

БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ДИСКРЕТНЫХ КОСИНУСНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Разработаны быстрые алгоритмы ДКП-II, III и IV нечетной длины. Приведены оценки вычислительной сложности алгоритмов при $N=3^r$. Показаны преимущества синтезированных алгоритмов перед традиционным ДКП-I четной длины.

Введение

Широкое использование дискретного косинусного преобразования (ДКП)

$$\hat{x}_I(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\pi \frac{(n+\frac{1}{2})m}{N}\right) \quad (1)$$

в различных задачах цифровой обработки сигналов объясняется, по меньшей мере, тремя причинами.

Во-первых, базисные функции ДКП хорошо аппроксимируют собственные функции преобразования Карунена-Лозва для широкого класса стационарных случайных процессов [1, 2], что делает ДКП эффективным средством кодирования информации.

Во-вторых, дискретный сигнал, наблюдаемый на конечном интервале $[0, N-1]$, представленный в виде линейной комбинации базисных функций ДКП продолжается как $2N$ -периодическая функция на множество целых чисел \mathbb{Z} . Следствием увеличения периода является отсутствие или значительное снижение краевых эффектов при блочном кодировании.

В-третьих, для ДКП существуют быстрые алгоритмы (БА) вычисления спектра (1).

Отметим, что предложенный в [1] БА ДКП сводит вычисление (1) к вычислению дискретного преобразования Фурье (ДПФ) вещественной последовательности длины $2N$:

$$\begin{aligned} \hat{x}(m) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\omega^{m/2} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega^{mn} + \omega^{-m/2} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega^{-mn} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \omega^{m/2} \sum_{k=0}^{2N-1} y(k) \omega^{mk}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega = \exp\left\{\frac{2\pi i}{2N}\right\}$, $y(k)$ - вещественная последовательность длины $2N$, полученная четным продолжением $x(n)$:

$$y(k) = \begin{cases} x(k) & 0 \leq k \leq N-1 \\ x(2N-k-1) & N \leq k \leq 2N-1 \end{cases}$$

Использование БА ДПФ "совмещенного" типа [2] позволяет вычислять спектр (1) с помощью ДПФ комплексной последовательности длины N .

В работе [3] указано, что специфические арифметические свойства значений базисных функций дискретных ортогональных преобразований (ДОП) позволяют в значительной степени

снизить вычислительную сложность БА ДОП, в частности, ДКП.

Действительно, в схеме декомпозиции алгоритма (2) явным образом проводятся вычисления с числами $\exp\left\{2\pi i \frac{(n+1/2)m}{2N}\right\}$. Значения базисных функций ДКП

$$\begin{aligned} \cos\left(\pi \frac{(n+1/2)m}{2N}\right) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\exp\left\{2\pi i \frac{(n+1/2)m}{2N}\right\} + \exp\left\{-2\pi i \frac{(n+1/2)m}{2N}\right\} \right) \end{aligned}$$

имеют в два раза меньшую степень алгебраичности над \mathbb{Q} , что позволяет снизить вычислительную сложность БА ДКП еще приблизительно в два раза по сравнению с алгоритмом работы [2].

Наиболее эффективно эти соображения реализуются в случае нечетного N [4, 5]. Дополнительный вычислительный эффект может быть получен при применении "нетрадиционного" представления комплексных чисел, согласованного со структурой алгоритма ДКП. Например [5, 6], при $N = 3^r$ целесообразно использование представления комплексных z в форме

$$z = a\gamma + b\bar{\gamma}, \quad \gamma = \exp\left\{\frac{2\pi i}{3}\right\}. \quad (3)$$

В ряде работ [7, 8] наряду с каноническим косинусным преобразованием (1) (далее, ДКП-I) рассматривались другие типы ДКП:

$$\hat{x}_{II}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\pi \frac{n(m+\frac{1}{2})}{N}\right) \quad (\text{ДКП-II})$$

$$\hat{x}_{III}(m) = \sum_{n=0}^N x(n) \cos\left(\pi \frac{nm}{N}\right) \quad (\text{ДКП-III})$$

$$\hat{x}_{IV}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\pi \frac{(n+\frac{1}{2})(m+\frac{1}{2})}{N}\right) \quad (\text{ДКП-IV})$$

Целью настоящей работы является перенесение методики синтеза БА ДКП работ [4, 5] для ДКП-II-IV.

1. Сведение ДКП-IV к вещественному ДПФ той же длины

Рассмотрим ДКП-IV:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{IV}(m) &= \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\pi \frac{(n+\frac{1}{2})(m+\frac{1}{2})}{N}\right) = \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega^{(2n+1)(2m+1)} \right\}, \quad (4)$$

где $\omega = \exp\left\{\frac{2\pi i}{8N}\right\}$ - первообразный корень степени $8N$ из единицы. Пусть

$$y(k) = \begin{cases} x(n) & \bullet \text{пЦ}k = 2n+1; \\ 0 & \bullet \text{пЦ}k = 2n; \end{cases}$$

$$\hat{y}(t) = \hat{x}_{IV}(m) \bullet \text{пЦ}t = 2m+1,$$

тогда (4) примет вид

$$\hat{y}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{2N-1} y(k) \omega^{kt} \right\}. \quad (5)$$

При нечетном N выполним декомпозицию Гуда-Томаса [9]. Пусть

$$\begin{cases} k \equiv 8k_1 + Nk_2 \pmod{8N} \\ t \equiv 8at_1 + Nbt_2 \pmod{8N} \end{cases},$$

где a и b определяются из условий:

$$\begin{cases} 8^2 a \equiv 8 \pmod{8N} \\ N^2 b \equiv N \pmod{8N} \end{cases}$$

Введем обозначения:

$\alpha = \exp\left\{\frac{2\pi i}{8}\right\}$, $\beta = \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}\right\}$ - первообразные корни из единицы степени 8 и N соответственно;

$$Y(k_1, k_2) = y(8k_1 + Nk_2), (k_1, k_2) \in K_{IV};$$

$$\hat{Y}(t_1, t_2) = \hat{y}(8at_1 + Nbt_2), (t_1, t_2) \in M_{IV};$$

K_{IV}, M_{IV} - допустимые области значений входных (k_1, k_2) и выходных (t_1, t_2) пар индексов, определяемые диапазоном изменения переменных k и t (примеры областей K_{IV}, M_{IV} для $N = 9, 27$ приведены на рис. 1, 2).

| | k_2 | | | | | | | | K_{IV} | |
|---|-------|----|----|----|----|----|----|----|----------|-------|
| 7 | 63 | 71 | 7 | 15 | 23 | 31 | 39 | 47 | 55 | |
| 6 | 54 | 62 | 70 | 6 | 14 | 22 | 30 | 38 | 46 | |
| 5 | 45 | 53 | 61 | 69 | 5 | 13 | 21 | 29 | 37 | |
| 4 | 36 | 44 | 52 | 60 | 68 | 4 | 12 | 20 | 28 | |
| 3 | 27 | 35 | 43 | 51 | 59 | 67 | 3 | 11 | 19 | |
| 2 | 18 | 26 | 34 | 42 | 50 | 58 | 66 | 2 | 10 | |
| 1 | 9 | 17 | 25 | 33 | 41 | 49 | 57 | 65 | 1 | |
| 0 | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | k_1 |

| | t_2 | | | | | | | | M_{IV} | |
|---|-------|----|----|----|----|----|----|----|----------|-------|
| 7 | 63 | 55 | 47 | 39 | 31 | 23 | 15 | 7 | 71 | |
| 6 | 54 | 46 | 38 | 30 | 22 | 14 | 6 | 70 | 62 | |
| 5 | 45 | 37 | 29 | 21 | 13 | 5 | 69 | 61 | 53 | |
| 4 | 36 | 28 | 20 | 12 | 4 | 68 | 60 | 52 | 44 | |
| 3 | 27 | 19 | 11 | 3 | 67 | 59 | 51 | 43 | 35 | |
| 2 | 18 | 10 | 2 | 66 | 58 | 50 | 42 | 34 | 26 | |
| 1 | 9 | 1 | 65 | 57 | 49 | 41 | 33 | 25 | 17 | |
| 0 | 0 | 64 | 56 | 48 | 40 | 32 | 24 | 16 | 8 | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | t_1 |

Рис. 1. Допустимые области значений пар (k_1, k_2) и (t_1, t_2) для ДКП-IV при $N = 9$ ($a = 8, b = 1$).

| | k_2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | K_{IV} | |
|---|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|-------|
| 7 | 189 | 197 | 205 | 213 | 5 | 13 | 21 | 29 | 37 | 45 | 53 | 61 | 69 | 77 | 85 | 93 | 101 | 109 | 117 | 125 | 133 | 141 | 149 | 157 | 165 | 173 | 181 | |
| 6 | 162 | 170 | 178 | 186 | 194 | 202 | 210 | 2 | 10 | 18 | 26 | 34 | 42 | 50 | 58 | 66 | 74 | 82 | 90 | 98 | 106 | 114 | 122 | 130 | 138 | 146 | 154 | |
| 5 | 135 | 143 | 151 | 159 | 167 | 175 | 183 | 191 | 199 | 207 | 215 | 7 | 15 | 23 | 31 | 39 | 47 | 55 | 63 | 71 | 79 | 87 | 95 | 103 | 111 | 119 | 127 | |
| 4 | 108 | 116 | 124 | 132 | 140 | 148 | 156 | 164 | 172 | 180 | 188 | 196 | 204 | 212 | 4 | 12 | 20 | 28 | 36 | 44 | 52 | 60 | 68 | 76 | 84 | 92 | 100 | |
| 3 | 81 | 89 | 97 | 105 | 113 | 121 | 129 | 137 | 145 | 153 | 161 | 169 | 177 | 185 | 193 | 201 | 209 | 1 | 9 | 17 | 25 | 33 | 41 | 49 | 57 | 65 | 73 | |
| 2 | 54 | 62 | 70 | 78 | 86 | 94 | 102 | 110 | 118 | 126 | 134 | 142 | 150 | 158 | 166 | 174 | 182 | 190 | 198 | 206 | 214 | 6 | 14 | 22 | 30 | 38 | 46 | |
| 1 | 27 | 35 | 43 | 51 | 59 | 67 | 75 | 83 | 91 | 99 | 107 | 115 | 123 | 131 | 139 | 147 | 155 | 163 | 171 | 179 | 187 | 195 | 203 | 211 | 3 | 11 | 19 | |
| 0 | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 | 88 | 96 | 104 | 112 | 120 | 128 | 136 | 144 | 152 | 160 | 168 | 176 | 184 | 192 | 200 | 208 | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | k_1 |

| | t_2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | M_{IV} | |
|---|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|-------|
| 7 | 135 | 55 | 191 | 111 | 31 | 167 | 87 | 7 | 143 | 63 | 199 | 119 | 39 | 175 | 95 | 15 | 153 | 71 | 207 | 127 | 47 | 183 | 103 | 23 | 159 | 79 | 215 | |
| 6 | 54 | 190 | 110 | 30 | 166 | 86 | 6 | 142 | 62 | 198 | 118 | 38 | 174 | 94 | 14 | 150 | 70 | 206 | 126 | 46 | 182 | 102 | 22 | 158 | 78 | 214 | 134 | |
| 5 | 189 | 109 | 29 | 165 | 85 | 5 | 141 | 61 | 197 | 117 | 37 | 173 | 93 | 13 | 149 | 69 | 205 | 125 | 45 | 181 | 101 | 21 | 157 | 77 | 213 | 133 | 53 | |
| 4 | 108 | 28 | 164 | 84 | 4 | 140 | 60 | 196 | 116 | 36 | 172 | 92 | 12 | 148 | 68 | 204 | 124 | 44 | 180 | 100 | 20 | 156 | 76 | 212 | 132 | 52 | 188 | |
| 3 | 27 | 163 | 83 | 3 | 139 | 59 | 195 | 115 | 35 | 171 | 91 | 11 | 147 | 67 | 203 | 123 | 43 | 179 | 99 | 19 | 155 | 75 | 211 | 131 | 51 | 187 | 107 | |
| 2 | 162 | 82 | 2 | 138 | 58 | 194 | 114 | 34 | 170 | 90 | 10 | 146 | 66 | 202 | 122 | 42 | 178 | 98 | 18 | 154 | 74 | 210 | 130 | 50 | 186 | 106 | 26 | |
| 1 | 81 | 1 | 137 | 57 | 193 | 113 | 33 | 169 | 89 | 9 | 145 | 65 | 201 | 121 | 41 | 177 | 97 | 17 | 153 | 73 | 209 | 129 | 49 | 185 | 105 | 25 | 161 | |
| 0 | 0 | 136 | 56 | 192 | 112 | 32 | 168 | 88 | 8 | 144 | 64 | 200 | 120 | 40 | 176 | 96 | 16 | 152 | 72 | 208 | 128 | 48 | 184 | 104 | 24 | 160 | 80 | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | t_1 |

Рис. 2. Допустимые области значений пар (k_1, k_2) и (t_1, t_2) для ДКП-IV при $N = 27$ ($a = 17, b = 3$).

Учтем, что $(k_1, k_2) \in K_{IV}$ только при нечетных k_2 , а именно, $k_2 = 1, 3, 5, 7$.

Преобразуем теперь (5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{Y}(t_1, t_2) &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{(k_1, k_2) \in K_{IV}} Y(k_1, k_2) \beta^{k_1 t_1} \alpha^{k_2 t_2} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{(k_1, 1) \in K_{IV}} Y(k_1, 1) \beta^{k_1 t_1} \alpha^{t_2} + \sum_{(k_1, 3) \in K_{IV}} Y(k_1, 3) \beta^{k_1 t_1} \alpha^{3 t_2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(k_1, 5) \in K_{IV}} Y(k_1, 5) \beta^{k_1 t_1} \alpha^{5 t_2} + \sum_{(k_1, 7) \in K_{IV}} Y(k_1, 7) \beta^{k_1 t_1} \alpha^{7 t_2} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{(k_1, 1) \in K_{IV}} Y(k_1, 1) \beta^{k_1 t_1} \alpha^{t_2} + \sum_{(k_1, 3) \in K_{IV}} Y(k_1, 3) \beta^{(N-k_1) t_1} (-1)^{t_2} \alpha^{t_2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(k_1, 5) \in K_{IV}} Y(k_1, 5) \beta^{k_1 t_1} (-1)^{t_2} \alpha^{t_2} + \sum_{(k_1, 7) \in K_{IV}} Y(k_1, 7) \beta^{(N-k_1) t_1} \alpha^{t_2} \right\}. \end{aligned}$$

Откуда, учитывая нечетность t_2 (при $(t_1, t_2) \in M_{IV}$), окончательно получим

$$\hat{Y}(t_1, t_2) = \operatorname{Re} \left\{ \alpha^{t_2} \sum_{k_1=0}^{N-1} z(k_1) \beta^{k_1 t_1} \right\}, \quad (6)$$

где

$$z(k_1) = \begin{cases} Y(k_1, 1) & \text{при } (k_1, 1) \in K_{IV} \\ -Y(N-k_1, 7) & \text{при } (k_1, 3) \in K_{IV} \\ -Y(k_1, 5) & \text{при } (k_1, 5) \in K_{IV} \\ Y(N-k_1, 3) & \text{при } (k_1, 7) \in K_{IV} \end{cases}.$$

Функция $z(k_1)$ является некоторой перестановкой исходной последовательности со сменой знака части компонент. При нечетном t_2 умножение на α^{t_2} в (6) требует только двух операций сложения на отсчет и может быть выполнено одновременно с нормировкой.

Таким образом, ДКП-IV нечетной длины N сведено к вещественному преобразованию Фурье той же длины. При $N=3^r$ использование алгоритма ДПФ с представлением данных в форме (3) требует

$$M(N) = N \log_3 N - N,$$

$$A(N) = 3N \log_3 N - \frac{5N}{3}$$

операций вещественного умножения и сложения соответственно. Тогда число умножений $M_{IV}(N)$, сложений $A_{IV}(N)$ и общее количество арифмети-

ческих операций $S_{IV}(N)$ для выполнения ДКП-IV указанным способом не превышает:

$$M_{IV}(N) \leq N \log_3 N - N,$$

$$A_{IV}(N) \leq 3N \log_3 N + \frac{4N}{3},$$

$$S_{IV}(N) \leq 4N \log_3 N + \frac{N}{3}.$$

2. Быстрый алгоритм ДКП-II.

Рассмотрим ДКП-II нечетной длины N :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{II}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \left(\pi \frac{n(m + \frac{1}{2})}{N} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega^{n(2m+1)} \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\omega = \exp \left\{ \frac{2\pi i}{4N} \right\}$. Очевидно [1], что ДКП-II (с точностью до нормирующих множителей) является преобразованием обратным к ДКП-I, поэтому при выполнении декомпозиции Гуда-Томаса достаточно поменять местами области допустимых значений. Примеры таких областей K_{II}, M_{II} для $N=9, 27$ приведены на рис. 3, 4.

Пусть

$$y(k) = \begin{cases} x(n) & \text{при } k = 2n+1; \\ 0 & \text{при } k = 2n; \end{cases}$$

$$\hat{x}(m) = \hat{y}(2m+1);$$

$$(k_1, k_2) \in K_{II} ;$$

$$(m_1, m_2) \in M_{II} ;$$

$$Y(k_1, k_2) = x(4ak_1 + Nbk_2) ;$$

$$\hat{Y}(m_1, m_2) = x(4m_1 + Nm_2) ;$$

где a и b определяются из условий:

$$\begin{cases} 4^2 a \equiv 4 \pmod{4N} \\ N^2 b \equiv N \pmod{4N} \end{cases}$$

При этом (7) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \hat{Y}(m_1, m_2) &= \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{(k_1, k_2) \in K_{II}} Y(k_1, k_2) \beta^{k_1 m_1} i^{k_2 m_2} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\beta = \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}\right\}$ - первообразный корень степени N из единицы. Учитывая, что при $(m_1, m_2) \in M_{II}$ m_2 - нечетно, получим из (8) для $m_2 = 1$:

$$\hat{Y}(m_1, 1) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{(k_1, k_2) \in K_{II}} Y(k_1, k_2) \beta^{k_1 m_1} i^{k_2} \right\},$$

а для $m_2 = 3$ с учетом вещественности $Y(k_1, k_2)$:

$$\begin{aligned} \hat{Y}(m_1, 3) &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{(k_1, k_2) \in K_{II}} Y(k_1, k_2) \beta^{k_1 m_1} i^{3k_2} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{(k_1, k_2) \in K_{II}} Y(k_1, k_2) \beta^{k_1(N-m_1)} i^{k_2} \right\}. \end{aligned}$$

| k_2 | K_{II} | | | | | | | | k_1 | |
|-------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----------|----|----------|--|
| 3 | 27 | 19 | 11 | 3 | 31 | 23 | 15 | 7 | 35 | |
| 2 | 18 | 10 | 2 | 30 | 22 | 14 | 6 | 34 | 26 | |
| 1 | 9 | 1 | 29 | 21 | 13 | 5 | 33 | 25 | 17 | |
| 0 | 0 | 28 | 20 | 12 | 4 | 32 | 24 | 16 | 8 | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |

| m_2 | M_{II} | | | | | | | | m_1 | |
|-------|----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|-----------|----------|----------|--|
| 3 | 27 | 31 | 35 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | |
| 2 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 2 | 6 | 10 | 14 | |
| 1 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 1 | 5 | |
| 0 | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |

Рис. 3. Допустимые области значений пар (k_1, k_2) и (m_1, m_2) для ДКП-II при $N = 9$ ($a = 7$, $b = 1$).

| k_2 | K_{II} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | k_1 | |
|-------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--|
| 3 | 27 | 55 | 83 | 3 | 31 | 59 | 87 | 7 | 35 | 63 | 91 | 11 | 39 | 67 | 95 | 15 | 43 | 71 | 99 | 19 | 47 | 75 | 103 | 23 | 51 | 79 | 107 | |
| 2 | 54 | 82 | 2 | 30 | 58 | 86 | 6 | 34 | 62 | 90 | 10 | 38 | 66 | 94 | 14 | 42 | 70 | 98 | 18 | 46 | 74 | 102 | 22 | 50 | 78 | 106 | 26 | |
| 1 | 81 | 1 | 29 | 57 | 85 | 5 | 33 | 61 | 89 | 9 | 37 | 65 | 93 | 13 | 41 | 69 | 97 | 17 | 45 | 73 | 101 | 21 | 49 | 77 | 105 | 25 | 53 | |
| 0 | 0 | 28 | 56 | 84 | 4 | 32 | 60 | 88 | 8 | 36 | 64 | 92 | 12 | 40 | 68 | 96 | 16 | 44 | 72 | 100 | 20 | 48 | 76 | 104 | 24 | 52 | 80 | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | |

| m_2 | M_{II} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | m_1 | |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--|
| 3 | 81 | 85 | 89 | 93 | 97 | 101 | 105 | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | 49 | 53 | 57 | 61 | 65 | 69 | 73 | 77 | |
| 2 | 54 | 58 | 62 | 66 | 70 | 74 | 78 | 82 | 86 | 90 | 94 | 98 | 102 | 106 | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | |
| 1 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 | 51 | 55 | 59 | 63 | 67 | 71 | 75 | 79 | 83 | 87 | 91 | 95 | 99 | 103 | 107 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | |
| 0 | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 48 | 52 | 56 | 60 | 64 | 68 | 72 | 76 | 80 | 84 | 88 | 92 | 96 | 100 | 104 | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | |

Рис. 4. Допустимые области значений пар (k_1, k_2) и (m_1, m_2) для ДКП-II при $N = 27$ ($a = 7$, $b = 3$).

Откуда получим:

$$\hat{z}(m_1, m_2) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k_1=0}^{N-1} z(k_1) \beta^{k_1 m_1} \right\},$$

где

$$\mathfrak{F}(m_1, m_2) = \begin{cases} \mathfrak{F}(m_1, 1) & \text{при } (m_1, 1) \in M_{II} \\ \mathfrak{F}(N - m_1, 3) & \text{при } (m_1, 3) \in M_{II} \end{cases},$$

$$z(k_1) = Y(k_1, k_2) i^{k_2} \text{ при } (k_1, k_2) \in K_{II}.$$

Здесь значения входной последовательности $z(k_1)$ являются вещественными или чисто мнимыми, что позволяет использовать несложную модификацию вещественного ДПФ с несколько увеличенным числом умножений. Выполнение такого алгоритма ДКП-II требует

$$M_{II}(N) \leq 2N \log_3 N - 2N,$$

$$A_{II}(N) \leq 3N \log_3 N - \frac{2N}{3},$$

$$S_{II}(N) \leq 5N \log_3 N - \frac{8N}{3}$$

операций умножения, сложения и всего арифметических операций, соответственно.

3. Алгоритм вычисления ДКП-III

Рассмотрим ДКП-III:

$$\hat{x}_{III}(m) = \sum_{n=0}^N x(n) \cos\left(\pi \frac{nm}{N}\right). \quad (9)$$

Отметим, что длина этого преобразования равна $N+1$, однако оно может быть сведено к вещественному ДПФ длины $2N$ следующим простым приемом. Так как при $n=N$ справедливо равенство

$$\cos\left(\pi \frac{nm}{N}\right) = \cos\left(\pi \frac{Nm}{N}\right) = \cos(\pi m) = (-1)^m,$$

то

$$\begin{aligned} \hat{x}_{III}(m) &= \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\pi \frac{nm}{N}\right) + (-1)^m x(N) = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{2N-1} y(n) \omega^{nm} \right\} + (-1)^m x(N), \end{aligned}$$

где $\omega = \exp\left\{\frac{2\pi i}{2N}\right\}$,

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & \text{при } 0 \leq n < N; \\ 0 & \text{при } N \leq n < 2N. \end{cases}$$

Таким образом, вычисление ДКП-III длины $N+1$ отличается от вычисления ДПФ вещественной последовательности длины $2N$ только N вещественными сложениями и, при использовании упомянутого

выше БА ДПФ при $N=3^r$, для вычислительной сложности ДКП-III справедливы неравенства:

$$M_{III}(N) \leq 2N \log_3 N - 2N,$$

$$A_{III}(N) \leq 6N \log_3 N - \frac{7N}{3},$$

$$S_{III}(N) \leq 8N \log_3 N - \frac{13N}{3}.$$

4. Сравнение сложности алгоритмов

Рассмотрим более подробно сложность описанных алгоритмов при малых длинах N .

Как уже отмечалось во введении, специфические свойства ДКП делают его привлекательным при решении ряда задач цифровой обработки изображений, в частности, в задачах распознавания образов (для вычисления локальных признаков на изображении) и сжатия данных (при блочном формировании трансформант). Таким образом, используется ДКП сравнительно небольших размеров. Приведем точные оценки количества арифметических операций, необходимых для вычисления ДКП-I-IV длины $N=9, 27$.

Преобразование Фурье с представлением данных в форме (3) при $N=9$ требует всего 6 вещественных умножений и 38 сложений; при $N=27$ требуется 42 умножения и 194 сложений. Дополнительно при переходе от представления комплексных чисел в форме (3) к алгебраической форме при вычислении ДКП-I и IV длины N необходимо $\frac{N-1}{2}$ операций вещественного умножения и N операций вещественного сложения, для ДКП-II и III - только N операций сложения.

Арифметическая сложность рассмотренных алгоритмов для $N=9$ и 27 приведена в таблице 1.

Таблица 1.

| N | ДКП-I | | | ДКП-II | | | ДКП-III | | | ДКП-IV | | |
|----|-------|------|------|--------|------|------|---------|------|------|--------|------|------|
| | M(N) | A(N) | S(N) | M(N) | A(N) | S(N) | M(N) | A(N) | S(N) | M(N) | A(N) | S(N) |
| 9 | 10 | 56 | 66 | 12 | 56 | 68 | 12 | 94 | 106 | 10 | 74 | 84 |
| 27 | 55 | 248 | 303 | 86 | 248 | 334 | 84 | 442 | 526 | 55 | 302 | 357 |

В таблице 2 для сравнения приведено число операций для выполнения ДКП-I близких длин при $N=2^r$ традиционным способом сведения к ДПФ вещественной последовательности двойной длины:

Реальные затраты машинного времени на выполнение блочного ДКП размера $N \times N$ (при построено-столбцовом способе формирования двумерного преобразования) для обработки изображения размером 1024×1024 отсчета приведены на рис.5. (Время приводится в условных единицах, все алгоритмы тестировались в одинаковых условиях).

Таблица 2.

| N | ДКП-I | | |
|----|-------|------|------|
| | M(N) | A(N) | S(N) |
| 8 | 15 | 79 | 94 |
| 16 | 51 | 221 | 272 |
| 32 | 147 | 551 | 698 |

Здесь 1 - время обработки изображения при использовании ДКП-I, 2 - ДКП-II, 3 - ДКП-III, 4 - ДКП-IV и 5 - время обработки при использовании ДКП-I длины $N=2^r$, выполненного традиционным способом [1].

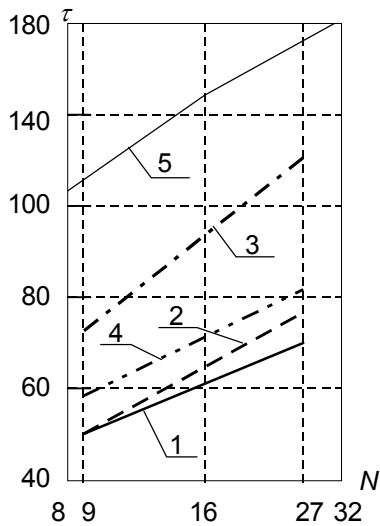


Рис. 5.
Заключение

В данной работе разработаны алгоритмы ДКП-II, III и IV нечетной длины N . Приведены оценки вычислительной сложности алгоритмов при $N = 3^r$, проведено сравнение их быстродействия при малых длинах $N = 9, 27$. Показаны преимущества синтезированных алгоритмов перед традиционным ДКП-I четной длины при близких значениях N .

Рассмотренные алгоритмы ДКП являются основой для синтеза построчно - столбцовых алгоритмов двумерных дискретных косинусных преобразований. Для синтеза БА ДКП, существенно использующих двумерность и вещественность входных данных, возможно применение методики работы [6], в основе которой лежит представление данных в виде элементов алгебры кватернионов [10]. Вычислительная сложность таких алгоритмов определяется, в основном, сложностью соответствующих БА ДПФ, подробно исследованных в работе [11] автора.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект N95-01-00367).

Литература

1. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов М.: Связь, 1980.
2. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений - М.: Советское радио, 1979.
3. Чернов В.М. Арифметические аспекты задачи синтеза быстрых алгоритмов ДОП типа Винограда // Труды Пятого Международного Семинара "Распределенная обработка информации" - Новосибирск, 1995. - С. 296-300.
4. Heideman Michael T. Computation of an odd-length DCT from a real-valued DFT of the same length // IEEE Trans. Signal Process., 40, N1, 1992, pp.54-61.
5. Чернов В.М. Быстрый алгоритм дискретного косинусного преобразования нечетной длины // Автомат. и вычисл. техн., N3, 1994, с.62-70.
6. Чернов В.М. Алгоритмы двумерных дискретных ортогональных преобразований, реализуемые в кодах Гамильтона-Эйзенштейна // Проблемы Передачи Информации, 31, N3, 1995, с.38-46.
7. Wang Z. Fast algorithms for discrete W transform and for the discrete Fourier transform // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-32, pp. 803-816, Aug. 1984
8. Ersoy O.K. Transform image enhancement // Optical Engineering, 31, N3, 1992, pp.614-626.
9. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. - М.: Мир, 1989.
10. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. - М.: Наука, 1976.
11. Перишина М.В., Чичева М.А. Декомпозиция двумерного ДПФ с представлением данных в алгебре кватернионов // Компьютерная оптика, Выпуск 14-15, 1995, Часть 2, с. 13-21.