С.А.Степанов, Г.И.Грейсух

КОМПЬЮТЕРНЫЙ РАСЧЕТ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОБЛАСТИ АБЕРРАЦИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Расчет в области аберраций высших порядков наиболее эффективен в том случае, когда силовыми элементами оптической системы являются градиентные и дифракционные линзы. Это обусловлено в основном двумя причинами. Во-первых, аберрационное разложение такой системы при надлежащем выборе исходной схемы сходится достаточно быстро, благодаря чему устранение аберраций каждого последующего порядка приводит к ощутимому улучшению оптических характеристик.

Во-вторых, градиентные и дифракционные линзы обеспечивают возможность селективной коррекции аберраций различных порядков. Действительно, в случае радиально-градиентной линзы (показатель преломления которой

$$n(\rho)=\sum_{p=0}^{\infty} n_p \rho^{2p} \qquad (1)$$

где ρ - расстояние от оси линзы) коэффициенты n_p влияют на аберрации, начиная только с $(2p+1)$-го порядка.

В случае дифракционной линзы (фокусирующие и аберрационные свойства которой определяются законом изменения пространственной частоты ее структуры

$$\Omega(\rho)=(1/\lambda_0)\left[\rho\Phi_0+\sum_{l=1}^{\infty} b_{2l+1}\rho^{2l+1}\right], \qquad (2)$$

где Φ_0 - оптическая сила линзы на длине волны λ_0) коэффициенты b_{2l+1} влияют на аберрации, начиная только с $(2p+1)$-го порядка.

Известные методики вычисления аберраций третьего и пятого порядков оптических систем, состоящих из градиентных линз [1,2] основываются на использовании теории квазиинвариантов [3]. Это позволяет достаточно легко распространить указанные методики и на системы с дифракционными элементами, для чего необходимо лишь получить в приближении соответствующего порядка малости вклад в приращение квазиинварианта, вносимый дифракционной линзой [4].

Однако, с точки зрения широты функциональных возможностей больший интерес, на наш взгляд, представляет путь получения аберрационных коэффициентов по диаграмме рассеяния псевдолучей, ход которых через оптическую систему рассчитывается в приближении заданного порядка малости. В этом случае переход к все более и более высоким аберрационным порядкам существенно проще, а процесс вычислений легко алгоритмизируется. Более того, использование псевдолучей кроме вычисления аберрационных коэффициентов различных порядков позволяет осуществить минимизацию суммарной аберрации раздельно в каждом порядке и, наконец, минимизировать остаточную аберрацию того или иного типа путем взаимного балансирования ее составляющих различных порядков.

Расчет хода как реального, так и псевдолуча через оптическую систему, включающую элементы различных типов, основывается на использовании в той или иной последовательности формул расчета хода луча через отдельные ее элементы. Такие формулы по известным параметрам луча на входе в элемент (входным параметрам) позволяют определить параметры луча на выходе из него (выходные параметры). В дальнейшем совместим ось оптической системы с осью OZ, а в качестве лучевых параметров воспользуемся парой векторов $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\mu}$, определяющих луч в его точке пересечения с плоскостью, нормальной к оси системы и отстоящей от начала координат на некотором расстоянии z.

Вектор $\boldsymbol{\rho}$ определяет точку пересечения и имеет составляющие $[x(z), y(z), 0]$. Вектор $\boldsymbol{\mu}$ определяет наклон луча и его составляющие $[\varepsilon_x(z),\varepsilon_y(z), 0)$ связаны с направляющими косинусами луча $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ соотношениями $\varepsilon_x=\alpha_x/\alpha_z$, $\varepsilon_y=\alpha_y/\alpha_z$.

Для того, чтобы получить формулы расчета хода псевдолуча через оптический элемент того или иного типа, необходимо точные формулы расчета хода луча через элемент привести к виду, удобному для их последующего разложения в ряды по степеням входных параметров луча.

В результате после разложения и соответствующей группировки параметры луча на выходе из элемента будут описываться степенными рядами, состоящими из слагаемых различных порядков малости относительно параметров луча на входе в этот элемент. Ограничивая ряды конечным числом слагаемых, получим выходные параметры псевдолуча, вычисленные в требуемом приближении.

Получение необходимых формул начнем с преломления луча на сферической поверхности, имеющей кривизну c и являющейся поверхностью раздела двух неоднородных сред с показателями преломления n и n'.

В соответствии с законом Снеллиуса-Декарта направляющие векторы падающего и преломленного лучей α и α' связаны соотношением [5]

$$\mathbf{a}' = \nu \mathbf{a} - A\mathbf{N}\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{N}$ - направляющий вектор нормали к преломляющей поверхности в точке падения луча,

$$\left.\begin{aligned} &\nu = n/n', \\ &A = -\nu(\mathbf{N}\cdot\mathbf{a}) + \sqrt{1-\nu^2\left[1-(\mathbf{N}\,\mathbf{a})^2\right]} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Вводя в уравнения (3), (4) векторы ε и ρ, их нетрудно привести к виду [6], удобному для разложения по степеням входных параметров луча

$$\mathbf{e}' = \mathbf{B}\left(\nu\alpha_z\mathbf{e} + cA\mathbf{r}\right) \tag{5}$$

В уравнении (5)

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_z = 1\Big/\sqrt{1+2w} \\ &B = 1\Big/\left(\nu\alpha_z - A\sqrt{1-2c^2u}\right. \\ &A = -\nu D + \sqrt{1-\nu^2\left(1-D^2\right)} \\ &D = \alpha_z\left(\sqrt{1-c^2u} - cv\right) \\ &\nu = \sum_{p=0}^{\infty} n_p\left(2u\right)^p \Big/ \sum_{q=0}^{\infty} n'_q\left(2u\right)^q \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где величины u, v и w являются инвариантами вращения и определяются с помощью соотношений

$$u = \mathbf{r}^2, v = (\mathbf{r}\ \ \mathbf{e}), w = \mathbf{e}^2/2 \tag{7}$$

Разлагая выражения (6) в ряды по степеням трех инвариантов вращения, подставляя эти разложения в уравнение (5) и группируя после перемножения члены, имеющие одинаковый порядок малости, получим выходной параметр луча (ε') в виде суммы слагаемых первого, третьего, пятого и т.д. порядков малости относительно входных параметров (модулей векторов ρ и ε):

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}'^{(1)} + \mathbf{e}'^{(3)} + \mathbf{e}'^{(5)} + \ldots \tag{8}$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и для дифракционной линзы. Направляющие косинусы падающего и дифрагировавшего лучей при дифракции на линзе, структура которой имеет пространственную частоту и выполнена на плоской подложке, связаны соотношениями [7]

$$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix}\alpha'_x\\ \alpha'_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_x\\ \alpha_y\end{pmatrix} + \frac{m\lambda\Omega}{\rho}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \\ &\alpha'_z = \sqrt{1-\left(\alpha'_x\right)^2 - \left(\alpha'_y\right)^2} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где m - порядок дифракции, λ - длина падающей световой волны, x и y - координаты точки пересечения луча с плоскостью линзы.

Подставляя в первое из соотношений (9) пространственную частоту (2) и вновь вводя векторы ρ, ε перейдем от соотношений (9) к уравнению вида

$$\mathbf{e}' = Q\left(\alpha_z\mathbf{e} + m\mu\psi\mathbf{r}\right) \tag{10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\mu = \lambda/\lambda_0 \\ &\psi = \Phi_0 + \sum_{l=1}^{\infty} b_{2l+1}\left(2u\right)^l \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

а величина

$$Q = 1/\alpha'_z = \sqrt{1+\left(\varepsilon'\right)^2} \tag{12}$$

Из структуры соотношений (10)-(12) видно, что после разложения в степенные ряды уравнение (10) приводится к виду (8), а выражение (12) - к ряду, содержащему величины нулевого и четного порядков:

$$Q = Q^{(0)} + Q^{(2)} + Q^{(4)} + \ldots \tag{13}$$

где $Q^{(0)}=1$.

Путь использования формул (10)-(13) для вычисления компонент различного порядка малости вектора ε' очевиден. По известному определяется компонента $\varepsilon'^{(1)}$, зная последнюю находится $Q^{(2)}$, позволяющая определить компоненту $\varepsilon'^{(3)}$ и т.д.

Обратимся теперь к расчету хода псевдолуча через среду, ограниченную k-й и $(k+1)$-й поверхностями раздела. Зададим луч на входе в среду (после преломления на k-й поверхности) векторами ρ_k и ε_k, а на выходе из среды [в точке падения на $(k+1)$-ю поверхность, но до преломления на ней]-векторами ρ_{k+1} и ε_{k+1}. Если среда является однородной, то наклон луча при прохождении среды не меняется ($\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_k$), а векторы ρ_{k+1} и ρ_k связаны между собой уравнением

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + z_{k,k+1}\mathbf{e}_k \tag{14}$$

Здесь $z_{k,k+1}$ - координата точки выхода луча из среды в системе координат, начало которой лежит в плоскости перпендикулярной оси OZ и проходящей через точку входа луча в среду. Следовательно

$$z_{k,k+1} = d_k + z_{k+1} - z_k \tag{15}$$

где d_k - расстояние между вершинами k -й и $(k+1)$-й поверхностями, z_{k+1} - координата точки пересечения луча с k -й поверхностью в системе координат, связанной с вершиной этой поверхности, и, аналогично, z_{k+1}- координата точки пересечения луча с $(k+1)$-й поверхностью в системе координат, связанной с вершиной $(k+1)$-й поверхности.

Координаты z_k и z_{k+1} можно нетрудно найти, воспользовавшись уравнением сферической поверхности [8]:

$$z = \left(1\sqrt{1-c^2\rho^2}\right)\Big/c\,. \tag{16}$$

Выражения (14)-(16) являются основой для получения формул расчета хода псевдолуча через однородную среду.

Структура выражений (15) и (16) такова, что координата $z_{k,k+1}$ после разложения в ряд приводится к виду (13) с $z^{(0)}_{k,k+1}=d_k$. Это, как и в случае дифракционной линзы, позволяет организовать на основе метода последовательных приближений процесс вычисления компонент различного порядка малости вектора $\boldsymbol{\rho}_{k+1}$, и тем самым определить точку выхода луча из среды в приближении заданного порядка.

Если среда неоднородная и радиально-градиентная, то траектория луча в ней в декартовых координатах описывается системой двух скалярных дифференциальных уравнений [9]:

$$\left.\begin{aligned} &n\frac{d^2x}{dz^2}-\left[1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]\frac{\partial n}{\partial x}=0\\ &n\frac{d^2y}{dz^2}-\left[1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]\frac{\partial n}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

С использованием же вектора эта система приводится к одному векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dz^2}=\left(\frac{1}{2\rho\beta_z^2}\right)\left(\frac{dn^2}{d\rho}\right)\mathbf{r}\,, \tag{18}$$

где β_z - оптический направляющий косинус луча относительно оси Oz, являющийся для радиально-градиентной среды инвариантом [10].

Дифференциальное уравнение (18) можно привести к виду, удобному для интегрирования, выполнив замену переменных и использовав представление показателя преломления, отличное от (1). Независимую переменную z заменим на

$$\varsigma = n_0\tau_1 z/\beta_z \tag{19}$$

а векторные параметры луча $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ - на векторы

$$\mathbf{R}=\tau_1\mathbf{r}\mathbf{E}=d\mathbf{R}/d\varsigma=\left(\beta_z/n_0\right)\mathbf{e}\,, \tag{20}$$

где

$$\tau_1=\sqrt{2\left(n_1\left(/n_0\right.\right.}\,. \tag{21}$$

Профиль показателя преломления представим в виде

$$n^2=n_0^2\left[1+\operatorname{sgn}\left(n_1\right)\mathbf{R}^2+\tau_2\mathbf{R}^4+\tau_3\mathbf{R}^6+\ldots\right] \tag{22}$$

где

$$\operatorname{sgn}\left(n_1\right)=\begin{cases}1 & \text{при } n_1>0\\ 0 & \text{при } n_1=0\\ -1 & \text{при } n_1<0\end{cases} \tag{23}$$

а коэффициенты τ_2, τ_3,... в соответствии с выражением (1) равны

$$\left.\begin{aligned} &\tau_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{n_0n_2}{n_1^2}\right)\\ &\tau_3=-\frac{n_0}{4n_1^2}\left(n_2+\frac{n_0n_3}{n_1}\right)\\ &\ldots\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

После указанной замены переменных дифференциальное уравнение (18) приводится виду

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{d\varsigma^2}-\operatorname{sgn}\left(n_1\right)\mathbf{R}=\mathbf{b} \tag{25}$$

где

$$\mathbf{b}=\left(2\tau_2\mathbf{R}^2+3\tau_3\mathbf{R}^4+\ldots\right)\mathbf{R} \tag{26}$$

В приближении первого порядка малости (параксиальном приближении) правая часть уравнения (25) равна нулю. В этом случае уравнение сводится к хорошо известному однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами, решение которого [8]

$$\mathbf{R}=C\left(\varsigma\right)\mathbf{R}_k+S\left(\varsigma\right)\mathbf{E}_k\,, \tag{27}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &C\left(\varsigma\right)=\begin{cases}\operatorname{ch}\varsigma & \text{при } n_1>0\\ \cos\varsigma & \text{при } n_1\le 0\end{cases}\\ &S\left(\varsigma\right)=\begin{cases}\operatorname{ch}\varsigma & \text{при } n_1>0\\ \sin\varsigma & \text{при } n_1\le 0\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$\mathbf{R}_k$ и $\mathbf{E}_k$ - векторные параметры луча на входе в среду.

Компоненты более высокого порядка параметров луча внутри среды можно получить методом последовательных приближений. В этом случае решение дифференциального уравнения (25) сводится к вычислению интегралов [11]:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{R}=S\int_0^{\varsigma}C\mathbf{b}d\varsigma-C\int_0^{\varsigma}S\mathbf{b}d\varsigma\\ &\mathbf{E}=C\int_0^{\varsigma}C\mathbf{b}d\varsigma+S\int_0^{\varsigma}S\mathbf{b}d\varsigma\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Входящие в выражения (29) интегралы были вычислены в приближении пятого порядка в работах [11,12] и в приближении седьмого порядка в работе [13]. Используя результаты этих работ, а также следуя пути, предложенному выше для определения точки выхода псевдолуча из однородной среды, определяют компоненты различных порядков малости векторов $\mathbf{R}_{k+1}$ и $\mathbf{E}_{k+1}$ на выходе из неоднородной среды. После того как найдены эти компоненты, с помощью соотношений (20) осуществляют обратный переход к векторам $\boldsymbol{\rho}_{k+1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}$, т.е. тем самым находят компоненты различных порядков выходных параметров псевдолуча из радиально-градиентной среды, ограниченной сферическими поверхностями.

Список литературы

1 Sands P.J. // J. Opt. Soc. Am.. 1970. V.60. N.11. P.1436-1443.

2 Fantone S.D. // J. Opt. Soc. Am. 1983. V.73. N.9. P.1149-1161.

3 Buchdahl H.A. Optical Aberration Coefficients. NY., 1969.

4 Бутусов М.М., Грейсух Г.И., Степанов С.А. // Опт. и спектр.1984. Т.56. Вып.4. С.752-754.

5 Герцбергер М. Современная геометрическая оптика. М., 1962. 487с.

6 Грейсух Г.И., Ефименко И.М., Степанов С.А, Оптика градиентных и дифракционных элементов. М., 1990. 136 с.

7 Бобров С.Т., Грейсух Г.И., Туркевич Ю.Г. Оптика дифракционных элементов и систем. Л., 1986. 223 с.

8 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1977. 832 с.

9 Moore D.T. // J. Opt. Soc. Am. 1975. V.65. N.4. P.451-455.

10 Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М., 1984. 512 с.

11 Marchand E.W. // Appl. Opt. 1985. V.24. N.24. P.4371- 4374.

12 Marchand E.W. // Appl.Opt. 1988. V.27. N.3. P.465-467.

13 Bociort F., Kross J. // SPIE. 1992. V.1780. Lens and Optical Design. P.216-225.