
Досколович Л.Л., Петрова О.И., Соيفер В.А., Харитонов С.И.

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА МНОГОПОРЯДКОВЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК В ПРИБЛИЖЕНИИ РЭЛЕЯ

1. Введение.

Многопорядковые дифракционные решетки (ДР), преобразующие освещающий пучок в N пучков с заданной интенсивностью, широко используются как светоделительные и мультиплицирующие устройства [1-3].

Для расчета отраженного от ДР поля известно несколько подходов разной степени сложности и точности. Строгий подход к расчету отраженного поля состоит в решении краевой задачи для уравнений Максвелла [4]. Сложность решения указанной задачи не позволяет строить эффективные итерационные процедуры для решения обратной задачи, состоящей в расчете профиля рельефа ДР из условия формирования заданного набора дифракционных порядков с требуемой интенсивностью. Наиболее часто обратная задача решается в скалярном приближении Кирхгофа. В этом случае для расчета профиля многопорядковых ДР разработаны эффек-

тивные итерационные и градиентные алгоритмы [5-7]. Однако, приближение Кирхгофа справедливо только при $d \gg \lambda$, где d -период решетки, λ -длина волны освещающего пучка. Промежуточное положение между приближением Кирхгофа и строгим решением краевой задачи для уравнений Максвелла занимает метод Рэлея [4]. Метод Рэлея, по сравнению с методом Кирхгофа, более точен. При гладком профиле рельефа с малой по сравнению с периодом d высотой, метод Рэлея остается справедливым даже при значениях d , сравнимых с длиной волны [4].

В данной работе предлагается градиентный метод расчета профиля рельефа многопорядковой идеально отражающей ДР в приближении Рэлея. Метод обобщает известные градиентные алгоритмы расчета ДР в приближении Кирхгофа. Расчет многопорядковых ДР в приближении Кирхгофа является частным случаем разработанного метода при $d \gg \lambda$.

2. Метод Рэлея.

Рассмотрим идеально отражающую дифракционную решетку с периодом d , описываемую цилиндрической поверхностью $y=f(x)$ (Рис.1). Решетка освещается падающей под углом θ_0 плоская волной с комплексной амплитудой

$$u_i(x, y) = \exp(ik(x \sin(\theta_0) - y \cos(\theta_0))) \quad (1)$$

где $k=2\pi/\lambda$, λ -длина волны .

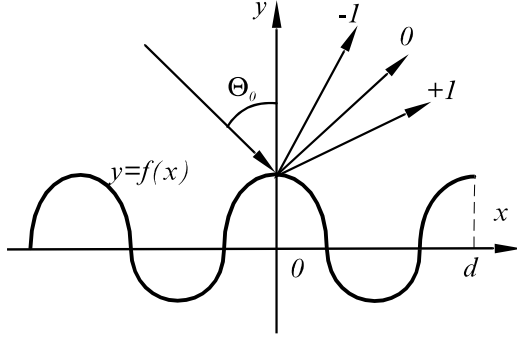


Рис. 1.

Скалярная функция $u_i(x,y)$ в (1), соответствует компоненте E_z электрического поля падающей плоской волны для случая ТЕ поляризации или компоненте H_z магнитного поля для случая ТМ поляризации. Полное поле $u(x,y)=u_i(x,y) +u_d(x,y)$, где $u_d(x,y)$ - дифрагировавшее на решетке поле, при $y>f(x)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (2)$$

с граничным условием

$$u(x, y)|_{y=f(x)} = 0 \quad (3)$$

для случая ТЕ поляризации и граничным условием

$$\frac{du(x, y)}{dn} \Big|_{y=f(x)} = 0 \quad (4)$$

для случая ТМ поляризации, где \mathbf{n} - единичный вектор нормали к профилю решетки.

Дифрагировавшее поле $u_d(x,y)$ вне решетки (т.е. при $y>a$, $a=\max[f(x)]$) может быть представлено в виде разложения по плоским волнам [4]:

$$u_d(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp(ik(\alpha_n x + \beta_n y)) \quad (5)$$

где

$$\alpha_n = \sin(\theta_0) + n \frac{\lambda}{d}, \quad (6)$$

$$\beta_n = \sqrt{1 - \alpha_n^2} \quad (7)$$

Отметим, что сумма (5) содержит как однородные плоские волны ($\alpha_n^2 < 1$), так и неоднородные ($\alpha_n^2 > 1$), экспоненциально затухающие с ростом y плоские волны. В приближении Рэлея предполагается, что разложение (5) остаются верным и внутри

штрихов, т.е. при $f(x) \leq y \leq a$. В этом случае коэффициенты Рэлея R_n в (5) определяются из граничных условий (3), (4). Рассмотрим для определенности случай ТЕ поляризации. Подставляя (1), (5) в (3), получим для коэффициентов R_n следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp(ik((\alpha_n - \alpha_0)x + \\ + (\beta_n - \beta_0)y)) = \\ = -\exp(-2ik\beta_0 y) \end{aligned} \quad (8)$$

Правая и левая части уравнения (8) являются периодическими функциями с периодом d . Заменяем уравнение (8) условием равенства коэффициентов Фурье в разложении правой и левой частей уравнения (8). В результате для определения R_n получим следующую бесконечную линейную систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{pn} R_n = B_p, p = -\infty, \infty \quad (9)$$

где

$$A_{pn} = \int_0^{2\pi} \exp(i\xi(n-p) + i(\beta_n - \beta_0)H(\xi)) d\xi \quad (10)$$

$$B_p = - \int_0^{2\pi} \exp(-2i\beta_0 H(\xi) - ip\xi) d\xi \quad (11)$$

$$H(\xi) = kf\left(\frac{\xi d}{2\pi}\right) - \quad (12)$$

-нормированная высота.

На практике для расчета R_n , $n=-N, N$ используется конечная система из $2N+1$ уравнений:

$$\mathbf{AR} = \mathbf{B} \quad (13)$$

где $\mathbf{A} = (A_{pn})_{-N}^N$, $\mathbf{R} = (R_n)_{-N}^N$, $\mathbf{B} = (B_n)_{-N}^N$

При $d \gg \lambda$ приближение Рэлея переходит в приближении Фраунгофера. Действительно, при $d \gg \lambda$ ($\beta_n - \beta_0 \approx 0$) и матрица \mathbf{A} в (13) становится диагональной. При этом коэффициенты Рэлея R_n , $n=-N, N$ переходят в коэффициенты Фурье в разложении функции $\exp(i\varphi(x))$, где функция

$$\varphi(x) = -2\beta_0 H(x) + \pi \quad (14)$$

описывает изменение направления и набег фазы при отражении плоской волны от решетки с высотой $H(x)$.

3. Градиентный метод.

Рассмотрим обратную задачу расчета профиля решетки из условия формирования заданной интенсивности дифракционных порядков \tilde{I}_n , $n = -M, M$ ($\sum_{n=-M}^M \tilde{I}_n = 1$). Для удобства выкладки для описания профиля решетки будем ис-

пользовать функцию $H(x)$ (12). Под интенсивностями дифракционных порядков следует понимать следующие нормированные значения квадратов модулей коэффициентов Рэлея [4]:

$$I_n = |R_n|^2 \frac{\beta_n}{\beta_0}, \left(\sum_{n \in U} I_n = 1 \right) \quad (15)$$

где U - множество индексов, соответствующих распространяющимся однородным волнам;

$$U = \{n(\alpha_n^2 < 1)\}.$$

Для построения градиентной процедуры расчета профиля решетки $H(x)$ введем некоторый функционал $\varepsilon(H)$, характеризующий отличие расчетных интенсивностей порядков I_n от требуемых значений \tilde{I}_n :

$$\varepsilon(H) = \varepsilon(\mathbf{I}(H), \tilde{\mathbf{I}}) \quad (16)$$

где \mathbf{I} и $\tilde{\mathbf{I}}$ - вектора расчетных и заданных дифракционных порядков. Отметим, что компоненты вектора \mathbf{I} также являются функционалами от профиля решетки $H(x)$.

Градиентная минимизация функционала (16) состоит в итерационной коррекции функции $H(x)$ согласно правилу:

$$H_{n+1}(x) = H_n(x) - t \cdot \varepsilon'(x) \quad (17)$$

где n - номер итерации, t - шаг градиентного метода, $\varepsilon'(x)$ -градиент функционала. Для вычисления градиента $\varepsilon'(x)$ рассмотрим приращение функционала $\varepsilon(H)$, вызванное малым приращением высоты $\Delta H(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon(H) &= \varepsilon(H + \Delta H) - \varepsilon(H) = \\ &= \sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \Delta I_j(H) \end{aligned} \quad (18)$$

Согласно (15)

$$\Delta I_j(H) = 2 \frac{\beta_j}{\beta_0} \operatorname{Re}(\Delta R_j(H) R_j^*(H)) \quad (19)$$

Вектор приращений $\Delta \mathbf{R}(H) = (\Delta R_j(H))_{-N}^N$ может быть получен из (13) в виде:

$$\Delta \mathbf{R}(H) = \mathbf{A}^{-1} \int_0^{2\pi} i \Delta H(\xi) \times (\tilde{\mathbf{B}}(\xi) - \tilde{\mathbf{A}}(\xi) \cdot \mathbf{R}) d\xi \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(\xi) &= (\tilde{A}_{pn}(\xi))_{-N}^N, \tilde{A}_{pn}(\xi) = \\ &= \exp(i\xi(n-p) + i(\beta_n - \beta_0)H(\xi))(\beta_n - \beta_0) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}(\xi) &= (\tilde{B}_p(\xi))_{-N}^N, \\ \tilde{B}_p(\xi) &= 2\beta_0 \exp(-2i\beta_0 H(\xi) - ip\xi) \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя соотношения (19)-(22) в (18) получим приращение функционала $\varepsilon(H)$ в виде:

$$\Delta \varepsilon(H) = - \int_0^{2\pi} \Delta H \cdot 2 \operatorname{Im} \times \quad (23)$$

$$\times (\mathbf{A}^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}(\xi) - \tilde{\mathbf{A}}(\xi) \cdot \mathbf{R}), \tilde{\mathbf{R}}) d\xi$$

где

$$\tilde{\mathbf{R}} = (\tilde{R}_j)_{-N}^N, \tilde{R}_j = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \frac{\beta_j}{\beta_0} R_j \quad (24)$$

Согласно (23) градиент функционала имеет вид:

$$\varepsilon'(x) = -2 \cdot \operatorname{Im} \times (\mathbf{A}^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}(x) - \tilde{\mathbf{A}}(x) \cdot \mathbf{R}), \tilde{\mathbf{R}}) \quad (25)$$

Выше показано, что при $d \gg \lambda$ приближение Рэлея переходит в приближении Фраунгофера для которого коэффициенты Рэлея соответствуют коэффициентам Фурье в разложении функции $\exp(i\varphi(x))$:

$$R_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\varphi(\xi) - ip\xi) d\xi \quad (26)$$

где $\varphi(x)$ - функция фазового набег (14).

Полагая при $d \gg \lambda$ в (10), (21), (24), (25) $\beta_n = \beta_0$ получим следующее выражение для градиента функционала:

$$\varepsilon'_F(x) = -2 \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2\pi} \tilde{\mathbf{B}}(x), \hat{\mathbf{R}} \right) \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} &= (\hat{R}_j)_{-N}^N, \\ \hat{R}_j &= \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \frac{1}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} \exp(i\varphi(\xi) - ij\xi) d\xi \end{aligned} \quad (28)$$

Полученные выражения (27), (28) совпадает с выражением для градиента функционала (16) для расчета решеток в приближении Фраунгофера[8]. Отметим, что указанный результат имеет место и для случая ТМ поляризации.

Приведенная связь градиентных алгоритмов позволяет рассматривать широко используемые градиентные алгоритмы синтеза решеток в приближении Фраунгофера как частный случай более общего градиентного алгоритма (17), (25), основанного на приближении Рэлея.

4. Результаты расчетов.

Предложенный градиентный метод (17), (25) был применен к расчету решеток с разным числом $2M+1$ порядков с равной интенсивностью. В качестве функционала невязки был использован следующий квадратичный функционал:

$$\varepsilon(H) = \sum_{j=-M}^M (I_j(H) - \tilde{I}_j)^2 \quad (29)$$

Шаг градиентного метода t в (17) определялся из условия минимума функции, являющейся линейной аппроксимацией функционала $\varepsilon(H)$ вдоль направления антиградиента. В качестве начального

приближения использовался косинусоидальный профиль $f(x) = A \cdot \cos(2\pi x/d)$.

На Рис. 2-4 приведены расчетные профили и интенсивности дифракционных порядков для трехпорядковой (рис.2), пятипорядковой (рис.3) и семипорядковой (рис.4) дифракционных решеток с периодами 3.2λ , 5.2λ и 5.2λ соответственно. Расчет проводился для случая нормального падения плоской волны ($\theta_0 = 0$).

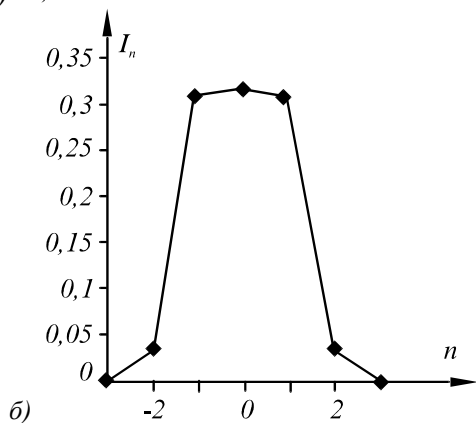
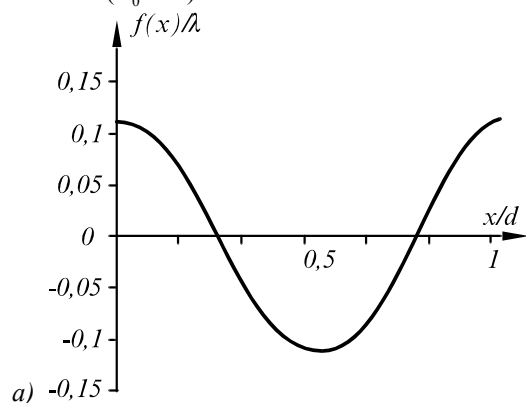


Рис. 2.

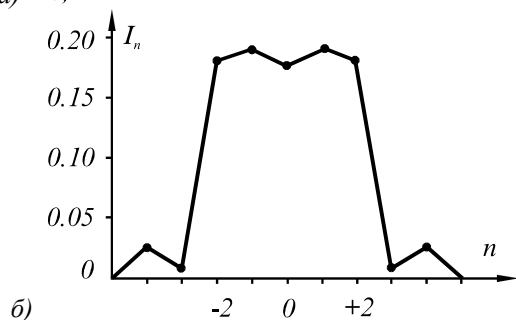
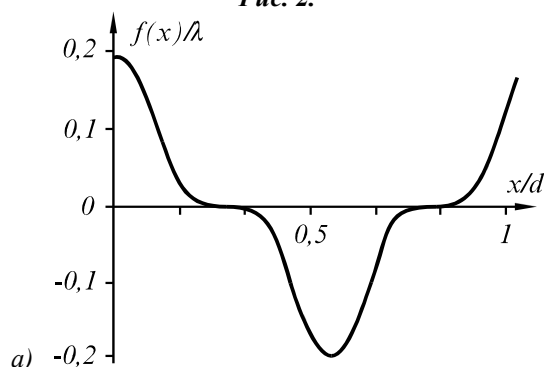


Рис. 3.

Для приведенных примеров значения энергетической эффективности $E = \sum_{j=-M}^M I_j$ и среднеквад-

ратичной ошибки δ распределения интенсивности в порядках от требуемых значений составили 93.1% и 0% для трехпорядковой решетки (рис.2), 96.6% и 3.1%, для пятипорядковой решетки (рис.3) и 96.4% и 4.6% для семипорядковой решетки (рис.4).

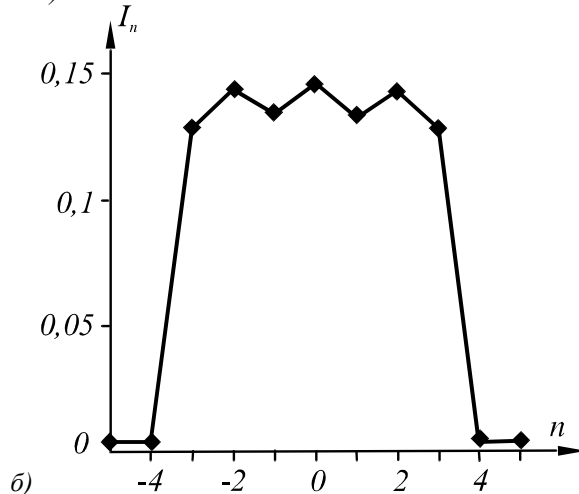
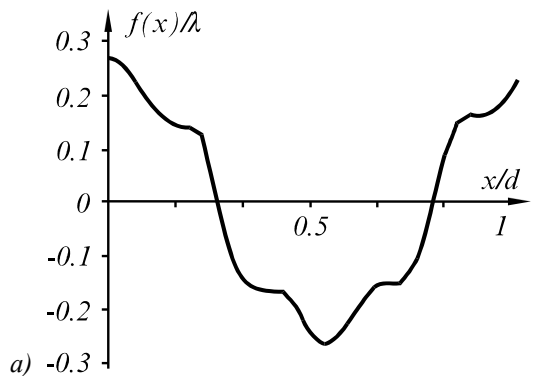


Рис. 4.

Результаты проведенных расчетов демонстрируют высокую работоспособность предложенного метода.

Литература.

- [1] Vassara A., Taghizaden M.R., Turunen J et all. Binary surface-relief gratings for array illumination in digital optics.// *Appl. Opt.*, 1992, v.31, N 7, pp.3320-3336.
- [2] Morrison R.L., Walker S.L., Cloonan T.J. Beam array generation and holographic interconnections in a free-space optical network.// *Appl. Opt.*, 1993, v.32, pp.2512-2518.
- [3] Mait J.N. Design of binary phase and multi-phase Fourier gratings for array generation.// *JOSA A*, 1990, v.7, N 8, pp.1514-1528.
- [4] *Electromagnetic Theory of Gratings: Topics in current physics*, v.22, Ed. by R.Petit, N.Y.: Springer-Verlag, 1980.
- [5] Gerchberg R.W., Saxton W.O. A practical algorithm for the determination of the phase from im-

age and diffraction plane pictures.// *Optik*, 1972, v.35, N 2, pp.237-246.

[6] J.R.Fienup Phase retrieval algorithms: a comparison.// *Appl. Opt.*, 1982, v.21, N 15, pp.2758-2769.

[7] Doskolovich L.L., Soifer V.A., Alessandretti G., Perlo P., Repetto P. Analytical initial approximation

for multiorder binary gratings design.// *Pure&Appl.Opt.*, 1994, v.3, pp.921-930.

[8] *Iterative methods for diffraction optical elements computation*. V.Soifer, V.Kotlyar, L.Doskolovich, Taylor&Francis LTD, 1996 (accepted for publication).