В.В. Котляр, П.Г. Серафимович, В.В. Сойфер

ГРАДИЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ДОЭ С НАЛОЖЕННЫМИ НА ФАЗОВУЮ ФУНКЦИЮ ОГРАНИЧЕНИЯМИ И С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ

Задача расчета дифракционных оптических элементов (ДОЭ) с квантованной фазой сформулирована как задача минимизации функционала с ограничениями. Рассмотрена возможность регуляризации алгоритма. Приведено численное сравнение результатов работы алгоритма для градиентного и итеративного (по типу алгоритма Герчберга-Сэкстона) способов минимизации функционала.

Введение

ДОЭ - это тонкая фазовая пластинка с микрорельефом, которая при освещении ее лазерным светом формирует с высокой эффективностью в заданной плоскости пространства требуемое распределение интенсивности.

Имеется много методов расчета ДОЭ с полутоновой фазой [1-3]. Однако с точки зрения существующих технологий изготовления ДОЭ важно уметь рассчитывать ДОЭ с фазовой функцией имеющей небольшое число (2-5) уровней квантования.

В данной работе предложен и обоснован итеративный алгоритм расчета ДОЭ, который минимизирует критерий, состоящий из функционала невязки и функционала ограничений с регуляризацией произвольного порядка.

Градиентный алгоритм

Для решения задачи расчета ДОЭ необходимо решить нелинейное интегральное уравнение вида

$$I_0(u) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x)\exp\left[i\varphi(x)\right]\exp\left[i2\pi xu\right]dx \right|^2, \qquad (1)$$

где $A_0(x)$ - амплитуда света, освещающего ДОЭ; $\varphi(x)$ - искомая фаза ДОЭ; $I_0(u)$ - требуемое распределение интенсивности, которое должен сформировать ДОЭ в плоскости изображения.

Показано [2], что алгоритм Герчберга-Сэкстона (ГС), широко применяемый для решения уравнения (1), является градиентным методом с неоптимальным выбором шага и минимизирует функционал невязки:

$$E_0(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} W(u)\left[\left|G_n(u)\right| - \left|F(u)\right|\right]^2 du, \qquad (2)$$

где $W(u)$ - весовая действительная функция, $\left(F(u)\right(= I_0^{1/2}(u)$ - заданная амплитуда в плоскости изображения, а

$$\begin{aligned} G_n(u) &= \Im[g_n(x)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x)\exp\left[i\varphi_n(x)\right]\exp\left[i2\pi xu\right]dx \end{aligned} \qquad (3)$$

- текущее приближение к ней на n-й итерации,
$\Im$ - обозначение Фурье-преобразования.

Процессу сходимости алгоритма ГС присущ эффект стагнации, поэтому целесообразно использовать один из градиентных методов с точным вычислением градиентного шага. В градиентном методе минимизации функционала (2) реализуется итеративный процесс вида

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - s_n\nabla E_0, \qquad (4)$$

где $\varphi_n(x)$ - приближение искомой фазовой функции на n-й итерации, $\nabla E_0 = \dfrac{\partial E_0}{\partial\varphi_n(x)}$ - градиент функционала (2) на n-й итерации, S_n - длина шага.

В [2] показано, что для функционала (2) имеет место следующее выражение для градиента:

$$\nabla E_0 = -2A_0(x)\left|g_n'(x)\right|\sin[\varphi_n(x) - \arg(g_n(x))], \qquad (5)$$

где

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \Im^{-1}[G_n'(u)], \\ G_n'(u) &= \\ &= W(u)[G(u) - \left|F(u)\right|G_n(u)\left|G_n(u)\right|^{-1}] \end{aligned} \qquad (6)$$

В [2] была определена длина шага s_n при допущении, что

$$E_0(s_n) = E_0(\varphi_n + s_n\nabla E_0)$$

- линейная функция:

$$s_n = E_0(\varphi_n(x))\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\nabla E_0\right)^2 dx\right]^{-1}, \qquad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\nabla E_0\right)^2 dx &= 4\int_{-\infty}^{\infty} A_0^2(x)\left|g_n'(x)\right|^2 \times \\ &\times \sin^2[\varphi_n(x) - \arg(g_n(x))]dx \end{aligned} \qquad (8)$$

Расчет ДОЭ с квантованной фазой

Для решения задачи расчета ДОЭ с квантованной фазой сформируем вспомогательный функционал, который назовем функционалом ограничений *B*. Для этого воспользуемся результатом, полученным в [4]: если фазу произвольной комплексной функции $g(x) = \left(g(x)\right(\exp\left[i\varphi(x)\right]$ квантовать по N эквидистантным уровням, то фурье-образ полученной функции будет удовлетворять соотношению

$$\hat{G}(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m G_m(u), \qquad (9)$$

где

$$G_m(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g_m(x)\exp\left[i2\pi xu\right]dx,$$

$$g_m(x) = \left|g(x)\right|\exp\left[i(Nm+1)\varphi(x)\right],$$

$$d_m = \sin c[m + (1/N)],$$

$$\sin c(x) = \frac{\sin\pi x}{\pi x}.$$

Исходя из этого функционал ограничений запишем в виде

$$B = \int_{-\infty}^{\infty}\left|G(u) - \sum_{m=-M}^{M} d_m G_m(u)\right|^2 du, \qquad (10)$$

где *M* - конечное число членов ряда (9).

Тогда решение задачи расчета градационного ДОЭ сводится к минимизации общего функционала

$$E = E_0 + \beta B \qquad (10)$$

где $\beta \geq 0$ - действительное число.

Градиент функционала по фазовой функции φ*(x)* имеет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial B}{\partial\varphi(x)} = \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[G(u) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m G_m(u)\right]^* \times \right. \\ &\left. \times\left[\frac{\partial G(u)}{\partial\varphi} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m\frac{\partial G_m(u)}{\partial\varphi}\right]du\right\} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= i\left|g(x)\right|^2 - \\
&- i\sum_{m=-M}^{M} d_m[(Nm+1)g^*(x)g_m(x) + \\
&+ g_m^*(x)g(x)] + \\
&+ i\sum_{m=-M}^{M} d_m g_m^*(x)\sum_{n=-M}^{M} d_n(Nn+1)g_n(x) = \\
&= -2\sum_{m=-M}^{M} d_m Nm\left|g(x)\right|^2 \sin(Nm\varphi(x)) - \\
&- 2\sum_{m=-M}^{M} d_m \sum_{n=-M}^{M} d_n(Nn+1)\left|g(x)\right|^2 \times \\
&\times \sin(N(m-n)\varphi(x))
\end{aligned} \tag{11}
$$

3. Регуляризация задачи расчета ДОЭ

Запишем регуляризирующий функционал r-й степени [5]:

$$
Q_r = \int_{-\infty}^{\infty} p_r(u)\left|G(u)\right|^2 du\,, \tag{12}
$$

где $p_r(u) = \sum_{l=0}^{r} c_l u^{2l}$, $c_l \ge 0$ - действительные константы.

Вычислим градиент функционала регуляризации

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial Q_r}{\partial \varphi(x)} = \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} p_r(u)G^*(u)\frac{\partial G(u)}{\partial \varphi(x)}du\right\} =, \\
&= 2\,\mathrm{Im}[g(x)g_p^*(x)]
\end{aligned} \tag{13}
$$

где

$$
g_p(x) = \Im^{-1}\left[G_p(u)\right],
$$

$$
G_p(u) = p_r(u)G(u)\,.
$$

Тогда решение задачи расчета ДОЭ с регуляризацией сводится к минимизации общего функционала

$$
E = E_0 + \alpha Q_r
$$

где $\alpha \ge 0$ - действительное число.

Численные результаты

В численном эксперименте проводилось сравнение стандартного и регуляризированного [6] алгоритмов ГС со стандартным градиентным (СГ) и регуляризированным градиентным (РГ) методами.

Стандартный алгоритм ГС состоит из следующих шагов:

а) выбирается начальная оценка фазы $\varphi_0(x)$;

б) выполняется преобразование (3), и полученная функция $G_0(u)$ заменяется на функцию $G_n'(u)$

$$
G_n'(u) = \left|F(u)\right|G_n(u)\left|G_n(u)\right|^{-1} \tag{14}
$$

в) выполняется обратное к (3) преобразование, и рассчитанная функция $g_n'(x)$ в плоскости ДОЭ заменяется на $g_n(x)$

$$
g_n(x) = \begin{cases} A_0(x)g_n'(x)\left|g_n'(x)\right|^{-1}, x \in D, \\ 0,\ x \notin D, \end{cases} \tag{15}
$$

где D - форма апертуры ДОЭ. После пункта (в) переходят к пункту (б) и так далее.

В регуляризированном алгоритме ГС согласно [6] вместо замены (14) используется замена

$$
G_n'(u) = \left|F(u)\right|G_n(u)\left[\left|G_n(u)\right| + \alpha p_r(u)\right]^{-1} \tag{16}
$$

где $\alpha \ge 0$ - стабилизирующая постоянная.

В численном эксперименте рассчитывался ДОЭ с фазовой функцией 64х64 отсчетов фокусирующий излучение в равномерный прямоугольник 32х16 отсчетов.

На рис.1 представлены центральные сечения распределения интенсивности в плоскости наблюдения:

а) для стандартного ГС (отклонение рассчитанного распределения интенсивности от заданного в плоскости наблюдения - 15.1%, эффективность - 96.4%,

б) для регуляризированного ГС (13.4%, 92.3%),

в) для СГ метода (7.5%, 84.2%),

г) для РГ метода (6.2%, 83.4%).

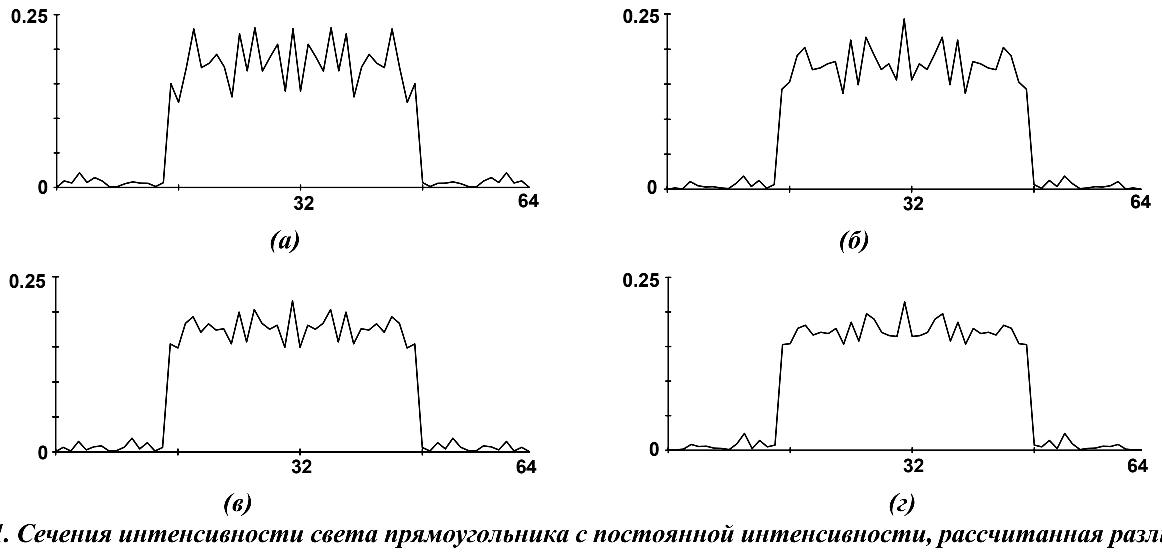
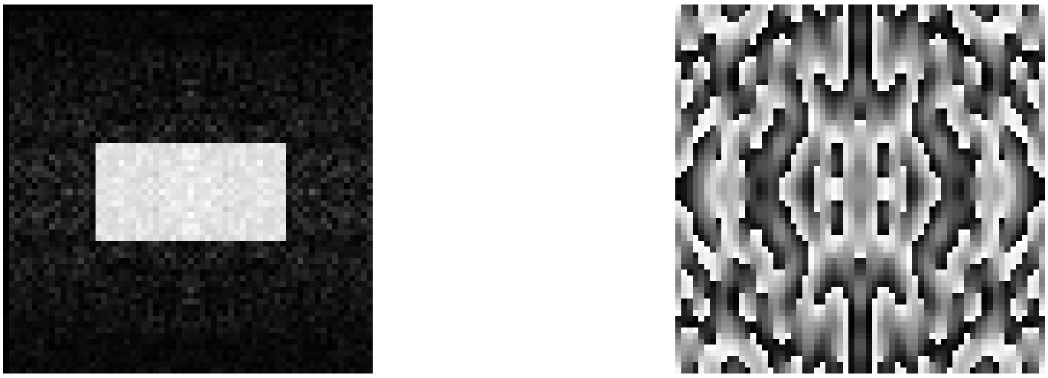


Рис. 1. Сечения интенсивности света прямоугольника с постоянной интенсивности, рассчитанная различными методами: а) ГС методом, б) регуляризированным ГС методом, в) СГ методом, г) РГ методом.



(а) *(б)*

Рис. 2. Двумерное изображение распределения интенсивности в фокальной плоскости, рассчитанное РГ методом за 40 итераций (а) и фазовая функция ДОЭ (б) формирующего данное распределение интенсивности.

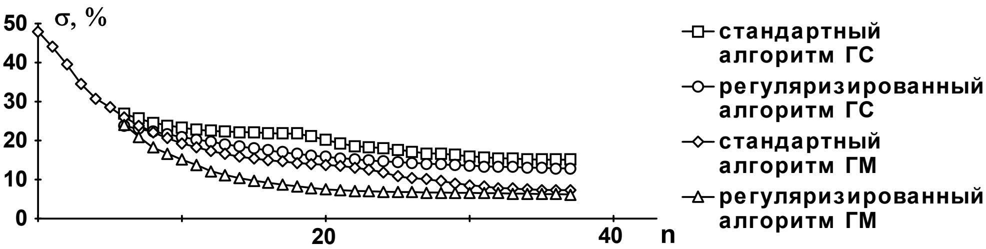


Рис. 3. Зависимость среднеквадратичного отклонения рассчитанной интенсивности в фокальной плоскости от заданного постоянного значения от числа итераций.

На рис.2 изображена рассчитанное регуляризированным ГМ распределение интенсивности в плоскости наблюдения (а) и фазовая функция (б).

На рис.3 показаны зависимости среднеквадратичной ошибки рассчитанной интенсивности от числа итераций для различных алгоритмов расчета.

Литература:

1. Lesem L.B., Hirsch P.M., Jordan J.A. "The kinoform: new wavefront reconstruction device", IBM J.Res. Devel. 13, 150-155, (1969)

2. J.R. Fienup, "Phase retrieval algorithms: a comparison," Appl. Opt. 21, 2758-2769 (1982).

3. J.R.Fienup, "Phase-retrieval algorithms for a complicated optical system", Appl. Opt. 32(10), 1737-1746 (1993).

4. J.W. Goodman, A.M. Silvestri, "Some effects of Fourier-domain phase quantization", IBM J. Res. Develop. 9, 478-484 (1970).

5. Тихонов А.И., Арсенин В.Я., Методы решения некорректных задач. М., 1979, 286 с.

6. Котляр В.В., Серафимович П.Г., Адаптивный итеративный метод расчета киноформов., Оптика и спектроскопия, 77, 678-681 (1994),