

ПРАКТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ФОКУСАТОРОВ В ЛИНИЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

Л.Л. Досколович, С.И. Харитонов
Институт систем обработки изображений РАН.

Для широкого спектра технологических задач требуется фокусировка лазерного излучения в заданную линию. Для фокусировки в линию были созданы дифракционные фазовые оптические элементы, названные фокусаторами [1-4]. Расчет фокусаторов проводится в приближении геометрической оптики. Ввиду сложности решения обратной задачи фокусировки, фазовые функции фокусаторов получены только для случаев фокусировки в простые линии, такие как отрезок, кольцо, полукольцо. При фокусировке в более сложные кривые расчет фазы фокусатора является неординарной задачей, включающей решение сложных нелинейных уравнений.

В данной работе рассмотрен метод расчета фокусаторов в криволинейной системе координат, согласованной с видом фокальной кривой. Предлагаемые криволинейные координаты существенно упрощают расчет и позволяют предложить простой численный алгоритм расчета фокусаторов для произвольной фокальной линии.

Для описания задач, возникающих при расчете фокусаторов [1-4], рассмотрим предварительно стандартную процедуру расчета фазовой функции фокусатора в линию для пучка с распределением интенсивности $I_0(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in G$, где $\mathbf{u}=(u,v)$ - декартовы координаты в плоскости фокусатора (при $z=0$), G - апертура фокусатора. Фокальную линию в плоскости фокусировки $z=f$ определим параметрическим уравнением

$$\mathbf{X}(\xi) = (X(\xi), Y(\xi)), \xi \in [0, L]$$

где ξ - натуральный параметр, а распределение линейной плотности энергии вдоль линии фокусировки - функцией $I(\xi), \xi \in [0, L]$.

Фазовая функция фокусатора в параксиальном приближении имеет вид [1-4]:

$$\varphi(\mathbf{u}) = -\frac{k\mathbf{u}^2}{2f} + \varphi_D(\mathbf{u}) \quad (1)$$

где

$$\varphi_D(\mathbf{u}) = \frac{k}{f} \int_{u_0}^u X(\xi(u, v_0)) du + \frac{k}{f} \int_{v_0}^v Y(\xi(u, v)) dv \quad (2)$$

где $k=2\pi/\lambda$ - волновое число.

Функция $\xi(\mathbf{u})$ в (2) описывает лучевое соответствие между точками (u,v) апертуры фокусатора G и точками фокальной кривой. В работах [1-4] показано, что в каждую точку $(X(\xi), Y(\xi))$ кривой приходят лучи с линии $\Gamma(\xi)$ на фокусаторе, называемой слоем. В параксиальном приближении слоями являются прямые, перпендикулярные линии фокусировки. Таким образом уравнение слоя $\Gamma(\xi)$ имеет вид

$$u \frac{dX(\xi)}{d\xi} + v \frac{dY(\xi)}{d\xi} = p(\xi) \quad (3)$$

и является базовым уравнением для определения функции $\xi(\mathbf{u})$ в (2). Функция $p(\xi)$ в (3) является расстоянием от начала координат до слоя $\Gamma(\xi)$ и определяется из условия формирования заданного распределения линейной плотности $I(\xi), \xi \in [0, L]$ вдоль линии фокусировки. Конкретный вид функции $p(\xi)$ определяется из уравнения сохранения светового потока:

$$\int_{(\Gamma(0), \Gamma(\xi))} I_0(\mathbf{u}) d^2\mathbf{u} = \int_0^\xi I(\eta) d\eta \quad (4)$$

где область интегрирования $(\Gamma(0), \Gamma(\xi))$ соответствует части апертуры G фокусатора, заключенной между начальным слоем $\Gamma(0)$, являющимся касательной к апертуре и текущим слоем $\Gamma(\xi)$.

Таким образом стандартный алгоритм расчета фазовой функции фокусатора имеет вид:

1. Расчет функции $p(\xi)$ из уравнения (4)
2. Расчет функции $\xi(\mathbf{u})$ из уравнения (3)
3. Расчет фазовой функции по формуле (1)

Аналитический расчет фазовой функции фокусатора возможен лишь для простейших линий фокусировки таких как отрезок и окружность. В общем случае пункты 1), 2) алгоритма являются сложными вычислительными задачами, состоящими в решении нелинейных уравнений. При этом пункт (2) требует решения нелинейного уравнения для каждой точки \mathbf{u} апертуры фокусатора. Выполнение пункта 3) алгоритма также основано на операции двумерного численного интегрирования.

Расчет фокусатора существенно упрощается при использовании следующей криволинейной системы координат:

$$\begin{cases} u(\xi, t) = p(\xi) \frac{dX(\xi)}{d\xi} - t \cdot \frac{dY(\xi)}{d\xi} \\ v(\xi, t) = p(\xi) \frac{dY(\xi)}{d\xi} + t \cdot \frac{dX(\xi)}{d\xi} \end{cases} \quad (5)$$

Система координат (5) связана со слоями на фокусаторе и выражает координаты (u,v) через координату ξ , определяющую слой $\Gamma(\xi)$, содержащий данную точку и координату t , определяющую положение точки на слое. Отметим, что координата t является расстоянием от точки слоя $(u(0,t), v(0,t))$, являющейся точкой пересечения слоя и нормали к слою, до текущей точки слоя. В последующем изложении мы ограничимся рассмотрением практически важного случая фокусировки в кривую радиальных пучков;

$$I_0(\mathbf{u}) = I_0(u^2 + v^2) |\mathbf{u}| \leq R \quad (6)$$

где R - радиус апертуры фокусатора.

Для радиально-симметричных пучков закон сохранения светового потока (4) в координатах (ξ, t) может быть представлен в компактной дифференциальной форме:

$$dp(\xi) \frac{\sqrt{R^2 - p^2(\xi)}}{-\sqrt{R^2 - p^2(\xi)}} \int_{I_0(p^2(\xi) + t^2)} dt = I(\xi) d\xi \quad (7)$$

Поскольку интеграл в (7) обращается в ноль при $p(0), p(L) = \pm R$, то уравнение (7) следует решать относительно функции $\xi(p)$. Согласно (7), расчет $\xi(p)$ состоит в решении дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной и может быть проведен с использованием стандартного метода Рунге-Кутты. Далее вычисление $p(\xi)$ состоит в обращении гладкой однозначной функции $\xi(p)$.

Основное преимущество в использовании координат (ξ, t) состоит в возможности прямого вычисления фазы фокусатора без расчета функции $\xi(\mathbf{u})$, состоящего в решении нелинейного уравнения для каждой точки \mathbf{u} апертуры фокусатора. Действительно, из уравнений (1), (5) несложно получить частные производные функции $\varphi_D(\mathbf{u})$ (2) в переменных (ξ, t) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_D(\xi, t)}{\partial \xi} &= \frac{k}{f} X(\xi) \cdot \left[\frac{dp(\xi)}{d\xi} \frac{dX(\xi)}{d\xi} + p(\xi) \times \right. \\ &\times \left. \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} - t \frac{d^2 Y(\xi)}{d\xi^2} \right] + \frac{k}{f} Y(\xi) \times \\ &\times \left[\frac{dp(\xi)}{d\xi} \frac{dY(\xi)}{d\xi} + p(\xi) \frac{d^2 Y(\xi)}{d\xi^2} + t \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_D(\xi, t)}{\partial t} = \frac{k}{f} \left[\frac{dX(\xi)}{d\xi} Y(\xi) - X(\xi) \frac{dY(\xi)}{d\xi} \right] \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) позволяют представить фазовую функцию фокусатора в переменных (ξ, t) в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, t) &= -\frac{k}{2f} (p^2(\xi) + t^2) + \\ &+ \frac{k}{f} \left[\frac{dX(\xi)}{d\xi} Y(\xi) - X(\xi) \frac{dY(\xi)}{d\xi} \right] \cdot t + \\ &+ \frac{k}{f} \left[\frac{dX(\xi)}{d\xi} X(\xi) + \frac{dY(\xi)}{d\xi} Y(\xi) \right] p(\xi) - \\ &- \frac{k}{f} \int_0^\xi p(\eta) d\eta \quad (10) \end{aligned}$$

Согласно уравнениям (7), (10) расчет фазы фокусатора в переменных (ξ, t) сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка, об-

ращению полученного решения и одномерному интегрированию функции $p(\xi)$.

Операция изготовления фотошаблона фокусатора на литографе или лазерном фотопостроителе предполагает использование декартовых или полярных координат. Согласно (10), при фиксированном значении ξ фазовая функция вдоль слоя соответствует суперпозиции фазовых функций линзы и призмы. Это позволяет интерпретировать фокусатор как набор цилиндрических линз и призм, ориентированных вдоль слоев $\Gamma(\xi)$. При этом для точек $\mathbf{u} \in \Gamma(\xi)$ фазовая функция имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{u}) = -\frac{k\mathbf{u}^2}{2f} + \frac{k}{f} (uX(\xi) + vY(\xi)) + c(\xi) \quad (11)$$

где

$$c(\xi) = -\frac{k}{f} \int_0^\xi p(\eta) d\eta.$$

Согласно (11), для расчета фазовой функции (10) в декартовых координатах (u, v) достаточно построить систему из N слоев (3) по функции $p(\xi)$. При этом система слоев $\Gamma(\xi_n), n=1, N$ определит разбиение апертуры фокусатора на N сегментов G_n . Далее, для вычисления фазы фокусатора в точке \mathbf{u} достаточно найти сегмент G_n , содержащий данную точку и воспользоваться формулой (11). Отметим, что поиск сегмента G_n , содержащего данную точку \mathbf{u} , сводится к тривиальным операциям определения положения точки относительно прямых.

Проведенный анализ структуры фазы фокусатора вдоль слоев позволяет предложить следующий простой алгоритм расчета фазовой функции фокусатора:

1. Расчет функции $p(\xi)$ из уравнения (7).
2. Переход к декартовым (или полярным) координатам с введением дискретной системы слоев и последующим расчетом фазы в сегментах по формуле (11).

В качестве примера для разработанного метода рассмотрим расчет фокусатора плоского пучка круглого сечения радиуса R в дугу окружности с постоянной линейной плотностью. Параметрическое уравнение дуги имеет вид:

$$\begin{cases} X(\xi) = R_1 \cos((\xi - R_1 \alpha / 2) / R_1) \\ Y(\xi) = R_1 \sin((\xi - R_1 \alpha / 2) / R_1) \end{cases} \xi \in [0, R_1 \alpha] \quad (12)$$

где R_1 - радиус дуги, α - угловой размер дуги.

Из закона сохранения светового потока (7) несложно получить функцию $\xi(p)$ в виде:

$$\xi(p) = \frac{R_1 \alpha}{\pi} \left(\arcsin\left(\frac{p}{R}\right) + \frac{p}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{R}\right)^2} \right) \quad (13)$$

Подставляя (12) в (5), (10) получим фазовую функцию фокусатора в дугу в виде:

$$\varphi(\xi, t) = -\frac{k}{2f} (p^2(\xi) + t^2) - \frac{k}{f} \left(t \cdot R_1 + \int_0^\xi p(\eta) d\eta \right) \quad (14)$$

Простой вид полученной фазы (14) демонстрирует достоинство криволинейной системы (5). Расчет фазы (14) сводится к выполнению только двух простых численных операций обращения функции (13) и ее одномерного интегрирования.

На рис.1 приведено полутоновое изображение фазовой функции фокусатора, рассчитанной как дополнение к линзе, для следующих параметров $\lambda=0.63\text{мкм}$, $f=500\text{мм}$, $R=5\text{мм}$, $R_1=1.25\text{мм}$, $\alpha=\pi/2$. Для расчета фазы (14) в декартовых координатах была построена система из 200 слоев по функции $p(\xi)$, найденной из уравнения (13) с последующим использованием формулы (11). Полутоновое распределение интенсивности, формируемое фокусатором на рис.1, приведено на рис.2 и демонстрирует работоспособность разработанного метода.

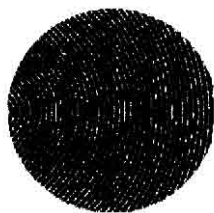


Рис. 1. Фазовая функция фокусатора для фокусировки в дугу окружности



Рис. 2. Распределение интенсивности в плоскости фокусировки, формируемое фокусатором на рис. 1

Благодарность

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96026)

Литература.

1. Голуб М.А., Карпсев С.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Фокусировка когерентного излучения в заданную область пространства с помощью синтезированных на ЭВМ голограмм. // Письма в ЖТФ, 1981, т.7, N_10, с.618-623.
2. Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сагателян Д.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Синтез оптических элементов, создающих фокальную линию произвольной формы. // Письма в ЖТФ, 1982, т.8, N_13, с.810-815.
3. Гончарский А.В., Попов В.В., Степанов В.В. *Введение в компьютерную оптику*. М., Изд-во МГУ, 1991, 309 с.
4. V. Soifer, V. Kotlyar, L. Doskolovich. *Iterative methods for diffractive optical elements computation*. Taylor&Francis, London, 1997, p. 244.