БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ДИСКРЕТНОГО ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, РЕАЛИЗУЕМОГО В СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ

Д.В.Соболев
Институт систем обработки изображения РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара,
e-mail: dsobolev@mail.radiant.ru

В статье рассматривается обобщение дискретных ортогональных преобразований (преобразования Фибоначчи), введенных С.С. Агаяном и Н.Н. Айзенбергом. Рассматриваемые преобразования ориентированы на представление данных в рекуррентных системах счисления с иррациональным основанием и не требуют для реализации умножений.

1. Введение

Одним из наиболее фундаментальных и полезных средств цифровой обработки сигналов является аппарат быстрых ортогональных преобразований (БОП). Целесообразность БОП при обработке сигналов в целом обосновывается тем, что БОП обладают рядом желательных свойств для алгоритмов обработки сигналов-изображений (независимость обработки строк и столбцов при двумерной обработке, линейность операций над данными, инвариантность к сдвигу и др.). Необходимо выделить также следующие преимущества БОП:

1. Аппарат БОП позволяет выделить набор определенных стандартных операций, из которых, как из готовых блоков, можно строить алгоритмы (устройства) для решения широкого класса задач.

2. Ортогональные преобразования обладают полезным свойством сохранения энергии, легко обратимы. Искажения, вызванные процессом квантования, и канальные ошибки распределяются по всему изображению, и тем самым становится менее ощутимым их влияние на качество изображений.

В качестве одной из основных задач дискретных спектральных преобразований отметим следующую:

Задача. Найти такое дискретное ортогональное преобразование (ДОП) для данного класса сигналов (N-размерные случайные векторы), чтобы сигнал, восстановленный по M ($M < N$) компонентам спектра, имел минимальное (в смысле среднеквадратического) отклонение от входного.

Известно, что аналитическим решением этой задачи является базис Карунена - Лоэва (К. - Л.), состоящий из собственных функций ковариационной матрицы **K**. Базис К. - Л., однако, не используется в прикладных задачах, поскольку требует $O(N^3)$ операций для определения собственных функций **K** и $O(N^2)$ операций для выполнения самого преобразования.

Поэтому в практических задачах предпочтение отдается таким дискретным преобразованиям, для которых существуют быстрые алгоритмы (Фурье, Хартли, Адамар и т.д.). Конечно, указанные преобразования для определенных классов сигналов могут совпадать с преобразованиями К. - Л.. Однако предпочтение отдается все же их свойствам, связанным со скоростью реализации.

Любой новый класс ДОП с наличием быстрого алгоритма (БА) расширяет возможности оптимальным образом обрабатывать сигналы соответствующего класса. В настоящей работе рассматривается обобщение ДОП, введенного Агаяном и Айзенбергом [1, 2]. Ортогональность преобразования гарантируется свойствами (обобщенных) последовательностей Фибоначчи.

Конечно, рассматриваемые преобразования не являются всеобщей альтернативой классическим ДОП, но в ряде практических задач они могут оказаться (и оказываются) полезными.

Преобразования Агаяна и Айзенберга (далее АА-преобразования) требуют для реализации $O(N)$ арифметических операций (для сравнения отметим, что большинство быстрых алгоритмов дискретного преобразования Фурье выполняются за $O(N \log N)$ арифметических операций). Несмотря на невысокую сложность, не все преимущества последовательностей Фибоначчи и их обобщений, по нашему мнению, учтены в полной мере в структуре преобразований работ [1] и [2].

2. Преобразования Агаяна и Айзенберга

Приведем краткий обзор основных свойств АА-преобразований, позволяющий более ясно понять особенности предлагаемого в данной работе обобщения.

Преобразование Фибоначчи. Пусть α, β - - положительные вещественные числа, $\{\varphi_k\}$ - последовательность чисел, и пусть для любого n выполняется соотношение:

$$\varphi_n \varphi_{n+1} = \alpha \sum_{k=1}^{n} \beta^{n-k} \varphi_k^2 . \qquad (1)$$

Пусть

$$
\boldsymbol{\Phi}_n(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix}
\frac{\alpha\varphi_1}{\sqrt{\varphi_1\varphi_3}} & -\frac{\sqrt{\beta}\varphi_1}{\sqrt{\varphi_1\varphi_3}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\frac{\alpha\sqrt{\beta}\varphi_1}{\sqrt{\varphi_2\varphi_4}} & \frac{\alpha\varphi_2}{\sqrt{\varphi_2\varphi_4}} & -\frac{\sqrt{\beta}\varphi_2}{\sqrt{\varphi_2\varphi_4}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\
\frac{\alpha(\sqrt{\beta})^{n-2}\varphi_1}{\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}} & \frac{\alpha(\sqrt{\beta})^{n-2}\varphi_2}{\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}} & \dots\dots & \dots\dots & \frac{\alpha\varphi_{n-1}}{\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}} & -\frac{\alpha\sqrt{\beta}\varphi_{n-1}}{\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}} & 0 \\
\frac{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\beta})^{n-1}\varphi_1}{\sqrt{\varphi_n\varphi_{n+1}}} & \frac{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\beta})^{n-2}\varphi_2}{\sqrt{\varphi_n\varphi_{n+1}}} & \dots\dots & \dots\dots & \frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\varphi_{n-1}}{\sqrt{\varphi_n\varphi_{n+1}}} & \frac{\sqrt{\alpha}\varphi_n}{\sqrt{\varphi_n\varphi_{n+1}}} & -5
\end{bmatrix}.
$$

В [1] доказано, что соотношение (1) гарантирует ортогональность матрицы $\boldsymbol{\Phi}_N(\alpha,\beta)$.

Пример 1. Числа Фибоначчи, а именно числа $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, $\varphi_k = \varphi_{k-1} + \varphi_{k-2}$, $k \geq 3$, удовлетворяют условию

$$
\varphi_n\varphi_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2 . \tag{2}
$$

При этом $\alpha = \beta = 1$ и матрица $\boldsymbol{\Phi}_N(\alpha,\beta) = \boldsymbol{\Phi}_N(1,1)$ имеет более простой вид. К примеру, для $N = 8$:

$$
\Phi_8(1,1)=\begin{bmatrix}
1/\sqrt{2} & (1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0) \\
1/\sqrt{3} & (1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0) \\
1/\sqrt{10} & (1 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0) \\
1/\sqrt{24} & (1 & 1 & 2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0) \\
1/\sqrt{65} & (1 & 1 & 2 & 3 & 5 & -5 & 0 & 0) \\
1/\sqrt{168} & (1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & -8 & 0) \\
1/\sqrt{442} & (1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & -13) \\
1/\sqrt{714} & (1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21)
\end{bmatrix}.
$$

Замечание 1. В предыдущей формуле символическая запись строки $1/\sqrt{2}\,(1\ -1\ 0\ 0\ \dots\ 0)$ означает $1/\sqrt{2}\quad -1/\sqrt{2}\quad 0\quad 0\quad \dots\quad 0$.

Так как матрица $\boldsymbol{\Phi}_N(\alpha,\beta)$ ортогональна, то $\boldsymbol{\Phi}_N^{-1}(\alpha,\beta) = \left(\boldsymbol{\Phi}_N(\alpha,\beta)\right)^{\mathrm{T}}$, где T - знак транспонирования.

Следовательно, преобразования

$$
\widetilde{X}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f_{mn}(\alpha,\beta)x(n), \tag{3}
$$

$$
x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f_{mn}(\alpha,\beta)\widetilde{X}(m), \tag{4}
$$

где $f_{mn}(\alpha, \beta)$ – элементы матрицы $\boldsymbol{\Phi}_N(\alpha,\beta)$, являются взаимнообратными.

Вычисление преобразования (3) (или (4)) требует ($4N$-3) арифметических операций (см. [3]).

3. Обобщенное преобразование Агаяна и Айзенберга

3.1 Представление данных в рекуррентной системе исчисления с иррациональным основанием.

Пусть $g(n)$ - возрастающая последовательность действительных (или комплексных) чисел, удовлетворяющая соотношению

$$
\begin{aligned}
g(n) &= c_1 g(n-1) + c_2 g(n-2) + \cdots + \\
&+ c_t g(n-t), \qquad n \in \mathbf{Z}
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
c_j \in \{0,1\} \quad j = 1,2,\dots,t, \qquad c_t \neq 0
$$

Как известно [4], общее решение соотношения (5) определяется корнями его характеристического уравнения:

$$
P(z) = z^t - c_1 z^{t-1} - \cdots - c_t = 0 \tag{6}
$$

и начальными значениями $g(0),\dots,g(t\text{-}1)$.

В частности, если все решения $\omega_1,\dots,\omega_t$ уравнения [6] различны, то все решения соотношения (5) могут быть представлены в форме

$$
g(n) = \delta_1\omega_1^n + \cdots + \delta_t\omega_t^n ,
$$

с некоторыми $\delta_1,\dots,\delta_t \in \mathbf{C}$, однозначно определяемыми начальными условиями $g(0),\dots,g(t\text{-}1)$.

В данной работе мы рассматриваем только $\delta_1 = 1$; $\delta_j = 0$ при $j \geq 2$.

Теорема 1. Многочлен

$$
P(z) = z^t - c_1 z^{t-1} - \cdots - c_t ,
$$

где $c_j \in \{0,1\}$ $j = 1,2,\dots,t$, имеет хотя бы один корень $\omega \in \mathbf{R}$ такой, что $1 < \omega < 2$, если по крайней мере два его коэффициента c_j не равны нулю.

Доказательство. Рассмотрим значения $P(t)$ на границах интервала (1, 2):

$$
P(1) = 1 - c_1 - c_2 - \cdots - c_{k-1} - c_k < 0
$$

Так как

$$
\begin{aligned}
P(2) &= 2^k - 2^{k-1}c_1 - 2^{k-2}c_2 - \dots - \\
&- 2c_{k-1} - c_k \geq 2^k - \left(2^{k-1} - 2^{k-2} - \dots - 2 - 1\right),
\end{aligned}
$$

$$
P(2) \geq 2^k - \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 1 > 0
$$

и $P(t)$ - непрерывная функция, то существует некоторое $\omega \in (1, 2)$ такое, что $P(\omega) = 0$.

Замечание 2. Так как $c_t = 1$, то многочлен $P(t)$ может иметь целые корни, равные только (± 1). Таким образом корень ω – иррациональное число.

В работе [7] введено следующее определение (см. также [11]-[13]).

Определение 1. Пусть $\omega \in (1, 2)$. Если есть иррациональный корень характеристического многочлена $P(z)$ теоремы 1, любое натуральное число может быть представлено в форме

$$h = \eta_s \omega^s + \eta_{s-1} \omega^{s-1} + \cdots + \\ + \eta_0 \omega^0 + \cdots + \eta_u \omega^{-u} + \cdots; \qquad (\eta_s = 0,\ 1), \tag{7}$$

то последовательность $\{\omega^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ называется базисом системы счисления с иррациональным основанием.

Определение 2. Бинарный вектор

$$(\eta_s,\ \eta_{s-1},\ \ldots,\ \eta_0;\ \eta_{-1},\ \ldots,\ \eta_{-u}), \\ \eta_j = 0, 1, \tag{8}$$

определеяемый из соотношения (7) будем называть ω-кодом целого *h*.

Арифметические операции над числами, представленными ω-кодами, реализуются достаточно просто: умножение на ω - это сдвиг кода

$$(0,\ \eta_s,\ \eta_{s-1},\ \ldots,\ \eta_{-u}) \to \\ \to (\eta_s,\ \eta_{s-1},\ \ldots,\ \eta_{-u}\ \ 0).$$

Сложения осуществляются по правилам, аналогичным рассмотренным в [6]: например, для кодов золотого сечения с заменой основного соотношения $\omega^2 = \omega + 1$ на $\omega^t = \omega^{t-1} c_1 + \cdots + c_0$.

(Это обобщение операций "свертки" и "развертки" кодов [6]).

Умножение чисел общего класса в ω-кодах сводится к сдвигам кодов и сложениям.

Ясно, что минимальная сложность таких операций достигается если только два коэффициента $c_j \neq 0$.

<u>3.2. Обобщенное преобразование Агаяна-Айзенберга с представлением данных в ω-кодах.</u>

Представим обобщенные дискретные преобразования Фибоначчи (3)-(4) с матрицей

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f(0) & \kappa(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f(0) & f(1) & \kappa(1) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(0) & f(1) & f(2) & \cdots & f(n) & \kappa(n) & 0 & \cdots & 0 \\ f(0) & f(1) & f(2) & \cdots & f(n) & f(n+1) & \kappa(n+1) & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(0) & f(1) & f(2) & \cdots & f(n) & f(n+1) & f(n+2) & \cdots & f(N-1) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

элементы которой сформированы на основе обобщенного рекуррентного соотношения (5) при $f(n) = \omega^n$, $1 < \omega < 2$.

Назовем числа $\kappa(n)$ компенсаторами, гарантирующими ортогональность преобразования.

Теорема 2. Если

$$\kappa(n) = -\frac{\omega^{n+1} - \omega^{-n-1}}{\omega^2 - 1}, \tag{10}$$

то строки матрицы $\mathbf{F}$ ортогональны.

Доказательство: Пусть F_k - k-ая строка матрицы $\mathbf{F}$. Необходимое и достаточное условие ортогональности строк матрицы:

$$\left(F_i, F_j\right) = 0, \forall i \neq j,$$

где $\left(F_i, F_j\right)$ - скалярное произведение соответствующих строк матрицы $\mathbf{F}$. Это равносильно равенству

$$\sum_{k=0}^{n} f^2(k) = f(n+1)\kappa(n). \tag{11}$$

Тогда при $f(k) = \omega^k$ мы получаем условие (10).

Предложение 1. Справедливо равенство

$$(F_k, F_k) = \frac{\left(\omega^{k+3} - \omega^{-k-1}\right)\left(\omega^{k+1} - \omega^{-k-1}\right)}{\left(\omega^2 - 1\right)^2}.$$

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что:

$$(F_k, F_k) = \sum_{i=0}^{k} f^2(i) + \kappa^2(k) = \\ = \kappa(k)(f(k+1) + \kappa(k)) = \\ = \frac{\left(\omega^{k+1} - \omega^{-k-1}\right)}{\left(\omega^2 - 1\right)} \left(\omega^{k+1} + \frac{\omega^{k+3} - \omega^{-k-1}}{\omega^2 - 1}\right) = \\ = \frac{\left(\omega^{k+3} - \omega^{-k-1}\right)\left(\omega^{k+1} - \omega^{-k-1}\right)}{\left(\omega^2 - 1\right)^2}.$$

Замечание 3. Преобразование (3) с матрицей (9) не ортогонально, но оно становится ортогональным при делении строк матрицы $\mathbf{F}$ на нормализующие коэффициенты:

$$A_n = \frac{\sqrt{\left(\omega^{n+3} - \omega^{-n-1}\right)\left(\omega^{n+1} - \omega^{-n-1}\right)}}{\omega^2 - 1},$$

при $n = 0, \ldots, N-2$

$$A_{N-1} = \sqrt{\frac{\omega^{2N} - 1}{\omega^2 - 1}}.$$

Так как матрица **F** в (9) может быть представлена в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{DU},$$

где **U** – ортогональная матрица, **D** - диагональная матрица $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(A_0, \ \ldots, \ A_{N-1})$, то

$$\mathbf{FF}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{DU})(\mathbf{DU})^{\mathrm{T}} = \mathbf{DUU}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \mathbf{DUU}^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{D}^2$$

.

Пусть $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ и $\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}$ - входной и выходной векторы-столбцы:

$$\mathbf{X} = (x(0), \ \ldots, \ x(N-1)),$$

$$\widetilde{\mathbf{X}} = (\widetilde{x}(0), \ \ldots, \ \widetilde{x}(N-1)).$$

Тогда преобразования

$$\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{D}^2\right)^{-1}\mathbf{F}\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

взаимно обратимы.

Определение 3. Назовем преобразования (12) обобщенными преобразованиями Агаяна-Айзенберга (ОАА-преобразованиями).

3.3. Один важный специальный случай.

Умножение матрицы **F** на входной вектор **X** реализуется в ω-кодах "почти" без умножений. Умножение чисел при представлении в ω-кодах имеет место только при умножении на компенсаторы $\kappa(n)$ и нормализующие коэффициенты A_n.

Предложение 2. Пусть

$$g(n+2) = g(n) + g(n-q), \qquad q \geq 1. \tag{13}$$

Тогда умножение на компенсатор $\kappa(n)$ реализуется в ω-кодах без вещественных умножений.

Доказательство. В рассматриваемом случае:

$$\omega^{q+2} = \omega^q + 1 \text{ или } \omega^2 - 1 = \omega^{-q}.$$

Таким образом

$$\kappa(n) = \frac{\omega^{n+1} - \omega^{-n-1}}{\omega^2 - 1} = \omega^{n+1+q} - \omega^{-n-1+q}.$$

Пример 2. Пусть $q = -1$, $g(0) = 1$, $g(1) = \alpha = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Тогда соотношение (13) есть соотношение Фибоначчи связанное с системами счисления "золотого сечения". В этом случае реализация преобразования (12) свободно от умножений при использовании канонического процессора "золотого сечения" [9].

Пример 3. Пусть $q = 2$, $g(0) = 1$, $g(1) = \sqrt{\alpha}$, $g(2) = \alpha$, $g(3) = \alpha\sqrt{\alpha}$. Тогда преобразования (12) могут реализовываться без умножений посредством двух параллельных процессоров "золотого сечения" (Отдельно для "однозначных чисел" с четными и нечетными индексами).

Так класс ω-кодов образованный соотношением (13) включает коды "золотого сечения" и является альтернативой для p-кодов "золотого сечения" введенных А.П. Стаховым.

Определение 4. Назовем ω-код, порожденный соотношением (13), q-кодом "золотого сечения".

Определение 5. Назовем преобразования (12), где ω удовлетворяет (13), q – преобразованиями "золотого сечения".

Отметим, что арифметические операции в q-кодах реализуются не более сложно, чем в "p-кодах" работы [6]. Но преимущество первых заключается в максимальной адаптации системы счисления к реализации именно обобщенных АА-преобразований.

3.4. Пример обобщенного преобразования Агаяна-Айзенберга для $\omega = \sqrt{2}$, N = 8.

В случае $\omega = \sqrt{2}$ и $N = 8$ матрица ОАА-преобразования (9) примет следующий вид:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix}
1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \sqrt{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \sqrt{2} & 2 & -\frac{7}{4}\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} & -\frac{15}{4} & 0 & 0 & 0 \\
1 & \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} & 4 & -\frac{31}{8}\sqrt{2} & 0 & 0 \\
1 & \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} & 4 & 4\sqrt{2} & -\frac{63}{8} & 0 \\
1 & \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} & 4 & 4\sqrt{2} & 8 & -\frac{127}{16}\sqrt{2} \\
1 & \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} & 4 & 4\sqrt{2} & 8 & 8\sqrt{2}
\end{pmatrix},$$

элементы которой получены из соотношения $f(n) = \left(\sqrt{2}\right)^n$. Заметим, что $1 < \sqrt{2} < 2$.

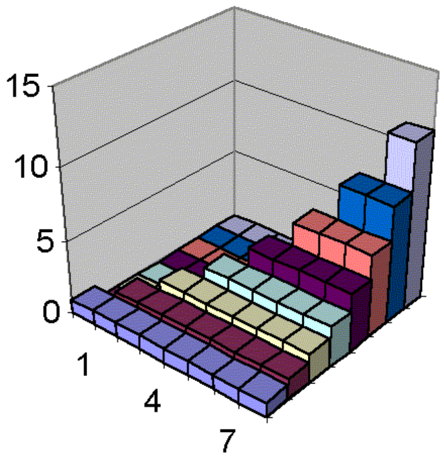

Рис. 1. Графическое представление базисных функций ОАА-преобразования при N = *8.*

Компенсаторы $\kappa(n)$, гарантирующие ортогональность преобразования вычисляются по общей формуле (10) при $\omega = \sqrt{2}$:

$$\kappa(n) = \left(\sqrt{2}\right)^{-n-1} - \left(\sqrt{2}\right)^{n+1},$$

$$K = (\kappa(0), \quad \ldots, \quad \kappa(6)) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\sqrt{2}, -\frac{15}{4}, -\frac{31}{8}\sqrt{2}, -\frac{63}{8}, -\frac{127}{16}\sqrt{2}\right)$$

.

Нормализующие коэффициенты ОАА-преобразования вычисляются аналогичным образом. Несложно показать, что

$$A_n^2 = 2^{n+2} + 2^{-n-1} - 3 \quad \text{при } n = 0, \ldots, N-2,$$

$$A_{N-1}^2 = 255.$$

Таким образом

$$\left(\mathbf{D}^2\right)^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{A_0^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{A_{N-1}^2}\right) =$$

$$= \mathrm{diag}\left(\frac{3}{2}, \frac{21}{4}, \frac{105}{8}, \frac{465}{16}, \frac{1953}{32}, \frac{8001}{64}, \frac{32385}{128}, 255\right)$$

4. Быстрые алгоритмы ОАА-преобразований.

Быстрые алгоритмы прямого и обратного ОАА-преобразования имеют простую структуру. Умножение матрицы преобразования (9) на входной вектор $\mathbf{X}$ реализуется рекурсивно:

$$z(N-1) = X(N-1),$$

$$z(n) = z(n+1) + X(n) \quad \text{при } n = N-2, \ldots 0.$$

$$\tilde{X}(0) = f(0) z(0),$$

$$\tilde{X}(n) = f(n) z(n) + \kappa(n-1) X(n-1) \quad .$$

при $n = 1, \ldots, N-1$

Схема прямого преобразования приведена на Рис. 2.

Обратное преобразование может быть также реализовано рекурсивно:

$$X(0) = f(0)\tilde{X}(0) + \kappa(0)\tilde{X}(1),$$

$$X(n) = X(n-1) + \kappa(n)\tilde{X}(n+1) +$$

$$+ (f(n) - \kappa(n-1))\tilde{X}(n) \quad \text{при } n = 1, \ldots N-2,$$

$$X(N-1) = X(N-2) +$$

$$+ (f(N-1) - \kappa(N-2))\tilde{X}(N-1).$$

Нормализация может быть реализована как отдельный шаг. Схема обратного преобразования приведена на рис. 3.

Оценки сложности прямого и обратного преобразования имеют вид:

$$S_{direct}(N) = 2N-1,$$

$$A_{direct}(N) = 2N-2,$$

$$S_{inverse}(N) = 2N-1,$$

$$A_{inverse}(N) = 2N-2,$$

$$M_{inverse}(N) = N,$$

где $S_{direct}(N)$ и $S_{inverse}(N)$ - число умножений на степени ω, реализованные как сдвиг кода, $A_{direct}(N)$ и $A_{inverse}(N)$ - число сложений, необходимых для реализации прямого и обратного преобразования, $M_{inverse}(N)$ число умножений на числа общего вида (нормализующие коэффициенты) для обратного преобразования.

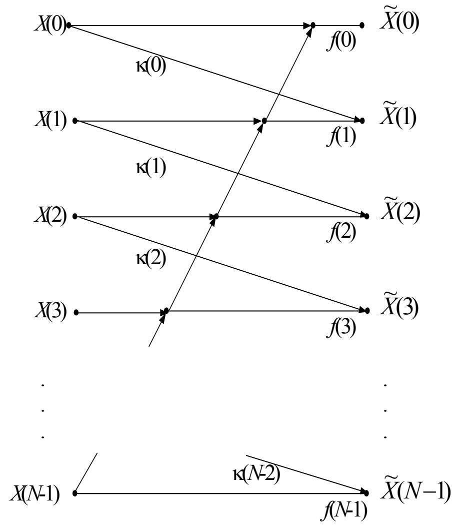

Рис. 2. Схема прямого преобразования Агаяна-Айзенберга

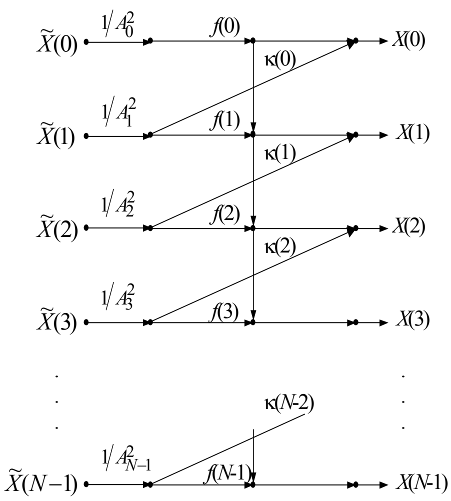

Рис. 3. Схема обратного преобразования Агаяна-Айзенберга

5. Заключение

Одномерные преобразования, рассмотренные в работе, легко обобщаются на случай более высоких размерностей входного сигнала. Это делает их привлекательными для решения задач спектрального анализа изображений. В частности, в [8] рассматривается базисный многочлен с треугольной матрицей преобразования. Показано, что сложность обработки изображения методом "скользящего" окна (сканированием) не зависит от размеров окна.

"Почти треугольный" вид матрицы преобразования (9) и простая рекурсивная связь между базисными функциями приводят к пониманию, что аналогичные задачи обработки изображения очень быстро решаются при использовании процессоров "золотого сечения".

В 1957 г. Бергман писал в [5] о системах счисления с иррациональным базисом: "Я не знаю практических приложений подобных систем, кроме интеллектуальных упражнений и приятного времяпрепровождения…".

Создание высокоскоростных специализированных процессоров ориентированных на теоретические работы опровергают это мнение.

В настоящей работе публикуется еще один прикладной аспект замечательной математической теории.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00900).

Литература

1. Агаян С.С., Айзенберг Н.Н., Алавердян С.Б. Дискретное преобразование Фибоначчи. Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов III Всесоюзной конференции.- Горький, 1988.-ч.1.- с. 5-67.
2. Агаян С. С. Успехи и проблемы быстрых ортогональных преобразований. Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука,- 1990.- вып. 3.- с. 146 - 214.
3. S.Agaian, S.Alaverdian Fast orthogonal Fibonacci transform. Proc. Int. Coll. On Coding Theory, 1998, Osaka, Japan, pp. 335-353.
4. M.Hall Combinatorial Theory. Blaisdell Publ. Comp., 1967.
5. G.Bergman A number system with an irrational base. Math. Magaz., No 31, 1957. pp. 98-119.
6. А.Стахов Коды золотой пропорции. Радио и связь, 1984. стр. 151.
7. В.Чернов Реализация теоретико-числовых преобразований в кодах, порождаемых избыточными системами счисления. Электронное моделирование, № 4, 1993, стр.33-37.
8. N.Glumov, V.Myasnikov, V.Sergeyev Polynomial bases for image processing in a sliding window. Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 4, No.4, 1994, pp.408-413.
9. А.Стахов, В. Лужнецкий Машинная арифметика ЦВМ в кодах Фибоначчи и "золотой" пропорции. АН СССР, 1981, стр. 64.
10. V.Chernov, M.Pershina "Error-free" calculation of the convolution using generalized Mersenne and Fermat transforms over algebraic fields. Proc. CAIP'97. Springer, LNCS 1296, 1997, pp.621-628.
11. A.Fraenkel Systems of numeration. Amer. Math. Monthly, Vol. 92, 1985, pp.105-114.
12. A.Fraenkel The use and usefulness of numeration systems. Inf and Comp., Vol. 81, No 1, 1989, pp.46-61.
13. A.Bertrand-Mathis Comment ecrire les nombres entiers, dans une base qui n'est pas entiere. Acta math. hung., Vol. 54, No 3-4, 1989, pp.237-241.