Котляр В.В., Панков И.А., Сойфер В.А.

МЕТОД РАСЧЕТА ФУНКЦИИ РЕЛЬЕФА ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ РЭЛЕЯ.

Введение

Отражательные дифракционные решетки (ДР) используются во многих прикладных задачах оптики. В лазерной технике ДР используются для измерения мощности лазерных пучков как неискажающие структуру пучка ответвители излучения [1]. Их также используют как дифракционные поляризаторы для поворота вектора поляризации лазерных [2] или СВЧ [3] пучков. В задачах оптической обработки информации ДР используются в качестве многоканальных осветителей, которые мультиплицируют лазерный пучок на N пучков равной интенсивности [4]. К проблеме расчета светового поля, отраженного от дифракционной решетки (прямая задача дифракции) имеется несколько подходов разной степени сложности и точности: методы строгого решения электромагнитных уравнений Максвелла с соответствующими граничными условиями [5]; метод решения уравнений связанных волн [6]; метод Рэлея [7] и метод скалярной дифракции Кирхгофа [8].

В данной работе в рамках плосковолнового представления дифрагировавших волн (метод Рэлея) рассматривается обратная задача дифракции, в которой требуется найти функцию рельефа ДР по заданному распределению интенсивности света между дифракционными порядками. Приближение Рэлея дает наиболее точные результаты при условии, что максимальная высота h и период d рельефа решетки связаны с длиной волны света λ следующими неравенствами [9]: $d \le 15\lambda, h \le 1.5\lambda$.

1. Метод Рэлея.

В этом разделе, следуя [10], кратко рассмотрено получение амплитуды дифрагировавшего на решетке света в приближении Рэлея. На рис.1 показана оптическая схема описываемой ситуации. Плоская волна света с комплексной амплитудой $\psi_i(x,y)$ падает под углом Θ_0 на идеально отражающую ДР, профиль которой изменяется с периодом d вдоль оси x и не изменен вдоль оси z (эта ось направлена перпендикулярно рис.1):

$$\psi_i(x,y) = \exp\left\{ik\left(x\sin\Theta_0 - y\cos\Theta_0\right)\right\}, \qquad (1)$$

где л=2π/λ-волновое число света.

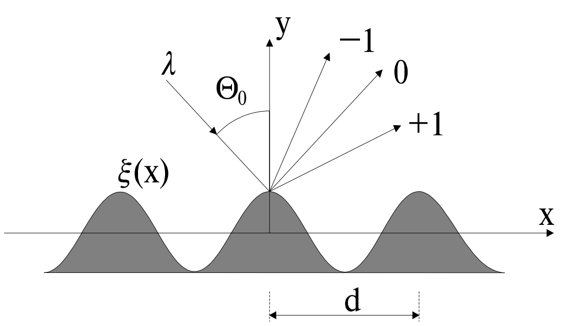


Рис.1.Схема отражения плоской волны от поверхности решетки

Ограничимся рассмотрением случая ТЕ-поляризации, для которого электрический вектор плоской волны направлен вдоль оси z, а магнитный лежит в плоскости падения (x, y).

Полное световое поле $\psi(x,y)$ в полупространстве над решеткой (при $y>\max[\xi(x)]$, $\xi(x)$-функция профиля решетки) удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\psi\left(x,y\right) + k^2\psi\left(x,y\right) = 0 \qquad (2)$$

с граничными условиями для идеально отражающей поверхности

$$\psi\left(x,y\right)\Big|_{y=\xi(x)} = 0\,. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что дифрагирующее на решетке световое поле удовлетворяет условию

$$\psi\left(x,y\right) = \psi_d\left(x,y\right) + \psi_i\left(x,y\right), \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}&\psi_d\left(x,y\right)\Big|_{y=\xi(x)} = \\ &= -\exp\left\{ik\left(x\sin\Theta_0 - \xi\left(x\right)\cos\Theta_0\right)\right\}\end{aligned}. \qquad (5)$$

Так как функция решетки периодическая: $\xi(x+d) = \xi(x)$, а функция, стоящая справа в уравнении (5) является квазипериодической, то следующая функция должна быть также периодической по x:

$$V\left(x,y\right) = \psi_d\left(x,y\right)\exp\left\{-ikx\sin\Theta_0\right\}. \qquad (6)$$

Функцию (6) можно разложить в ряд Фурье:

$$V\left(x,y\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n\left(y\right)\exp\left\{2\pi i\frac{nx}{d}\right\}. \qquad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) следует плосковолновое представление для амплитуды дифрагировавшего поля:

$$\psi_d\left(x,y\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n\left(y\right)\exp\left\{ik\alpha_n x\right\} \qquad (8)$$

где $\alpha_n = \sin\Theta_0 + n\dfrac{\lambda}{d}$.

Подставив уравнение (8) в уравнение Гельмгольца, получим выражение:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{d^2V_n\left(y\right)}{dy^2} + k^2\beta_n^2V_n\left(y\right)\right]\exp\left\{2\pi i\frac{nx}{d}\right\} = 0\,, \qquad (9)$$

из которого следуют уравнения для функций $V_n(y)$:

$$\frac{d^2V_n\left(y\right)}{dy^2} + k^2\beta_n^{\,2}V_n\left(y\right) = 0\,, \qquad (10)$$

где $\beta_n^{\,2} = 1 - \alpha_n^{\,2}$.

Решение уравнения (10) имеет вид:

$$V_n\left(y\right) = B_n\exp\left\{ik\beta_n y\right\}. \qquad (11)$$

Уравнение (8) с учетом (11) приводит к следующему виду разложения дифрагировавшего поля по плоским волнам при $y > \max[\xi(x)]$:

$$\psi_d\left(x,y\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n\psi_n\left(x,y\right), \qquad (12)$$

$$\psi_n\left(x,y\right) = \exp\left\{ik\left(\alpha_n x + \beta_n y\right)\right\}. \qquad (13)$$

Заметим, что сумма (12) содержит как однородные плоские волны (при $\alpha_n^2 < 1$), так и неоднородные волны, экспоненциально затухающие вдоль оси y при условии $\alpha_n^2 > 1$.

Гипотеза Рэлея состоит в том, что разложение поля (12) верно не только при $y > \max[\xi(x)]$, но и при y ≥ ξ(x). При этом из уравнений (5) и (12) получим выражение для поиска коэффициентов B_n:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n\psi_n\left(x,\xi\left(x\right)\right) = -\psi_i\left(x,\xi\left(x\right)\right). \tag{14}$$

При ограничении числа дифрагировавших порядков $-N < n < N$ и при выборе последовательности точек x_m уравнение (14) приводит к линейной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных B_n:

$$\sum_{n=-N}^{N} B_n\psi_{nm} = -\psi_{im}\ , \tag{15}$$

где $\psi_{nm} = \psi_n(x_m,\xi(x_m))$, $\psi_{im} = \psi_i(x_m,\xi(x_m))$.

2. Алгоритм расчета рельефа решетки.

В этом разделе рассматривается обратная задача и приводится итеративный алгоритм расчета функции ξ(x) по заданным модулям коэффициентов B_n. Квадраты модулей коэффициентов $|B_n| = I_{n0}$ представляют собой интенсивности дифрагировавших порядков, которые требуется сформировать. Эту задачу предлагается решать следующим образом. Из уравнения (14) видно, что функция $\psi_d(x,y)$ должна быть только фазовой при $y = \xi(x)$: $|\psi_d(x,\xi(x))|=|\psi_i(x,\xi(x))|=1$. Пользуясь неопределенностью аргументов комплексных коэффициентов B_n суммы (12), можно итеративным способом рассчитать дифрагировавшее поле, которое бы имело единичный модуль в прямоугольной области: $-d/2<x<d/2$, $-\lambda/2<y<\lambda/2$. Алгоритм расчета сходен с известным алгоритмом Герчберга-Секстона [11] и имеет следующие шаги.

1. Пусть на p-ом шаге итераций оценка функции дифрагировавшего поля имеет вид

$$\psi_d^{(p)}\left(x,y\right) = \exp\left\{iQ_p\left(x,y\right)\right\}. \tag{16}$$

2. Функция (16) разлагается в ряд по ортогональным функциям (13), коэффициенты которого находятся по формулам:

$$B_n^{(p)} = \frac{1}{\lambda d}\int_0^d\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \exp\left\{iQ_p\left(x,y\right) - -ik\left(\alpha_n x+\beta_n y\right)\right\}dxdy \tag{17}$$

3. Рассчитанные коэффициенты B_n видоизменяются с учетом заданных значений интенсивности порядков:

$$\overline{B}_n^{(p)} = \sqrt{I_{n0}}\exp\left\{i\arg\left(B_n^{(p)}\right)\right\}. \tag{18}$$

4. Следующая оценка фазы функции дифрагировавшего поля находится по формуле

$$Q_{p+1}\left(x,y\right) = \arg\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{B}_n^{(p)}\exp\left[ik\left(\alpha_n x+\beta_n y\right)\right]\right\} \tag{19}$$

5. Далее следует переход к первому пункту и т. д.

Можно показать, что этот алгоритм будет сходиться в среднем, то есть для любого номера p выполняется неравенство

$$\int_0^d\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}\left[\left(\psi_d^{(p+1)}\left(x,y\right)\right)-1\right]^2 dxdy \le \le \int_0^d\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}\left[\left(\psi_d^{(p)}\left(x,y\right)\right)-1\right]^2 dxdy \tag{20}$$

Пусть при достаточном числе шагов среднее квадратичное отклонение δ достигло заданного значения δ_0:

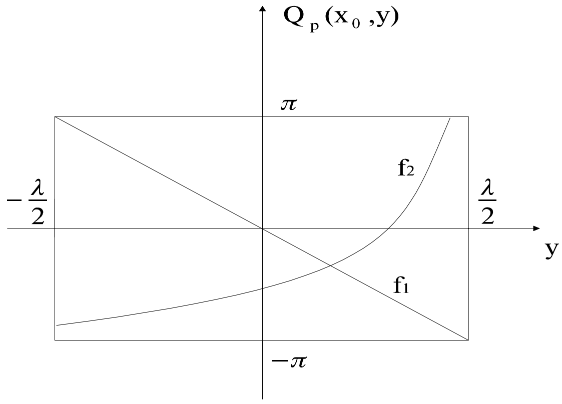


Рис. 2. Графическое решение уравнения(22)

$$\delta_p = \frac{1}{\lambda d}\sqrt{\int_0^d\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}\left[\left(\psi_d^{(p)}\left(x,y\right)\right)-1\right]^2 dxdy} \le \delta_0, \tag{21}$$

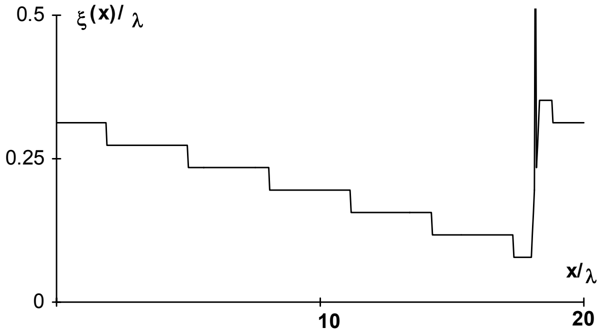
тогда, исходя из уравнения (14) можно записать уравнение для поиска функции рельефа ξ(x):

$$Q_p\left(x,\xi\left(x\right)\right) = \pi + k\alpha_0 x - k\beta_0\xi\left(x\right) \tag{22}$$

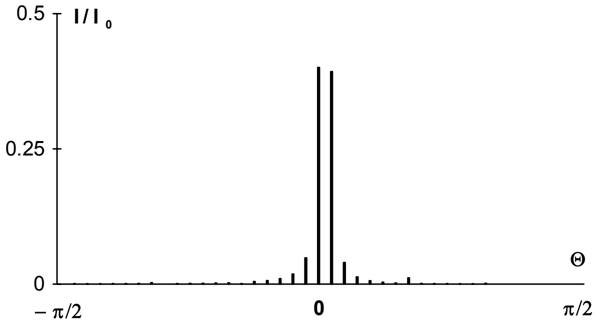
где $Q_p(x,\xi(x))$ - рассчитанная на p-ой итерации фаза дифрагировавшего поля $\psi_d(x,y)$. На рис.2 показано, что решение уравнения (22) при $\Theta_0 = 0$ ($\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$) и для любой точки x_0 находится из пересечения прямой $f_1(y)=-2\pi/\lambda$ и кривой $f_2\left(y\right) = Q_p\left(x_0,y\right) - \pi$.

3.Численные результаты.

На рис.3-6 приведены рассчитанные описанным выше методом рельефы одного периода дифракционных решеток $h = \xi\left(x\right)$ рассеивающих падающую плоскую волну в заданных направлениях а) и угловое распределение нормированной интенсивности рассеянного на этих решетках поля полученное в результате расчета с помощью интеграла Кирхгофа б). Расчеты были проведены для нормально падающей плоской волны (длина волны λ) период рассчитываемой решетки T = 20λ. При расчете задавались несколько порядков одинаковой интенсивности: 0, 1 (рис.3б); -1, 1 (рис.4б); 0, 1 (рис.5б) и 0, 1, 2 (рис.6б).

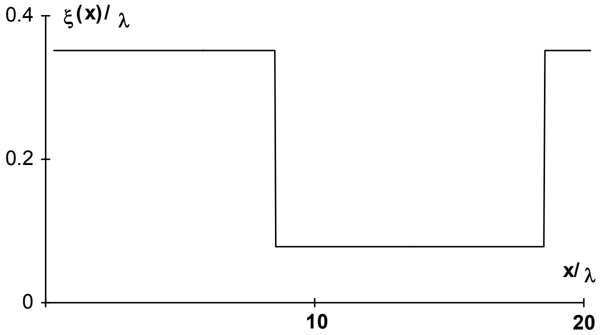


а)

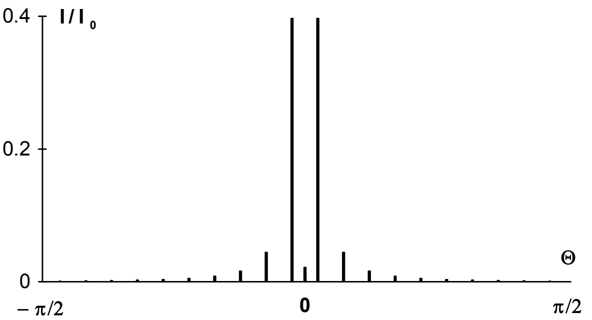


б)

Рис.3. Функция периода двухпорядковой (несимметричной) решетки а) и угловое распределение нормированной интенсивности рассеянного света б)

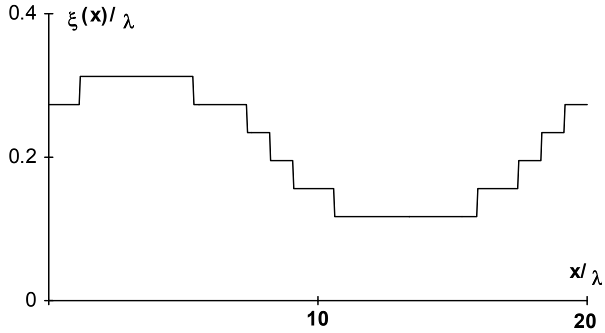


а)

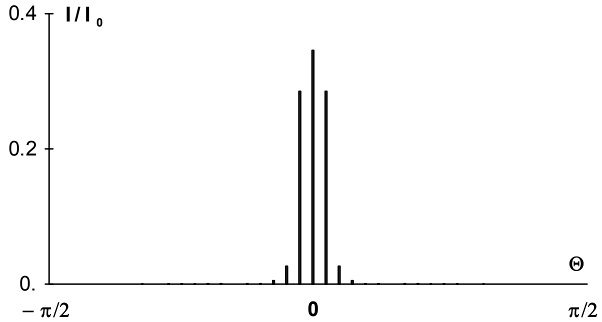


б)

Рис.4. Функция периода двухпорядковой (симметричной) решетки а) и угловое распределение нормированной интенсивности рассеянного света б)

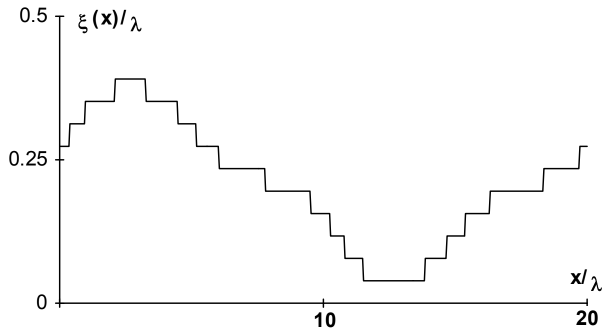


а)

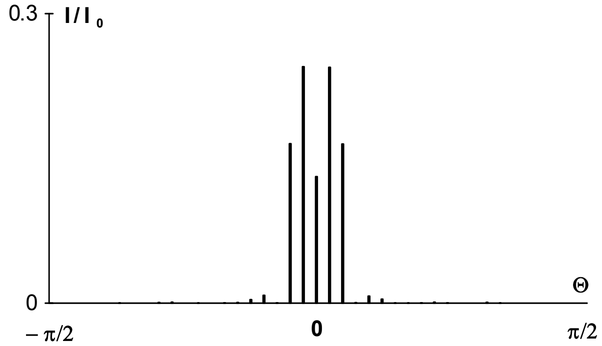


б)

Рис.5. Функция периода трехпорядковой (симметричной) решетки а) и угловое распределение нормированной интенсивности рассеянного света б).



а)



б)

Рис.6. Функция периода пятипорядковой (симметричной) решетки а) и угловое распределение нормированной интенсивности рассеянного света б).

Из рисунков видно что предложенный метод позволяет рассчитывать решетки, создающие заданное количество распространяющихся в заданных направлениях дифракционных порядков, но распределение энергии между ними не всегда точно соответствует заданному.

Литература.

1 Апполонов В.В., Бочкарев Е.Л., Заславский В.Я. и др. Ответвитель лазерного пучка на дифракционной решетке. //pp Квантовая электроника, 1979, т. 6, N 3, с. 615-618

2 Haidner H., Kipher P., Sheridan J.T. et al. Polarizing reflection grating beamsplitter for 10.6 μm wavelength. // Opt. Eng., 1993, v. 32, N 8, p. 1860-1865

3 Sweeney D.W., Gallagher N.C. Multi-element microwave computer generated holograms. // Proc. SPIE, 1988, v. 884, p. 114-119

4 Vassara A., Taghizadeh M.R., Turunen J. et al. Binary surfase-relief gratings for array illumination in digital optics. // Appl. Opt., 1992, v. 31, N 7, p. 3320-3336

5 Electromagnetic theory of graitings: Topics in current physics, v. 22, Ed. by R. Petit, N.Y.: Springer-Verlag, 1980

6 Moharam M.G., Gaylord T.K. Rigorous coupled-wave analysis of metallic surfase-relief gratings. // J. Opt. Soc. Am. A, 1986, v. 3, N 11, p. 1780-1787

7 Hugonin J.P., Petit R., Cadilhac M. Plane wave expansions used to describe the field diffracted by a grating. // J. Opt. Soc. Am. A, 1981, v. 71, N 5, p. 593-597

8 Бреховских Л.М. Дифракция волн на шероховатой поверхности. // ЖЭТФ, 1952, т. 23, N 3, с. 275-304

9 Vanden Berg P.M., Fokkema J.T. The Rayleigh hypothesis in the theory of reflection by a grating. // J. Opt. Soc. Am., 1979, v. 69, N 1, p. 27-31

10 Смокий О.И., Фабриков В.А. Методы теории систем и преобразований в оптике, Ленинград, Наука, 1989

11 Gerchberg R.W., Saxton W.O. A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures. // Optik, 1972, v. 35, N 2, p. 237-246.