ДИФРАКЦИОННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Л.Л.Досколович, Н.Л.Казанский, В.А.Сойфер

АНАЛИЗ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ФОКУСИРОВКИ В ПРОДОЛЬНЫЙ ОТРЕЗОК

Введение

Для получения оптического разряда в газе [1], в оптических системах звукозаписи и воспроизведения [2], для бесконтактных измерений в специализированных микроскопах [3] и многих других областях [4] требуются оптические элементы, фокусирующие лазерное излучение в продольный отрезок.

Для фокусировки излучения в продольный отрезок используются рассчитываемые в геометрооптическом приближении дифракционные оптические элементы (ДОЭ), известные как фокусаторы [4-6]. В работе [7] для расчета ДОЭ, фокусирующего в продольный отрезок, применен итеративный алгоритм. Основным недостатком методов [4-7] является неравномерность распределения энергии, сфокусированной в ε-окрестности оптической оси. В настоящей работе предлагаются аналитический и итерационный методы расчета новых "квазипериодических" ДОЭ, фокусирующих излучение в отрезок оптической оси. На основе вычислительного эксперимента проводится сравнительный анализ работоспособности геометрооптического и квазипериодического решений задачи фокусировки в продольный отрезок.

Постановка задачи фокусировки

Предположим, что лазерный пучок с комплексной амплитудой

$$W_0(r)=\sqrt{I_0(r)}\,\exp\left[i\varphi_0(r)\right], \qquad r\in[0,R], \quad (1)$$

где $I_0(r)$ - интенсивность, а $\varphi_0(r)$ - фаза освещающего пучка, падает на ДОЭ с круглой апертурой радиуса R. ДОЭ располагается в плоскости z=0 (Рис.1) и преобразует падающее излучение в поле с комплексной амплитудой

$$W(r)=W_0(r)\exp\left[i\hat{\varphi}(r)\right], \quad (2)$$

где $\hat{\varphi}(r)$ - фазовая функция ДОЭ.

Требуется рассчитать фазовую функцию $\hat{\varphi}(r)$, обеспечивающую фокусировку падающего пучка в отрезок оптической оси с распределением интенсивности $I(z)$, $z\in[z_1,z_2]$.

Для удобства представим $\hat{\varphi}(r)$ в форме

$$\hat{\varphi}(r)=\varphi(r)-\varphi_0(r)\,. \quad (3)$$

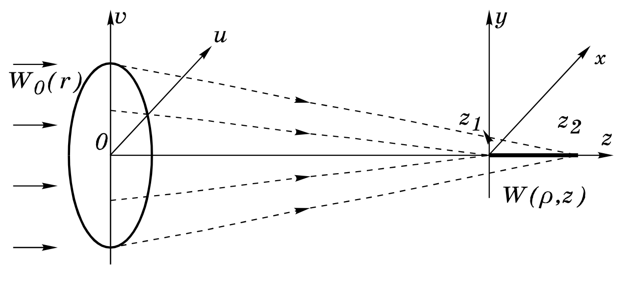

Рис. 1. Геометрия задачи фокусировки в продольный отрезок.

Представление (3) обеспечивает возможность расчета ДОЭ независимо от фазы $\varphi_0(r)$ освещающего пучка. В дальнейшем изложении используется функция $\varphi(r)$, которая однозначно определяет фазовое пропускание ДОЭ.

Расчет фазовой функции ДОЭ

Комплексная амплитуда $W(\rho,z)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ поля в фокальной области ДОЭ (см. Рис. 1) определяется через комплексное пропускание ДОЭ $exp[i\varphi(r)]$ на основе интеграла Френеля-Кирхгофа [8,9]

$$W(\rho,z)=\frac{k}{z}\exp\left(i\frac{k\rho^2}{2z}\right)\times \\ \times\int_0^R\sqrt{I_0(r)}\,\exp\left[i\varphi(r)\right]\exp\left(i\frac{kr^2}{2z}\right)J_0\left(k\frac{r\rho}{z}\right)r\,dr \quad ,(4)$$

где k=$2\pi/\lambda$, λ - длина волны, а $J_0(r)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка [10].

Для комплексной амплитуды поля на оптической оси (ρ=0) уравнение (4) принимает вид

$$W(0,z)=\frac{k}{z}\int_0^R\sqrt{I_0(r)}\,\exp\left(i\varphi(r)+ik\frac{r^2}{2z}\right)r\,dr\,. \quad (5)$$

Подстановка переменных в форме

$$\xi=-\frac{z_1}{z} \ \text{ и } \ x=\frac{r^2}{2} \quad (6)$$

позволяет переписать уравнение (5) в виде

$$W(\xi)=-\frac{k}{z_1}\xi\int_0^{R^2/2}\sqrt{I_0\left(\sqrt{2x}\right)}\exp\left[i\varphi_1(x)\right]\exp\left(-ik\frac{x\xi}{z_1}\right)dx\,, \quad (7)$$

где $\varphi_1(x)=\varphi\left(\sqrt{2x}\right)$.

Как следует из формулы (7) задача фокусировки в продольный отрезок с распределением интенсивности $I(z)$, $z\in[z_1,z_2]$, сводится к задаче расчета фазовой функции $\varphi_1(x)$ одномерного ДОЭ, фокусирующего пучок с комплексной амплитудой $\sqrt{I_0\left(\sqrt{2x}\right)}\exp\left(-ik\,x^2/2z_1\right)$, $x\in\left[0,\ R^2/2\right]$, в поперечный отрезок с распределением интенсивности $I\left(-z_1/\xi\right)/\xi^2$, $\xi\in\left[-1,\ -z_1/z_2\right]$ в плоскости, расположенной на расстоянии z_1 от апертуры одномерного ДОЭ. Используя различные методы расчета фазовой функции $\varphi_1(x)$ одномерного ДОЭ можно получить различные решения задачи фокусировки в продольный отрезок.

В рамках геометрооптического приближения фазовую функцию одномерного ДОЭ можно найти из решения следующей системы уравнений [11,12]

$$\begin{cases}\varphi_1(x)=\varphi(x)-\varphi_0(x)\\ \dfrac{d\varphi(x)}{dx}=\dfrac{k}{f}(\xi-x)\\ \dfrac{I_0(x)}{I_1(\xi)}=\dfrac{d\xi}{dx}, \qquad x\in\left[x_0,x_1\right],\quad \xi\in\left[\xi_0,\xi_1\right],\end{cases} \tag{8}$$

где $\varphi_0(x)$ - фазовая функция освещающего пучка, f - расстояние до плоскости фокусировки, $I_0(x)$ - интенсивность освещающего пучка, $I_1(\xi)$ - требуемое распределение интенсивности в плоскости фокусировки.

В частности, при фокусировке плоского пучка в продольный отрезок с постоянной интенсивностью уравнения (6) и (8) дают фазовую функцию ДОЭ в форме

$$\varphi(r)=\frac{-kR^2}{2L}\ln\left[\frac{r^2L}{R^2z_1}+1\right], \tag{9}$$

где $L = z_2 - z_1$.

При L/z_1<<1 использование аппроксимации $ln(1+x)\approx x - x^2/2$ приводит уравнение (9) к виду

$$\varphi(r)=\frac{-kr^2}{2z_1}+\frac{kr^4L}{4R^2z_1^2}\,. \tag{10}$$

Фазовая функция (10) соответствует фазовой функции тонкой линзы с введенной сферической аберрацией.

Следует заметить, что приближение геометрической оптики для расчета $\varphi_1(x)$ дает уравнения (9) и (10), которые совпадают с фазовыми функциями фокусаторов, описанных в работах [4-7]. В связи с этим в дальнейшем изложении ДОЭ, определяемые уравнениями (9) и (10), будем называть фокусаторами.

Рассмотрим также получение фазовой функции $\varphi_1(x)$ на основе использования итерационного алгоритма Герчберга-Секстона [13] или одной из его модификаций [7,14,15], позволяющих улучшить геометрооптические решения (9) и (10).

В работе [16] сообщается о расчете "квазипериодических" ДОЭ, близких по своим функциональным свойствам к физическим голограммам, так как каждый период апертуры таких ДОЭ формирует полную фокальную область. При фокусировке сходящегося сферического пучка фазовая функция $\varphi_1(x)$, $x\in[x_0,x_1]$, одномерного квазипериодического ДОЭ соответствует K-раз повторенной фазовой функции $\varphi_p(x)$, $x\in[0,(x-x_0)/K]$, которая обеспечивает фокусировку в требуемый отрезок. Для каждого периодического повторения вводится свой постоянный фазовый сдвиг [15]

$$\varphi_i=\frac{\pi i^2}{K},\qquad i=0,\dots,K-1\,, \tag{11}$$

K - четное.

Таким образом, фазовая функция квазипериодического ДОЭ имеет вид

$$\varphi_1(x)=\varphi_p\left(x-x_1-\alpha\,\mathrm{int}\left[\frac{x-x_1}{\alpha}\right]\right)+\frac{\pi}{K}\mathrm{int}\left[\frac{x-x_1}{\alpha}\right]^2 \tag{12}$$

где $\alpha=(x_2-x_1)/K$, а int$[x]$ есть целая часть x.

Функция $\varphi_p(x)$, $x\in[0,\alpha]$, в уравнении (12) может быть получена аналитически на основе решения системы (8) или численно - используя итерационный алгоритм Герчберга-Секстона.

Используя функцию $\varphi_p(x)$, полученную на основе решения системы (8), можно найти фазовую функцию ДОЭ, фокусирующего плоский пучок в продольный отрезок:

$$\varphi(r)=\frac{-kR^2}{2KL}\ln\left(\frac{LK}{R^2z_1}\left(r^2-\frac{R^2}{K}\mathrm{int}\left[\frac{r^2K}{R^2}\right]\right)+1\right)+\tilde{\varphi}(r) \tag{13}$$

где

$$\tilde{\varphi}(r)=\frac{\pi}{K}\mathrm{int}\left[\frac{r^2K}{R^2}\right]^2 \tag{14}$$

Заметим, что для K=1 уравнение (13) соответствует фазовой функции фокусатора (9). Если L/z_1<<1 уравнение (13) может быть сведено к виду

$$\begin{aligned}\varphi(r)=&-\frac{kr^2}{2z_1}+\frac{kR^2}{2z_1K}\,\mathrm{int}\left[\frac{r^2K}{R^2}\right]+\\&+\frac{kLK}{4R^2z_1^{\,2}}\left(r^2-\frac{R^2}{K}\mathrm{int}\left[\frac{r^2K}{R^2}\right]\right)^2+\tilde{\varphi}(r)\quad,\end{aligned} \tag{15}$$

Для квазипериодического ДОЭ, определяемого уравнениями (13) или (15), фазовая функция $\varphi_p(x)$ в уравнении (12) соответствует фокусировке в отрезок длиной $N(K)\Delta$, где $\Delta=2\lambda z_1K/R^2$ - размер дифракционного пятна, а

$$N(K)=\mathrm{int}\left[\frac{LR^2}{2\lambda z_1z_2K}\right] \tag{16}$$

Использование геометрооптического решения для $\varphi_p(x)$ в уравнении (12) возможно только для $N(K)$>>1 (т.е. для $N(K)$=10 или больше), что налагает ограничения на возможные значения K. При

$N(K)$=1-3 синтез квазипериодического ДОЭ становится невозможным даже с использованием итерационного расчета функции $\varphi_p(x)$ в уравнении (12).

Проанализируем уравнение (15). При $\tilde{\varphi}(r) \equiv 0$, фазовая функция (15) превращается в фазовую функцию многофокусной линзы [17,18] с количеством фокусов N, определяемым формулой (16). Координаты фокусов

$$F_i = z_1 \frac{R^2}{R^2 - 2i\lambda K z_1} \quad i = 0,1,\ldots N \tag{17}$$

Таким образом, при $\tilde{\varphi}(r) \equiv 0$ распределение интенсивности на оптической оси соответствует N пикам с шириной соседних пиков в K раз меньшим, чем расстояние между соседними фокусами. При K=1 пики сливаются, образуя отрезок вдоль оптической оси. Аналогичным образом дифракционная решетка обеспечивает разбиение фокального изображения на набор точек только при числе периодов K>1. Функция $\tilde{\varphi}(r)$ в (13) соответствует введению сферической аберрации в (10) для фокусировки в отрезок (F_i, F_{i+1}). Это обеспечивает формирование непрерывного распределения интенсивности вдоль оптической оси при K>1.

Заметим, что проведенный анализ выполнен только для квазипериодических ДОЭ (13) или (15). Строгий вывод формы функции $\tilde{\varphi}(r)$ следует из формулы (7) и метода расчета квазипериодического ДОЭ [16], фокусирующего в поперечный отрезок.

Результаты численного моделирования

В этом разделе рассматривается численное исследование решений задачи фокусировки в продольный отрезок, полученных на основе геометрооптической функции (9) и квазипериодической функции (13).

Методы расчета ДОЭ, рассмотренные в предыдущем параграфе, направлены на создание требуемого распределения интенсивности на оптической оси и не управляют распределением в ε-окрестности оптической оси, что намного важнее для практического использования ДОЭ. В этой связи, чтобы охарактеризовать работу ДОЭ, будем применять следующие характеристики: среднеквадратичное отклонение δ полученного распределения от требуемого (СКО) и энергетическую эффективность E. Значение

$$\delta(\varepsilon) = \frac{1}{\overline{E}} \left[\frac{1}{(z_2 - z_1)} \int_{z_1}^{z_2} \left(E(z,\varepsilon) - \overline{E} \right)^2 dz \right]^{1/2}$$

где

$$\overline{E} = \frac{1}{(z_2 - z_1)} \int_{z_1}^{z_2} E(z,\varepsilon)\, dz, \quad E(z,\varepsilon) = 2\pi \int_0^{\varepsilon} I(r,z)\, r\, dr$$

характеризует среднеквадратичное отклонение осевого распределения энергии $E(z,\varepsilon)$ от среднего значения $\overline{E}(\varepsilon)$. Если $\varepsilon \to 0$, $\delta(\varepsilon)$ характеризует среднеквадратичное отклонение распределения интенсивности на оптической оси от среднего значения. Величина $E(z,\varepsilon)$ характеризует энергию, приходящую в ε-окрестность оптической оси с координатой z, в то время как значение

$$E(\varepsilon) = \overline{E}(\varepsilon) \Big/ \left(2\pi \int_0^R I_0(r)\, r\, dr \right)$$

характеризует среднюю долю энергии освещающего пучка, фокусируемую в поперечное сечение отрезка фокусировки с радиусом ε.

Левая часть таблицы 1 содержит рассчитанные значения $E(\varepsilon)$ и $\delta(\varepsilon)$ [$\varepsilon=\Delta$, 2Δ и 3Δ, где $\Delta = 0{,}61 \cdot \lambda(z_1 + z_2)/(2R)$] для фокусатора с фазовой функцией (9), предназначенного для фокусировки плоского пучка в продольный отрезок с постоянным распределением интенсивности со следующими параметрами: λ=0,63мкм; z_1=320мм; z_2=360мм; R=15мм. Средняя часть таблицы 1 содержит аналогичные значения для "квазипериодического ДОЭ-1", а именно для ДОЭ с фазовой функцией (13) при K=2, 4. В правой части таблицы 1 расположены значения $E(\varepsilon)$ и $\delta(\varepsilon)$ для "квазипериодического ДОЭ-2" при K=2,4, рассчитанного с использованием квазипериодической функции $\varphi_1(x)$ (12). В этом случае функция $\varphi_p(x)$ в (12) рассчитывалась с использованием адаптивной модификации алгоритма Герчберга-Секстона [7] с использованием в качестве начального приближения геометрооптической функции (9).

Таблица 1.

Энергетическая эффективность $E(\varepsilon)$ и среднеквадратичное отклонение $\delta(\varepsilon)$ для фокусатора и для квазипериодических ДОЭ 1 и 2.

ε	Фокусатор		Квазипериодический ДОЭ-1				Квазипериодический ДОЭ-2			
			K=2		K=4		K=2		K=4	
	$\delta(\varepsilon)$%	$E(\varepsilon)$%	$\delta(\varepsilon)$%	$E(\varepsilon)$%	$\delta(\varepsilon)$%	$E(\varepsilon)$%	$\delta(\varepsilon)$%	$E(\varepsilon)$%	$\delta(\varepsilon)$%	$E(\varepsilon)$%
$\varepsilon<<\Delta$	29,1	-	31,0	-	35,3	-	12,5	-	11,1	-
Δ	77,8	1,8	50,1	1,9	49,9	1,8	38,9	1,7	38,0	1,8
2Δ	65,6	3,6	50,8	3,7	53,3	3,7	44,6	3,3	42,9	3,6
3Δ	59,3	5,3	41,8	5,4	40,3	5,4	36,5	4,8	32,2	5,3

Анализ данных таблицы 1 показывает, что фокусатор (9) с осевой неравномерностью распределения интенсивности в 29% имеет значительную неравномерность распределения энергии от 77% до

59% для $\varepsilon=\Delta$, 2Δ и 3Δ соответственно. Для квазипериодического ДОЭ-1 неравномерность распределения интенсивности вдоль оптической оси больше и составляет 31% при K=2 и 35% при K=4. Большая неравномерность осевого распределения интенсивности для квазипериодического ДОЭ-1 обусловлена ростом погрешности геометрооптического решения (9) с увеличением K. В то же время неравномерность распределения энергии $E(z,\varepsilon)$ для квазипериодических ДОЭ в 1,4-1,6 раз меньше, чем для фокусаторов. Для квазипериодических ДОЭ-2 по сравнению с квазипериодическими ДОЭ-1 неравномерность распределения интенсивности вдоль оптической оси примерно в три раза меньше при значительно меньшем (в 1,2-1,3 раза) снижении неравномерности распределения энергии $E(z,\varepsilon)$. Энергетическая эффективность $E(\varepsilon)$ приблизительно одинакова для всех исследованных оптических элементов и лежит в пределах от 1,7% до 1,9% при $\varepsilon=\Delta$ и от 4,8% до 5,4% при $\varepsilon=3\Delta$.

На рисунках 2 - 4 приведены полутоновые распределения интенсивности $I(\rho,z)$ для фокусатора и квазипериодических ДОЭ 1 и 2 при K=4. Рис.2 демонстрирует значительное размывание поля в начале отрезка с энергией, в основном сконцентрированной в пределах фокального пятна шириной от $1{,}5\Delta - 2\Delta$ в начале отрезка до Δ в конце отрезка. Поля на рисунках 3 и 4 имеют периодическую структуру. Полученный результат соответствует анализу работы квазипериодического ДОЭ, приведенному выше (в предыдущем разделе).

При $\tilde{\varphi}(r)\equiv 0$ ДОЭ-1 с фазовой функцией (13) соответствует многофокусной линзе (см. Рис. 5). Функция $\tilde{\varphi}(r)$, уравнение (14), соответствует введению сферической аберрации и обеспечивает формирование структуры фокального поля близкой к структуре поля от фокусатора. Число периодов поля N обратно пропорционально K и определяется уравнением (16); при K=4 и исследуемых параметрах (Рис.2-5) N=16.

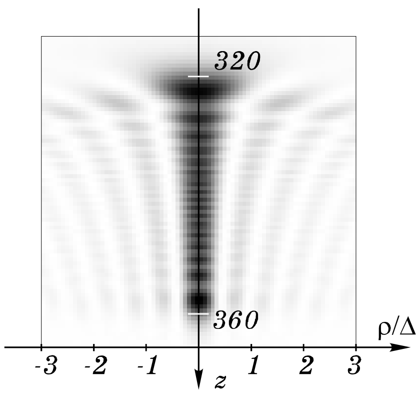

Рис.2. Полутоновое распределение интенсивности в меридиональном сечении (ρ,z) фокальной плоскости фокусатора с параметрами: λ =0,63 мкм, z1 =320 мм; z2 =360мм; R=15мм.

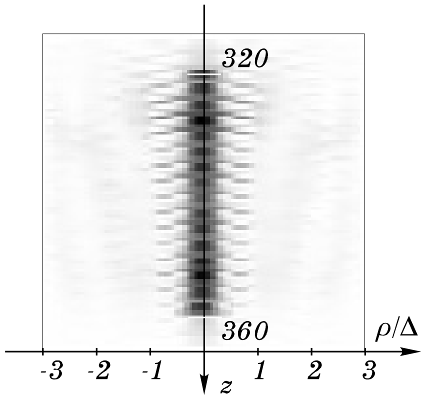

Рис.3. Полутоновое распределение интенсивности в меридиональном сечении (ρ,z) фокальной плоскости квазипериодического ДОЭ-1 с параметрами: λ=0,63 мкм, z_1 =320мм; z_2=360мм;* R=*15 мм;* K=*4.

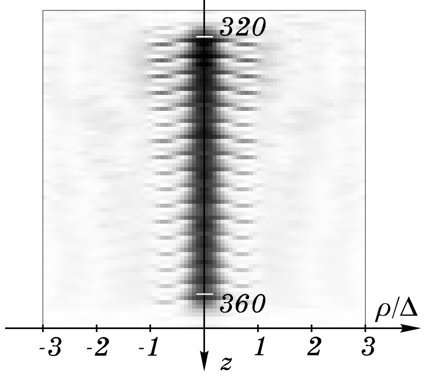

Рис.4. Полутоновое распределение интенсивности в меридиональном сечении (ρ,z) фокальной плоскости квазипериодического ДОЭ-2 с параметрами: λ=0,63 мкм, z_1=320мм; z_2 =360 мм;* R=*15 мм;* K=*4.

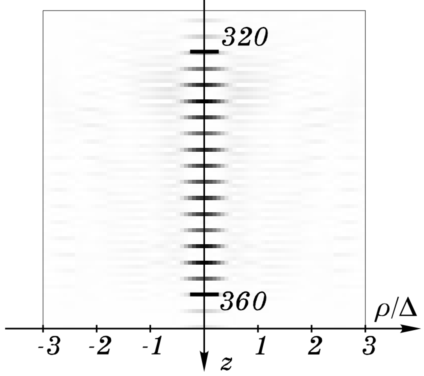

Рис.5. Полутоновое распределение интенсивности в меридиональном сечении (ρ,z) фокальной плоскости квазипериодического ДОЭ-1 (Рис.3) при $\tilde{\varphi}(r)\equiv 0$ в уравнении (13).

Таким образом, значение K влияет на структуру поля, формируемую квазипериодическими ДОЭ. В то же время погрешность геометрооптического и итерационного расчета функции $\varphi_p(x)$ в (12) увеличивается с ростом K. Из сказанного следует, что значение K можно рассматривать как дополнительный оптимизационный параметр расчета ДОЭ, обеспечивающий возможность оптимизации $E(\varepsilon)$ и $\delta(\varepsilon)$ при заданном ε. Например, если $\varepsilon=2\Delta$, квазипериодический ДОЭ-1 обеспечивает более равномерное распределение энергии при K=2, чем при K=4. В то же время, если $\varepsilon = 3\Delta$, квазипериодический ДОЭ-2 дает более высокую эффективность при K=4, чем при K=2.

Заключение

Получены и проанализированы квазипериодические решения задачи фокусировки в продольный отрезок. Квазипериодический ДОЭ может рассматриваться как набор концентрических колец, каждое из которых формирует весь отрезок фокусировки.

Численные исследования продемонстрировали лучшие показатели фокусировки для квазипериодических ДОЭ по сравнению с фокусаторами. Аналитически рассчитанный квазипериодический ДОЭ-1 обеспечивает формирование распределения энергии в ε-окрестности отрезка оптической оси, которое в 1,4 - 1,5 раза равномернее аналогичного распределения для фокусаторов. Квазипериодический ДОЭ-2, рассчитанный с использованием итерационного алгоритма Герчберга-Секстона, обеспечивает дополнительное уменьшение неравномерности распределения энергии $E(z,\varepsilon)$ вдоль отрезка фокусировки в 1,2 - 1,3 раза по сравнению с ДОЭ-1.

Благодарность

Работа выполнена в рамках Государственной научно-технической программы "Наукоемкие технологии" при поддержке Министерства науки и технической политики РФ. Авторы выражают благодарность А.Е. Царегородцеву, С.И.Харитонову, Я.Е. Тахтарову и С.В. Смагину за помощь в подготовке настоящей статьи.

Литература

1. Laser plasmasoptically pumped by focusing with axicon a CO_2-TEA laser beam in a high-pressure gas / Tremblay R., D'Astons Y., Roy G., Blanshard M. // Optics Communications. - 1979. - Vol.28, No 2. - P.193-196.
2. Brenden B.B., Russel J.T. Optical playback apparatus focusing system for producing a prescribed energy distribution along an axial focal zone // Applied Optics. - 1984. - Vol.23, No 19. - P.3250-3253.
3. Michaltsova I.A., Nalivaiko V.I., Soldatenkov I.S. Kinoform axicon // Optik. - 1984. - Vol.67, No 3. - P.267-270.
4. Пальчикова И.Г. Киноформные оптические элементы с увеличенной глубиной фокуса // Компьютерная оптика. - М.: МЦНТИ, 1989. - Вып.6. - С.9-19.
5. Фокусировка когерентного излучения в заданную область пространства с помощью синтезированных на ЭВМ голограмм / Голуб М.А., Карпеев С.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. // Письма в ЖТФ. - 1981. - Т.7, вып.10. - С.618-623.
6. Вычислительный эксперимент с элементами плоской оптики / Голуб М.А., Казанский Н.Л., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. // Автометрия. - 1988. - No 1. - С. 70-82.
7. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A. Calculation of the focusators into a longitudinal line-segment and study of a focal area // Journal of Modern Optics. - 1993. - Vol.40. - P.761-769.
8. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.- М.: Наука, 1973. - 720 с.
9. Kathuria Y.P. Computer modeling of three-dimensional Fresnel-diffraction pattern at circular, rectangular and square apertures // Optica Applicata. - 1984. - Vol. 14, No 4. - P.509-514.
10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции (формулы, графики, таблицы). - М.: Наука. - 1968. - 344с.
11. Golub M.A., Sisakian I.N., Soifer V.A. Infrared radiation focusators // Optics and Lasers in Engineering. - 1991. - Vol.15, No 5. - P.297-309.
12. Метод согласованных прямоугольников для расчета фокусаторов в плоскую область / Голуб М.А., Досколович Л.Л., Казанский Н.Л., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Харитонов С.И. // Компьютерная оптика. - М.: МЦНТИ, 1992. - Вып.10-11. - С.100-110.
13. Gerchberg R.W., Saxton W.D. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures // Optik. - 1972. - Vol.35. - P.237-246.
14. Fienup J.R. Iterative method applied to image reconstruction and to computer-generated holograms // // Optical Engineering, 1980. - Vol.19. - P.297-303.
15. Kotlyar V.V., Nikolsky I.V., Soifer V.A. Adaptive iterative algorithm for focusators synthesis // Optik. - 1991. - Vol.88, No 1. - P.17-19.
16. Березный А.Е. Квазипериодические оптические элементы // Компьютерная оптика. - М.: МЦНТИ, 1989. - Вып.6. - С.19-23.
17. Computer generated diffractive multi-focal lens / Golub M.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Kharitonov S.I., Soifer V.A. // Journal of Modern Optics. - 1992. - Vol.39, No 6. - P.1245-1251.
18. Special diffractive lenses / Doskolovich L.L., Golub M.A., Kazanskiy N.L., Soifer V.A., Usplenjev G.V. // Proceedings SPIE. - 1993. - Vol.1780. - P.393-402.