

АБЕРРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГРАДИЕНТНОЙ СРЕДЫ: МЕТОДЫ РАСЧЕТА

В результате анализа абберационных свойств асферических поверхностей, образованных вращением эвольвенты окружности относительно нормали в некоторой точке эвольвенты, проф. М.М. Русиновым было показано, что в центрированной осесимметричной оптической системе (ЦООС), содержащей одну или несколько поверхностей указанного типа, присутствуют поперечные абберации второго порядка [1]. В [2] рассмотрен более широкий класс асферических поверхностей, вносящих в ЦООС поперечные абберации второго порядка. Такие поверхности описываются уравнением [2]:

$$z = A_1(x^2 + y^2) + A_2\sqrt{(x^2 + y^2)^3} + A_3(x^2 + y^2)^2 + \dots +$$

Необходимым условием наличия у такой поверхности поперечных аббераций второго порядка является ненулевой коэффициент A_2 .

Покажем, что аналогичными свойствами обладают градиентные Среды с функцией распределения квадрата показателя преломления (ПП) вида:

$$n^2(x, y, z) = (n_0(z))^2 + N_1(z)(x^2 + y^2) + N_2(z)\sqrt{(x^2 + y^2)^3} + N_3(z)(x^2 + y^2)^2 + \dots + \quad (1)$$

Согласно [3] ход реального луча в градиентной среде описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \nabla(n^2(R)) = n(R) \nabla n(R) \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = T(R) \quad (3)$$

где

$$n(R) dt = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2};$$

$R = (x; y; z)^T$ - радиус-вектор точки $(x; y; z)$ на траектории луча;

$T = (p; q; l)^T = n(R)(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)^T$ - вектор оптических направляющих косинусов; $\alpha; \beta; \gamma$ - углы, образованные касательной в точке $(x; y; z)$ с осями координат OX; OY; OZ соответственно;

$\nabla n(R) = \left(\frac{\partial n}{\partial x}; \frac{\partial n}{\partial y}; \frac{\partial n}{\partial z} \right)^T$ - градиент ПП в точке $(x; y; z)$.

Рассмотрим бесконечно близкий к оптической оси луч. Для такого луча координаты точки на траектории и оптические направляющие косинусы можно представить в виде:

$$R = R_{axial} + \delta R;$$

$$T = T_{axial} + \delta T,$$

где $R_{axial} = (0; 0; z)^T$; $T_{axial} = (0; 0; n_0(z))^T$;

$\delta R = (\delta x; \delta y; \delta z)^T$ и $\delta T = (\delta p; \delta q; \delta l)^T$ - бесконечно малые первого порядка малости.

Дифференциальные уравнения (2), (3) при бесконечно малых δR и δT преобразуются в выражения:

$$n_0(z) \frac{d\delta p}{dz} = N_1(z) \delta x; \quad (4)$$

$$n_0(z) \frac{d\delta q}{dz} = N_1(z) \delta y; \quad (5)$$

$$n_0(z) \frac{d\delta x}{dx} = \delta p; \quad (6)$$

$$n_0(z) \frac{d\delta y}{dz} = \delta q. \quad (7)$$

Система уравнений (4), (5), (6), (7) описывает ход паракиального луча в градиентной оптической среде [3]. Если обозначить через $\mu(z)$ $\eta(z)$ углы паракиального луча с оптической осью в саггитальном сечении соответственно, то :

$$\delta p(z) = -n_0(z) \mu(z)$$

$$\delta q(z) = -n_0(z) \eta(z)$$

Вновь рассмотрим бесконечно близкий к оптической оси луч, учитывая теперь величины первого и второго порядка малости. В этом случае

$$R = R_{axial} + \delta R + \frac{1}{2} \delta^2 R$$

$$T = T_{axial} + \delta T + \frac{1}{2} \delta^2 T$$

где $\delta^2 R = (\delta^2 x; \delta^2 y; \delta^2 z)^T$; $\delta^2 T = (\delta^2 p; \delta^2 q; \delta^2 l)^T$ - бесконечно малые второго порядка малости.

Уравнения (2), (3) раскладываем в ряд Тейлора, сохраняя величины до второго порядка малости. После преобразований полученных выражений с учётом (4)-(7) имеем:

$$n_0(z) \frac{d\delta^2 p}{dz} = N_1(z) \delta^2 x + 3N_2(z) \delta x \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad (8)$$

$$n_0(z) \frac{d\delta^2 q}{dz} = N_1(z) \delta^2 y + 3N_2(z) \delta y \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad (9)$$

$$n_0(z) \frac{d\delta^2 p}{dz} = \delta^2 p \quad (10)$$

$$n_0(z) \frac{d\delta^2 q}{dz} = \delta^2 q \quad (11)$$

Рассмотрим находящийся в однородных средах пространства предметов и пространства изображений оптический элемент, представляющий ограниченную плоскими поверхностями градиентную среду с распределением ПП (1). Рассчитаем ход через этот элемент бесконечно близкого к оптиче-

ской оси луча с учётом величин до второго порядка малости (рис. 1).

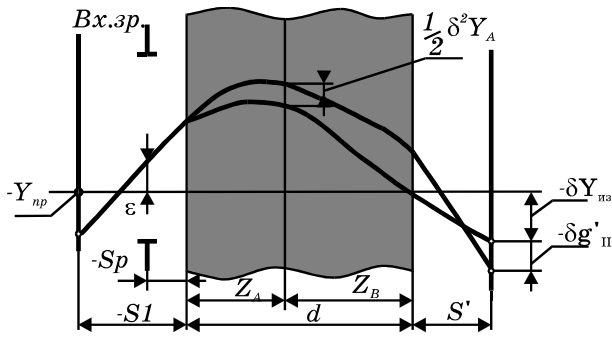


Рис. 1.

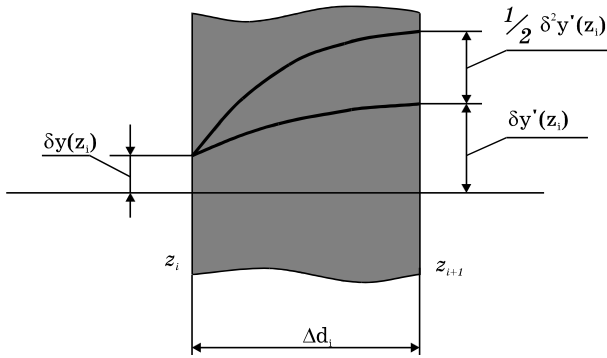


Рис. 2.

В среде пространства предметов имеем [3]:
 $\delta q_1 = -n_1 \eta_1 = (m - y_{np}) n_1 / (S_p - S_1)$; $\delta^2 q_1 = 0$;
 $\delta p_1 = -n_1 \mu_1 = M n_1 / (S_p - S_1)$; $\delta^2 p_1 = 0$. На первой поверхности элемента: $\delta x_1 = S_1 \mu_1$; $\delta^2 x_1 = 0$;
 $\delta y_1 = S_1 \eta_1$; $\delta^2 y_1 = 0$. Преломление луча на этой поверхности описывается формулами:
 $-n_1 \mu_1 = \delta p_1 = -n_0(0) \mu(0) = \delta p(0)$; $\delta^2 p(0) = 0$;
 $-n_1 \eta_1 = \delta q_1 = -n_0(0) \eta(0) = \delta q(0)$; $\delta^2 q(0) = 0$. Значения координат $\delta x_2 = \delta x(d)$; $\delta y_2 = \delta y(d)$;
 $\delta^2 x_2 = \delta^2 x(d)$; $\delta^2 y_2 = \delta^2 y(d)$ и оптических направляющих косинусов $\delta p_2 = \delta p(d)$; $\delta q_2 = \delta q(d)$;
 $\delta^2 p_2 = \delta^2 p(d)$; $\delta^2 q_2 = \delta^2 q(d)$ в точке встречи луча со второй поверхностью ($z=d$) находятся в результате интегрирования дифференциальных уравнений (4)-(7) и (8)-(11) при начальных условиях:
 $\delta x(0) = \delta x_1$; $\delta p(0) = \delta p_1$; $\delta y(0) = \delta y_1$;
 $\delta q(0) = \delta q_1$; $\delta^2 x(0) = \delta^2 x_1$; $\delta^2 p(0) = \delta^2 p_1$;
 $\delta^2 y(0) = \delta^2 y_1$; $\delta^2 q(0) = \delta^2 q_1$. Преломление луча на второй поверхности описывается формулами:
 $-n_3 \mu_3 = \delta p_3 = -n_0(d) \mu(d) = \delta p(d) = \delta p_2$; $\delta^2 p_3 = \delta^2 p(d)$;
 $-n_3 \eta_3 = \delta q_3 = -n_0(d) \eta(d) = \delta q(d) = \delta q_2$; $\delta^2 q_3 = \delta^2 q(d)$.

Координаты точки встречи луча с плоскостью изображения с учётом первых и вторых порядков будут:

$$x_{u3} = \delta x_{u3} + \frac{1}{2} \delta^2 x_{u3} \quad (12)$$

$$y_{u3} = \delta y_{u3} + \frac{1}{2} \delta^2 y_{u3} \quad (13)$$

где

$$\delta x_{uK} = \delta x_2 + \delta p_3 S' / n_3; \quad \delta^2 x_{uK} = \delta^2 x_2 + \delta^2 p_3 S' / n_3;$$

$$\delta y_{uK} = \delta y_2 + \delta q_3 S' / n_3; \quad \delta^2 y_{uK} = \delta^2 y_2 + \delta^2 q_3 S' / n_3.$$

На основании (12) и (13) aberrации второго порядка луча равны:

$$\delta g'_{II} = \frac{1}{2} \delta^2 y_{u3};$$

$$\delta G'_{II} = \frac{1}{2} \delta^2 x_{u3}.$$

Таким образом, задачу расчета aberrаций второго порядка для градиентных сред можно считать решенной. Существенным недостатком изложенной методики является необходимость решения системы дифференциальных уравнений (8)-(11).

Рассмотрим усовершенствованную методику расчета aberrаций второго порядка, свободную от указанного недостатка. С этой целью разделим градиентную среду плоскостью на части А и В. В результате расчета величин второго порядка малости через часть А в плоскости раздела частей А и В имеем

$$\delta^2 x'_A = \delta^2 x(z_A);$$

$$\delta^2 y'_A = \delta^2 y(z_A); \quad \delta^2 p'_A = \delta^2 p(z_A); \quad \delta^2 q'_A = \delta^2 q(z_A).$$

Продолжая расчет величин второго порядка малости через часть В при начальных условиях $\delta^2 x_{BO} = \delta^2 x'_A$; $\delta^2 y_{BO} = \delta^2 y'_A$; $\delta^2 p_{BO} = \delta^2 p'_A$; $\delta^2 q_{BO} = \delta^2 q'_A$, в плоскости изображения получим: $\delta^2 x_{u3AB}$; $\delta^2 y_{u3AB}$; $\delta^2 x_{u3AB}$; $\delta^2 x_{u3AB}$.

Можно поступить иначе. Если в качестве начальных условий для расчета величин второго порядка малости через часть В принять $\delta^2 x_{BO} = \delta^2 y_{BO} = \delta^2 p_{BO} = \delta^2 q_{BO} = 0$, то в плоскости изображения определим величины $\delta^2 x_{u3AB}$; $\delta^2 y_{u3AB}$; $\delta^2 p_{3B}$; $\delta^2 q_{3B}$. Рассчитаем также через часть В до плоскости изображения параксиальный луч с начальными координатами $\delta^2 x_{BO} = \delta^2 x'_A$; $\delta^2 y_{BO} = \delta^2 y'_A$; $\delta^2 p_{BO} = \delta^2 p'_A$; $\delta^2 q_{BO} = \delta^2 q'_A$; в результате в плоскости изображения получим $\delta^2 \tilde{x}_{u3AB}$; $\delta^2 \tilde{y}_{u3AB}$; $\delta^2 \tilde{p}_{3AB}$; $\delta^2 \tilde{q}_{3AB}$.

Т.к. общее однородное решение системы дифференциальных уравнений (4)-(7) подобно общему однородному решению системы дифференциальных уравнений (8)-(11), то выполняются равенства:

$$\delta^2 x_{u3AB} = \delta^2 x_{u3B} + \delta^2 \tilde{x}_{u3AB};$$

$$\delta^2 y_{u3AB} = \delta^2 y_{3B} + \delta^2 \tilde{y}_{u3AB};$$

$$\delta^2 p_{3AB} = \delta^2 p_{3B} + \delta^2 \tilde{p}_{3AB};$$

$$\delta^2 q_{3AB} = \delta^2 q_{3B} + \delta^2 \tilde{q}_{3AB}.$$

Для ЦООС в паракиальной области известен обобщенный инвариант Гюйгенса [3], справедливый при любом значении z в любой среде:

$$\begin{aligned} Q_0 &= n_1 \alpha_1 H_1 - n_1 \beta_1 h_1 = \\ &= n_0(z) \alpha(z) H(z) - n_0(z) \beta(z) h(z) =, \quad (14) \\ &= n_3 \alpha_3 H_3 - n_3 \beta_3 h_3 = n_3 \alpha_3 H_{u3} - n_3 \beta_3 h_{u3} \end{aligned}$$

где $(\alpha; h)$ и $(\beta; H)$ - углы и высоты двух произвольных паракиальных лучей; h_{u3} и H_{u3} - высоты этих лучей; h_2 и H_2 - высоты этих лучей на второй поверхности градиентного элемента.

Примем, что $(\alpha; h)$ - угол и высота апертурного (первого вспомогательного [3]) паракиального луча, который пересекает плоскость изображения при $h_{u3}=0$ [3]. Тогда высота H_{u3} в плоскости изображения другого, входящего в инвариант (14) паракиального луча определяется как

$$H_{u3} = \frac{Q_0}{\alpha_3 n_3}, \quad (15)$$

где α_3 - угол первого вспомогательного луча в пространстве изображений.

Величина $\delta^2 \tilde{y}_{u3AB}$ находится из расчета паракиального луча, поэтому для нее на основании уравнения (15) можно записать:

$$\delta^2 \tilde{y}_{u3AB} = \frac{L_y}{\alpha_3 n_3},$$

где L_y - меридиональный квазиинвариант [3]:

$$L_y = \delta^2 y(z_A) n_0(z_A) \alpha(z_A) + h(z_A) \delta^2 q(z_A).$$

Аналогично для сагитального сечения:

$$\delta^2 \tilde{x}_{u3AB} = \frac{L_x}{\alpha_3 n_3},$$

где L_x - сагитальный квазиинвариант [3]:

$$L_x = \delta^2 x(z_A) n_0(z_A) \alpha(z_A) + h(z_A) \delta^2 p(z_A).$$

Очевидно, что градиентную среду можно разделить не на две, а на любое количество m частей. Меридиональный и сагитальный квазиинварианты для каждой i -й части Среды определяются уравнениями:

$$L_{yi} = \delta^2 y'(z_i) n_0(z_i) \alpha(z_i) + h(z_i) \delta^2 q'(z_i);$$

$$L_{xi} = \delta^2 x'(z_i) n_0(z_i) \alpha(z_i) + h(z_i) \delta^2 p'(z_i),$$

где $z_{i+1} = z_i + \Delta d_i$; $\alpha(z_{i+1}) = \alpha'(z_i)$; $h(z_{i+1}) = h'(z_i)$.

При этом в начале каждой i -й части среды примем: $\delta^2 x_i = \delta^2 y_i = \delta^2 p_i = \delta^2 q_i = 0$.

Интегрированием системы дифференциальных уравнений (8)-(11) находим

$\delta^2 x'(z_i)$; $\delta^2 y'(z_i)$; $\delta^2 p'(z_i)$; $\delta^2 q'(z_i)$ в конце каждой i -й части Среды (рис. 2). Суммарно от всех m частей градиентной Среды имеем:

$$\alpha_3 n_3 \delta^2 x_{u3} = \sum_{i=1}^m L_{xi}; \quad (16)$$

$$\alpha_3 n_3 \delta^2 y_{u3} = \sum_{i=1}^m L_{yi}. \quad (17)$$

Рассмотрим случай, когда величина Δd_i бесконечно малая. В этом случае для нахождения величин $\delta^2 x'(z_i)$; $\delta^2 y'(z_i)$; $\delta^2 p'(z_i)$; $\delta^2 q'(z_i)$ воспользуемся разложением в ряд Тейлора и с учетом (8)-(11) получаем:

$$\begin{aligned} \delta^2 x'(z_i) &= \delta^2 x(z_i) + \left. \frac{d\delta^2 x}{dz} \right|_{z=z_i} \Delta d_i =; \quad (18) \\ &= \delta^2 x(z_i) + \delta^2 p(z_i) \Delta d_i / n_0(z_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^2 y'(z_i) &= \delta^2 y(z_i) + \left. \frac{d\delta^2 y}{dz} \right|_{z=z_i} \Delta d_i =; \quad (19) \\ &= \delta^2 y(z_i) + \delta^2 p(z_i) \Delta d_i / n_0(z_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^2 p'(z_i) &= \delta^2 p(z_i) + \left. \frac{d\delta^2 p}{dz} \right|_{z=z_i} \Delta d_i = \\ &= \delta^2 p(z_i) + (N_1(z) \delta^2 x_i + \\ &+ 3N_2(z) \delta x_i \sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2}) \Delta d_i / n_0(z_i) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 q'(z_i) &= \delta^2 q(z_i) + \left. \frac{d\delta^2 q}{dz} \right|_{z=z_i} \Delta d_i = \\ &= \delta^2 q(z_i) + (N_1(z) \delta^2 y_i + \\ &+ 3N_2(z) \delta y_i \sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2}) \Delta d_i / n_0(z_i) \end{aligned} \quad (21)$$

Выражения (18)-(21) можно преобразовать, принимая во внимание, что

$$\delta^2 x(z_i) = \delta^2 y(z_i) = \delta^2 p(z_i) = \delta^2 q(z_i) = 0;$$

$$\delta^2 x'(z_i) = 0;$$

$$\delta^2 y'(z_i) = 0;$$

$$\delta^2 p'(z_i) = 3N_2(z_i) \delta x_i \sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2} \Delta d_i / n_0(z_i);$$

$$\delta^2 q'(z_i) = 3N_2(z_i) \delta y_i \sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2} \Delta d_i / n_0(z_i);$$

$$L_{xi} = h(z_i) 3N_2(z_i) \delta x_i \sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2} \Delta d_i / n_0(z_i); \quad (23)$$

$$L_{yi} = h(z_i) 3N_2(z_i) \delta y_i \sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2} \Delta d_i / n_0(z_i). \quad (24)$$

Заменяя в (16), (17) суммирование на интегрирование и учитывая (23), (24), получаем:

$$\begin{aligned} 2\alpha_3 n_3 \delta G'_{II} &= \\ &= \int_0^d \frac{h(z) 3N_2(z) \delta y(z) \sqrt{(\delta x(z))^2 + (\delta y(z))^2}}{n_0(z)} dz \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 2\alpha_3 n_3 \delta G'_{II} &= \\ &= \int_0^d \frac{h(z) 3N_2(z) \delta x(z) \sqrt{(\delta x(z))^2 + (\delta y(z))^2}}{n_0(z)} dz \end{aligned} \quad (26)$$

При этом $\delta g'_{II}$ и $\delta G'_{II}$ включают в себя все aberrации луча, в т.ч. дисторсию.

Рассмотрим расчет меридиональной сферической aberrации второго порядка. Из уравнения (25) при $\delta x = \delta r = 0$; $\delta y(z) = h(z)$; $\delta q(z) = -n_0(z)\alpha(z)$ получаем:

$$2\alpha_3 n_3 \delta g'_{\text{II}C\Phi} = \int_0^d \frac{3N_2(z)(h(z))^3}{n_0(z)} dz. \quad (27)$$

Дисторсия второго порядка определяется уравнением

$$2\alpha_3 n_3 \delta g'_{\text{II}Dist} = \int_0^d \frac{3N_2(z)(H(z)(H(z)h(z))^3}{n_0(z)} dz, \quad (28)$$

где $(\beta; H)$ - угол и высота полевого парааксиального луча (второй вспомогательный луч [3]).

Может быть доказано, что если градиентный элемент ограничен не плоскостями, а сферическими поверхностями, то формулы (25) и (26) остаются в силе, т.к. сферические поверхности не вносят aberrаций третьего порядка, а характерные для теории aberrации третьего порядка поверхностные составляющие [3] в теории aberrации второго порядка отсутствуют.

При наличии в оптической системе нескольких градиентных сред поперечная aberrация второго порядка описывается выражениями:

$$2\alpha' n' \delta g'_{\text{II}} = \sum_{j=1}^k L_{yj};$$

$$2\alpha' n' \delta G'_{\text{II}} = \sum_{j=1}^k L_{xj}.$$

где k - число градиентных сред; α' - угол первого вспомогательного луча в пространстве изображений; меридиональный и саггитальный квазиинварианты для каждой j - среды определяются на основании вышеприведенных выражений:

$$L_{yj} = \int_0^{d_j} \frac{h(z) 3N_2(z) \delta y(z) \sqrt{(\delta x(z))^2 + (\delta y(z))^2}}{n_0(z)} dz; \quad (29)$$

$$L_{xj} = \int_0^{d_j} \frac{h(z) 3N_2(z) \delta x(z) \sqrt{(\delta x(z))^2 + (\delta y(z))^2}}{n_0(z)} dz. \quad (30)$$

Все подинтегральные величины в (29), (30) соответствуют j -й среде.

Для градиентной оптической системы в виде градиентного стержня с плоскими поверхностями были вычислены по формулам (25)-(28) поперечные aberrации второго порядка, а также aberrации реальных лучей. Длина стержня 23.5мм; функция распределения П: $n^2(x, y, z) = 1.5^2 - 0.01(x^2 + y^2) - 0.0005\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$. Предметная плоскость бесконечно удалена от первой поверхности стержня; входной зрачок расположен на расстоянии $-Sp=5$ мм. Плоскость изображения совпадает с плоскостью Гаусса $S'=41.29684 \cdot 10^{-3}$ мм.

В таблице 1 приведены aberrации осевого пучка, вычисленные на основании расчета реальных лучей и с использованием формулы (27).

Дисторсия второго порядка, вычисленная для угла поля $\omega=-30'$ с использованием выражения (28) и на основании расчета реального луча, равна $\delta g'_{\text{Dist}} = -0.47599 \cdot 10^{-3}$ и $\delta g'_{\text{IIDist}} = -0.47970 \cdot 10^{-3}$ соответственно. В таблицах 2 и 3 приведены значения aberrации наклонного пучка ($\omega=-30'$) в меридиональном и саггитальном сечениях, определенные на основе расчета хода реальных лучей и по формулам (25), (26).

Высоты лучей во входном зрачке подобраны таким образом, чтобы влиянием aberrации третьего, четвертого и более порядка можно было пренебречь. Результаты расчета по формулам (25)-(28) теории aberrации второго порядка имеют хорошее совпадение с результатами расчета реальных лучей.

Литература.

1. Русинов М.М. Композиция оптических систем. Л.: Машиностроение, 1989.-383с.
2. Грамматин А.П., Марчук С.М. Асферические поверхности нового типа и их aberrационные свойства. Оптико-механическая промышленность, 1990, N. 11. -с. 55-57.
3. Грейсух Г.И., Ефименко И.М., Степанов С.А. Оптика градиентных и дифракционных элементов. М.: Радио и связь, 1990. -136с.

Таблица 1

Осевого пучка

$m \times 10^3$	Реальные лучи $\delta g' \times 10^3$	Аберрации 2 порядка $\delta g'_{\text{II}} \times 10^3$
31.25	-.04890	-.4883
62.50	-.19589	-.19531

Таблица 2

Аберрации наклонного пучка в меридиональном сечении. $\omega=-30'$

$m \times 10^3$	Реальные лучи $(\delta g' - \delta g'_{\text{Dist}}) \times 10^3$	Аберрации 2 порядка $(\delta g'_{\text{II}} - \delta g'_{\text{IIDist}}) \times 10^3$
62.50	-.742718	-.740748
31.25	-.322191	-.321545
-31.25	.224296	.223888
-62.50	.354922	.353923

Таблица 3

Аберрации наклонного пучка в саггитальном сечении. $\omega=-30'$

$m \times 10^3$	Реальные лучи		Аберрации 2 порядка	
	$(\delta g' - \delta g'_{\text{Dist}}) \times 10^3$	$\delta g' \times 10^3$	$(\delta g'_{\text{II}} - \delta g'_{\text{IIDist}}) \times 10^3$	$\delta g'_{\text{II}} \times 10^3$
31.25	-.023370	-.146070	-.023346	-.146877
62.50	-.084617	-.341743	-.084509	-.343770