}{2\pi f}} \frac{g_2(u_x)}{g_1(u_x)} \sqrt{I_0(u_x, v)} \left(\frac{dk}{du}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{ik}{f}yv\right) dv \right|^2, \quad (7)$$

где u_x – решение уравнения (2) относительно u .

Формула (7) хорошо описывает дифракционные эффекты в поперечном сечении фокального отрезка, но не вблизи концов, то есть лишь частично уточняет геометрикооптические соотношения.

4. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФОКУСИРОВКИ В ОТРЕЗОК

Решение обратной задачи фокусировки в отрезок будем строить на основе дифракционного соотношения, полученного в п. 3. Согласно уравнениям (1), (7) функция $\theta(x)$ должна удовлетворять следующему соотношению

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left| \sqrt{\frac{k}{2\pi f}} \frac{g_2(u)}{g_1(u)} \sqrt{I_0(u, v)} \exp\left(-\frac{ik}{f}yv\right) dv \right|^2 dy = \theta[\kappa(u)] \frac{d\kappa(u)}{du}, \quad (8)$$

которое является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка для функции $\kappa(u)$ с граничными условиями: $\kappa(a) = -\frac{L}{2}$, $\kappa(b) = \frac{L}{2}$. Эйконал фокусатора определяется через функцию $\kappa(u)$ согласно (4). Заметим, что полученный эйконал $\psi(\vec{u})$ имеет вид (4), сходный с эйкономом геометрикооптического фокусатора, но с существенно другой, не геометрикооптической функцией $\kappa(u)$, учитывающей дифракционные поправки.

Для сравнения отметим, что в геометрикооптическом случае, то есть при $\theta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, y) dy$, $|x| < \frac{L}{2}$ уравнение имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\kappa}{du} = \frac{1}{\theta[\kappa(u)]} \int \frac{g_2(u)}{g_1(u)} I_0(u, \xi) d\xi \\ \kappa(a) = -\frac{L}{2}, \quad \kappa(b) = \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (9)$$

5. ФОКУСИРОВКА ПУЧКА С ПОСТОЯННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ В ОТРЕЗОК С ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ $\theta(x)$

Рассмотрим в качестве примера нахождение эйконала фокусатора пучка с постоянной интенсивностью $I_0(\vec{u}) = \begin{cases} I_0, & \vec{u} \in G \\ 0, & \vec{u} \notin G \end{cases}$ в отрезок прямой длины L , лежащей на оси x в плоскости $z = f$ для $\theta(x) = \text{const}$, то есть при условии

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} I(x, y) dy = \text{const}, \quad |x| < \frac{L}{2}. \quad (10)$$

В этом случае дифференциальное уравнение для $\kappa(u)$ имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\kappa}{du} = c \Phi \left(\frac{\kappa \xi}{f} [g_2(u) - g_1(u)] \right) [g_2(u) - g_1(u)] \\ \kappa(a) = -\frac{L}{2}, \kappa(b) = \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\Phi(\beta) = 2[\text{Si}(2\beta) - \text{Sinc}^2(\beta)]$ (12)

$$\text{Si}(\beta) = \int_0^\beta \frac{\text{Sin}(x)}{x} dx, \quad \text{Sinc}(\beta) = \frac{\text{Sin}(\beta)}{\beta}.$$

Подставляя $\kappa(u)$ в (4), получим выражение для эйконала фокусатора.

6. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДИФРАКЦИОННОГО РАСЧЕТА

Для вычисления поля в фокальной области фокусатора в отрезок уже недостаточно грубой аппроксимации, рассмотренной в п. 3, однако использование даже параксиального приближения интеграла Кирхгофа (5) не позволяет провести аналитические расчеты.

Численный метод расчета комплексной амплитуды при фокусировке в отрезок основывается на методике вычисления интеграла (5):

$$W(\vec{x}) = \frac{k \exp(ikf)}{2\pi ij} \int_G \sqrt{I_0(\vec{u})} \exp[ik\psi_1(\vec{u})] \exp\left[\frac{ik}{2f}(\vec{x} - \vec{u})^2\right] d^2\vec{u}.$$

Предлагаемый метод численного расчета $W(\vec{x})$ состоит в приближении аперттуры фокусатора G набором определенного вида апертурных областей $P_i, i = 1, N$, аппроксимации эйконала $\psi_1(\vec{u})$ при $\vec{u} \in P_i$ простым аналитическим выражением и последующей заменой интеграла (5) суммой легко вычисляемых интегралов по областям P_i . Рассмотрим подробную реализацию численного метода.

Введем разбиение $u_i, i = 1, N, u_0 = a, u_N = b$ отрезка $[a, b]$ и приближим аперттуру фокусатора G набором областей $P_i = [u_{i-1}, u_i] \times [g_1(u_{i-1}), g_2(u_{i-1})], i = 1, N$. Введем соответствующее разбиение фокального отрезка $x_i = \kappa(u_i), i = 0, N, x_0 = -\frac{L}{2}, x_N = \frac{L}{2}$, где $\kappa(u)$ — функция, описывающая соответствие между точками отрезка фокусировки и "фокусирующими кривыми" на апертуре фокусатора. Для функции $x = \kappa(u)$ используется локальная линейная аппроксимация на сетке $u_i, i = 0, N$. При $u \in [u_{i-1}, u_i]$ полагаем $x = \kappa_i(u)$, где

$$\kappa_i(u) = x_{i-1} + \frac{(x_i - x_{i-1} + \frac{L}{2})}{(u_i - u_{i-1})} (u - u_{i-1}) - \frac{L}{2}.$$

Тогда эйконал $\psi_1(\vec{u})$ при $\vec{u} \in P_i$ можно считать определенным согласно формуле

$$\psi_{P_i}(\vec{u}) = -\frac{\vec{u}^2}{2f} + \frac{(x_i - x_{i-1} + \frac{L}{2})}{(u_i - u_{i-1})} \cdot \frac{(u - u_{i-1})^2}{2f} + (x_{i-1} - \frac{L}{2}) \frac{u}{f} + \tilde{\psi}_{P_i}, \quad (13)$$

где $\tilde{\psi}_{P_i} = \frac{1}{f} \int_a^{u_{i-1}} \kappa(\xi) d\xi$.

Полагая $I_0(u, v) = I_0(u_j, v), \psi_1(\vec{u}) = \psi_{P_j}(\vec{u})$ при $\vec{u} \in P_j$, запишем $W(\vec{x})$ в виде

$$W(\vec{x}) = \frac{k \exp(ikf)}{2\pi if} \exp\left[\frac{ik}{2f} \vec{x}^2\right] \sum_{j=1}^N \exp[ik\tilde{\psi}_{P_j}] I_{j_1}(x) I_{j_2}(y), \quad (14)$$

где $I_{j_1}(x) = \int_{u_{j-1}}^{u_j} \exp\left[\frac{ik}{f} \left(\frac{x_j - x_{j-1} + \frac{L}{2}}{2(u_j - u_{j-1})} (u - u_{j-1})^2 + u(x_{j-1} - x - \frac{L}{2}) \right)\right] du$ (15)

$$I_{j_2}(y) = \int_{g_1(u_j)}^{g_2(u_j)} \sqrt{I_0(u_j, v)} \exp\left[\frac{ik}{f} yv\right] dv. \quad (16)$$

Вычисление интеграла $I_{j_1}(x)$ сводится к интегралу

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \exp(i\alpha x^2 + i\beta x) dx, \text{ причем}$$

$$I = \frac{\exp(-i\beta^2)}{\sqrt{|\alpha|}} \left(C\left[\sqrt{|\alpha|}\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)\right] + i \operatorname{Sign}(\alpha) S\left[\sqrt{|\alpha|}\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)\right] \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \quad (17)$$

где $C(x)$, $S(x)$ – интегралы Френеля

$$C(x) = \int_0^x \cos(\xi^2) d\xi, \quad S(x) = \int_0^x \sin(\xi^2) d\xi$$

$$\operatorname{Sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Интеграл $I_2(y)$ вычисляется на основе метода кусочно-постоянной аппроксимации функции $I_0(u_j, v)$ на сетке v_l , $l = 0, k$; $v_0 = g_1(u_j)$, $v_k = g_2(u_j)$:

$$I_2(y) = \sum_{l=1}^k \sqrt{I_0(u_j, v_l)} \int_{v_{l-1}}^{v_l} \exp\left[\frac{ik}{f} yv\right] dv = \sum_{l=1}^k \sqrt{I_0(u_j, v_l)} (v_l - v_{l-1}) \operatorname{Sinc}\left[\frac{y\pi}{\lambda f} (v_l - v_{l-1})\right] \exp\left[\frac{i y \pi}{\lambda f} (v_l + v_{l-1})\right].$$

В общем случае расчет поля при фокусировке в отрезок производится по формулам (13)–(17). Для оптимизации по скорости вычислений можно учесть, что на поле в точке $\vec{x} = (x, y)$, лежащей на фокальном отрезке или на одном из перпендикуляров к нему, влияют лишь точки апертуры, лежащие в окрестности соответствующей "фокусирующей кривой" $u = \kappa^{-1}(x)$, и, следовательно, суммирование в формуле (13) можно выполнять лишь с учетом некоторой окрестности фокусирующей кривой.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В вычислительном эксперименте проводилось сравнение результатов фокусировки пучка круглого сечения радиуса R в отрезок при использовании геометрооптического эйконала $\hat{\psi}(\vec{u})$ и эйконала с дифракционными поправками $\psi(\vec{u})$. Эйконал $\psi(\vec{u})$ рассчитывался для случая $2\epsilon \ll \Delta$, где $\Delta = \frac{\lambda f}{R}$ – ширина дифракционного пятна в центре отрезка фокусировки, соответствующего фокусировке в отрезок с постоянным распределением интенсивности. Для характеристики качества фокального отрезка используются следующие величины: значение энергетической

эффективности – E и среднеквадратичного отклонения – δ . Величина $E = \frac{\Delta}{2} \frac{L}{2} \frac{\int \int I(\vec{x}) d^2 \vec{x}}{R \int \int \sqrt{R^2 - u^2} \int_{-R}^R \int_{-R}^R I_0(\vec{u}) d^2 \vec{u}}$

характеризует долю энергии освещающего пучка, попавшую в окрестность фокального отрезка дифракционной ширины.

Величина $\delta = \frac{1}{\bar{I}} \left[\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [I(x, 0) - \bar{I}]^2 dx \right]^{1/2}$ характеризует близость распределения интенсивности на отрезке фокусировки к постоянной величине, где $\bar{I} = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I(x, 0) dx$ – среднее значение интенсивности на отрезке фокусировки.

В таблице 1 для фокусаторов с эйконалами $\hat{\psi}(\vec{u})$ и $\psi(\vec{u})$ приведены значения энергетической эффективности E и среднеквадратичного отклонения δ в зависимости от соотношения длины L отрезка фокусировки с дифракционным размером Δ в центре отрезка при фокусировке плоского пучка, $W_0(\vec{u}) = 1$ и следующих параметрах: $\lambda = 0,63$ мкм, $f = 250$ мм, $R = 3$ мм. Данные таблицы 1 наглядно показывают, что при практически одинаковой

Таблица 1

L (мм)	$\psi(\vec{u})$		$\hat{\psi}(\vec{u})$	
	E (%)	δ (%)	E (%)	δ (%)
5 Δ	81,1	24,6	82,5	35,2
10 Δ	83,4	19,7	84,1	30,1
20 Δ	83,9	15,2	85,4	27,2
50 Δ	84,1	11,9	85,7	23,7

энергетической эффективности фокусатор с дифракционным эйконалом $\psi(\bar{u})$ позволяет почти в два раза уменьшить среднеквадратичное отклонение интенсивности вдоль отрезка фокусировки. На рисунках 2, 3 приведены графики нормированного распределения интенсивности вдоль отрезка фокусировки с длиной $L = 30\Delta \approx 1,6$ мм, полученные для фокусаторов с эйконалами $\hat{\psi}(\bar{u})$ и $\psi(\bar{u})$ соответственно. Сравнение рис. 2 и рис. 3 показывает, что геометрический эйконал реально дает снижение интенсивности по краям, а эйконал с дифракционными поправками обеспечивает более близкое к равномерному распределение.

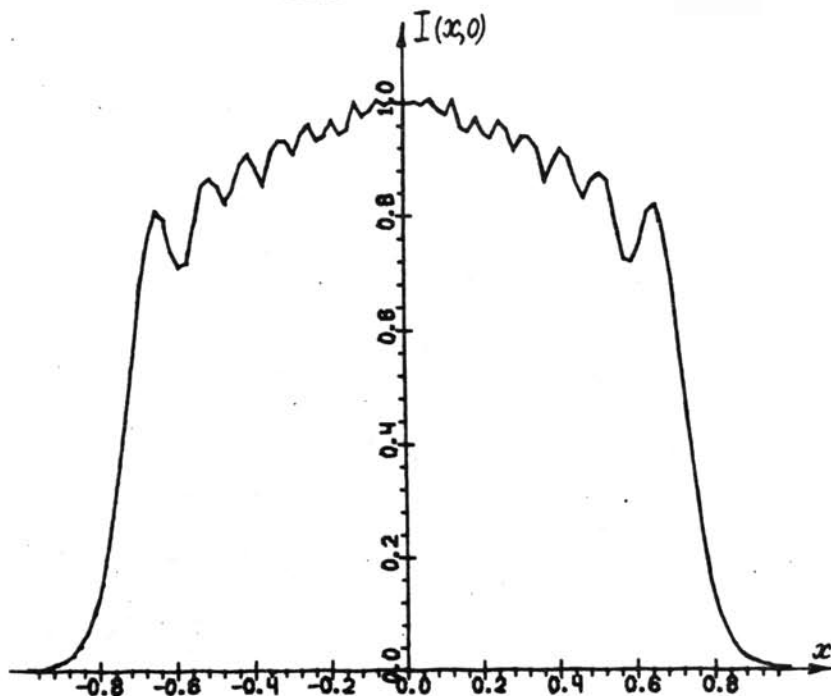


Рис. 2. Распределение нормированной интенсивности вдоль отрезка фокусировки от геометрического фокусатора

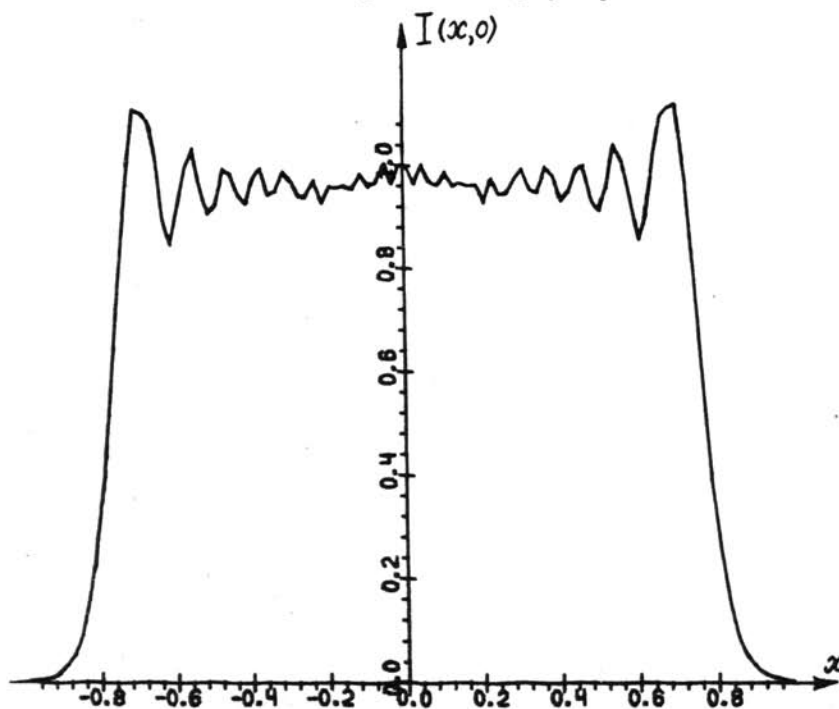


Рис. 3. Распределение нормированной интенсивности вдоль отрезка фокусировки от фокусатора с дифракционными поправками

В таблице 2 приведены результаты, полученные при фокусировке гауссового пучка, $W_0(\vec{u}) = \exp(-\frac{\vec{u}^2}{2\sigma^2})$ при тех же физических параметрах и $\sigma = 1,98$ мм. Данные таблицы 2 показывают, что при фокусировке гауссового пучка фокусатор с дифракционным эйконалом $\psi(\vec{u})$ также обеспечивает более близкое к равномерному распределение, однако уменьшение среднеквадратичного отклонения интенсивности вдоль отрезка фокусировки менее значительно, чем при фокусировке плоского пучка.

Таблица 2

L (мм)	$\psi(\vec{u})$		$\hat{\psi}(\vec{u})$	
	E (%)	δ (%)	E (%)	δ (%)
5 Δ	89,6	20,6	90,5	25,8
10 Δ	91,4	15,4	92,3	21,6
20 Δ	92,8	12,5	93,2	18,7
50 Δ	93,5	13,4	93,6	16,2

Литература

1. Данилов В. А., Попов В. В., Прохоров А. М., Сагателян Д. М., Сисакян И. Н., Сойфер В. А. Письма в ЖТФ, 1982, т. 8, № 13, с. 810–815.
2. Голуб М. А., Казанский Н. Л., Сисакян И. Н., Сойфер В. А., Харитонов С. И. Оптика и спектроскопия, М., 1989, т. 67, № 6, с. 1987–1989.