

# РАСЧЕТ ГРАДИЕНТНОГО ОПТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА, ВЫПОЛНЯЮЩЕГО ЗАДАННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СВЕТОВОГО ПОЛЯ

В.В. Котляр, А.С. Мелёхин  
Институт систем обработки изображений РАН  
Самарский государственный аэрокосмический университет

## Аннотация

Рассматривается алгоритм расчета показателя преломления двумерной среды, переводящей заданное амплитудно-фазовое распределение на входе в заданное амплитудно-фазовое распределение на выходе. Алгоритм включает построение траекторий лучей внутри градиентного оптического элемента (ГОЭ), согласующих вход и выход и численное решение дифференциального уравнения для показателя преломления ГОЭ.

### 1. Введение

Впервые обратная задача в геометрической оптике неоднородных сред была поставлена и частично решена в [1,2]. В [1] найдено аналитическое решение для двумерного волновода, периодически фокусирующего лучи, исходящие из осевой точки. В [2] по заданному двумерному семейству лучей в ГОЭ, построено общее решение для показателя преломления, зависящее от некоторой произвольной функции. Однако это решение не конструктивно и его трудно использовать.

В данной работе предложен метод расчета в лучевом приближении показателя преломления двумерного ГОЭ, переводящего заданное амплитудно-фазовое распределение на входе в заданное амплитудно-фазовое распределение на выходе

### 2. Аналитическое решение

Запишем уравнение луча [3] в среде с показателем преломления  $n$ :

$$\frac{d}{dS} \left( \frac{d\vec{r}}{dS} n \right) = \nabla n. \quad (1)$$

Полагая  $x = x(z)$ ,  $y = y(z)$ ,  $dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  – малое расстояние вдоль луча, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \left( \frac{dx}{dz} \frac{dn}{dz} - \frac{dn}{dx} \right) \cdot \left[ 1 + \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 \right] + n \frac{d^2x}{dz^2} = 0 \\ \left( \frac{dy}{dz} \frac{dn}{dz} - \frac{dn}{dy} \right) \cdot \left[ 1 + \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 \right] + n \frac{d^2y}{dz^2} = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

Предполагая среду бесконечно протяженной вдоль оси  $z$  т.е.  $n = n(x, z)$ , приходим к плоской задаче:

$$\left( \frac{dx}{dz} \frac{dn}{dz} - \frac{dn}{dx} \right) \cdot \left( 1 + \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 \right) + n \frac{d^2x}{dz^2} = 0. \quad (3)$$

В работе [1] рассмотрен случай для  $n = n(x)$ , при этом (3) переходит в:

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} = \frac{d^2x/dz^2}{1 + \left( dx/dz \right)^2} \quad (4)$$

Далее полученное уравнение интегрируется для семейства лучей и функции  $z = z(x)$ .

Т.е. функцию  $x = x(z)$  можно обратить, так,

$$\text{что: } \frac{dx}{dz} = \frac{1}{dz/dx} \text{ и } \frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{d^2z/dx^2}{\left( dz/dx \right)^3}.$$

С учетом этого вместо (4) получим:

$$\frac{d \ln n}{dx} = -\frac{d^2z/dx^2}{\frac{dz}{dx} \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \right]}. \quad (5)$$

Интегрируя (5) по  $x$ , получим:

$$n(x) = C \sqrt{\frac{1}{\left( dz/dx \right)^2} + 1}. \quad (6)$$

Подставляя семейство лучей имеющих заданные величины  $dx/dz$  на прямой  $z = z_0$  из (6), можно найти показатель преломления  $n(x)$ .

Из (6) можно также найти уравнение лучей при заданном  $n(x)$ :

$$z = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\left( n(x')/C \right)^2 - 1}}, \quad (7)$$

При  $z = 1$  и  $C = n(0)$  из последнего равенства следует полученное в [1] выражение для самофокусирующей среды:

$$n(x) = \frac{n_0}{\text{ch} \left( \frac{\pi}{2} r \right)}. \quad (8)$$

С другой стороны, для случая  $n = n(z)$ , из уравнения (3) можно получить:

$$\frac{d \ln n}{dz} = -\frac{d^2x/dz^2}{\frac{dx}{dz} \left[ 1 + \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 \right]}. \quad (9)$$

Далее, аналогично предыдущему рассмотрению, можно получить выражения для коэффициента преломления и для семейства лучей:

$$n(z) = C \sqrt{\left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + 1}, \quad (10)$$

$$x = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{n(z)}{C}\right)^2 - 1}}. \quad (11)$$

Для общего случая при  $n = n(x, z)$  из уравнения (3) можно получить следующее выражение:

$$f(x, z) \frac{\partial \ln n}{\partial z} - \frac{\partial \ln n}{\partial x} + q(x, z) = 0, \quad (12)$$

где  $f(x, z) = \frac{dx}{dz}$ ,  $q(x, z) = \frac{d^2 x / dz^2}{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$ .

В работе [2] предложен путь нахождения общего решения уравнения (12), которое должно зависеть от некоторой произвольной функции.

В уравнении (12) переменные  $x$  и  $z$  не независимы, т.к. это уравнение выполняется вдоль луча  $x = x(z)$ . Тогда производную в (12) можно вычислить как производную от сложной функции:

$$\frac{\partial \ln n}{\partial x} = \frac{\partial \ln n(x(z), z)}{\partial z} \frac{dz}{dx}, \quad (13)$$

В этом случае (12) примет вид:

$$f(x(z), z) \frac{d \ln n}{dz} + p(x(z)) \frac{d \ln n}{dz} + q(x(z), z) = 0, \quad (14)$$

где  $p(x(z)) = -\frac{1}{\frac{dz}{dx}}$ .

Решение этого уравнения легко записать в виде:

$$\ln \frac{n(x(z), z)}{n(x(0), 0)} = -\int_0^z \frac{q(x(z'), z') dz'}{p(x(z')) + f(x(z'), z')}, \quad (15)$$

или окончательно:

$$n(x(z), z) = n(0) \cdot \exp \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arth} \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + C \right], \quad (16)$$

где  $C = -\frac{1}{2} \operatorname{arth} \left( \frac{dx}{dz} \right)_{z=0}^2$ ,  $\operatorname{arth}$  – арктангенс гиперболический.

Это решение справедливо только вдоль луча  $x = x(z)$ . Чтобы найти показатель преломления ГОЭ как функцию двух координат  $n = n(x, z)$ , перейдем в уравнении (12) от зависимых переменных  $x$  и  $z$ , к независимым переменным  $x$  и  $s$ , где  $s$  – непрерывный параметр определяющий конкретный луч из семейства лучей плотно заполняющих ГОЭ:  $x = x(z, s)$ . Предположим, что функцию  $x = x(z, s)$  можно разрешить относительно  $s$ :  $s = s(x, z)$ , и рассмотрим функцию  $\ln n(x, z)$  как функцию двух независимых переменных  $x$  и  $s$ :  $\ln n(z, s(x, z))$ . Тогда производные в уравнении (12) можно переписать как производные от сложной функции [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln n(z, s(x, z))}{\partial z} &= \frac{\partial \ln n}{\partial z} + \frac{\partial \ln n}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z}, \\ \frac{\partial \ln n(z, s(x, z))}{\partial x} &= \frac{\partial \ln n}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда вместо уравнения (12) получим:

$$a(z, s) + b(z, s) \frac{\partial \ln n}{\partial z} + c(z, s) \frac{\partial \ln n}{\partial s} = 0, \quad (18)$$

где:

$$\begin{aligned} a(z, s) &= \frac{d^2 x}{dz^2} \left[ 1 + \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 \right]^{-1} \Bigg|_{x=x(z, s)}, \\ b(z, s) &= \frac{\partial x}{\partial z} \Bigg|_{x=x(z, s)}, \\ c(z, s) &= \left( \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=x(z, s)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Если не предполагать возможность разрешения уравнения семейства лучей  $x = x(z, s)$  относительно  $s$ , то можно получить другое уравнение для  $\ln n$  также через независимые переменные  $z$  и  $s$ :

$$a(z, s) + b(z, s) \frac{\partial \ln n}{\partial z} + \tilde{c}(z, s) \frac{\partial \ln n}{\partial s} = 0, \quad (20)$$

где  $\tilde{c}(z, s) = -\left[ \frac{dx(z, s)}{ds} \right]^{-1}$ . (21)

### 3. Ход лучей в ГОЭ

Для расчета ГОЭ, в первую очередь необходимо задать ход лучей внутри элемента таким образом, чтобы из заданного во входной плоскости распределения интенсивности и наклонов лучей, получить максимально близкое к требуемому распределение интенсивности и наклонов в выходной плоскости элемента. Очевидно, что данная задача решается не однозначно: можно построить множество семейств лучей, удовлетворяющих заданным условиям на входе и выходе. Задачу можно разделить на две части: однозначное определение координаты (отсчета) на выходе для каждого конкретного луча, и собственно сам алгоритм построения траектории луча внутри ГОЭ.

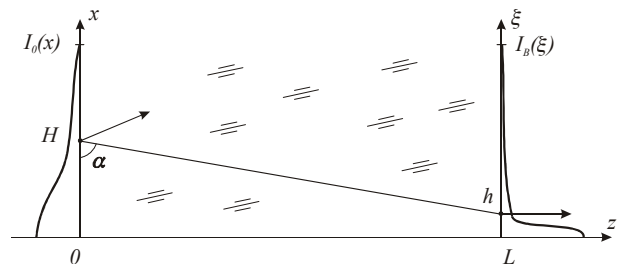


Рис. 1. Однозначное сопоставление входного и выходного лучей.

#### 3.1. Взаимно-однозначное соответствие входной и выходной плоскостей

Для однозначного определения координаты (отсчета) заданного луча на выходе, присвоим каждому лучу во входной плоскости энергетический вес равный значению интенсивности  $I_0(x)$  в конкретной точке (отсчете) входа. Аналогичным образом зададим распределение энергетических весов  $I_B(\xi)$  в ка-

ждой точке (отсчете) выходной плоскости (Рис. 1). Тогда количество лучей  $N_1 \dots N_M$ , где  $M$  – количество отсчетов на входе, которые должны прийти в отсчет выходной плоскости, можно итеративно определить из следующих формул:

$$I_B(\xi_p) \cong \sum_{k=N_{p-1}+1}^{N_p} I_0(x_k), \quad p = \overline{1, M}, \quad N_0 = 0, \quad (22)$$

где  $x_p, \xi_k$  – координаты точек во входной и выходной плоскостях,  $N_p - N_{p-1}$  – число лучей пришедших в точку (отсчет)  $\xi_p$ ,  $\sum_{p=1}^M N_p = N$  – общее число лучей.

Очевидно, что в результате дискретизации в некоторых отсчетах суммарный энергетический вес окажется несколько большим требуемого значения, в других – меньшим, однако необходимым является выполнение равенства:

$$\sum_{k=1}^M I_B(\xi_k) = \sum_{k=1}^N I_0(x_k), \quad (23)$$

Здесь и далее предполагаем, что  $\Delta x = \Delta \xi$  – шаги сетки на входе и выходе одинаковы.

Зная номера входного и выходного отсчетов, можно определить угол направляющей луча, соединяющего две точки на входе и выходе ГОЭ (Рис. 1). Если  $H$  – номер отсчета на входе,  $h$  – номер отсчета на выходе,  $\Delta x$  – шаг сетки по оси  $x$ ,  $L$  – длина оптического элемента, то:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{L}{(H-h)\Delta x}. \quad (24)$$

### 3.2. Алгоритм построения траектории луча

Очевидно, что при всех возможных комбинациях углов у лучей на входе и выходе ГОЭ, принципиальное отличие имеют два случая: случай разнонаправленных лучей (Рис. 2.) и случай сонаправленных лучей (Рис. 3.).

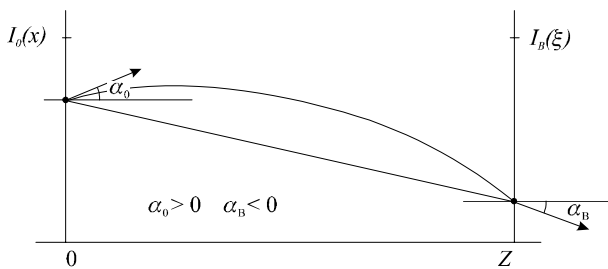


Рис. 2. Случай разнонаправленных лучей.

В первом случае необходимо плавно сменить угол у луча с  $\alpha_0$  до  $\alpha_B$  на протяжении длины элемента  $L$ , т.е. за  $Z$  отсчетов сетки. Таким образом (в случае  $\alpha_0 > 0, \alpha_B < 0$ ), угол наклона луча на каждом шаге будет задаваться формулой:

$$\alpha_i = \alpha_0 - \frac{\alpha_0 + |\alpha_B|}{Z} \cdot i. \quad (25)$$

В случае сонаправленности, лучи будут претерпевать перегиб (Рис. 3.).

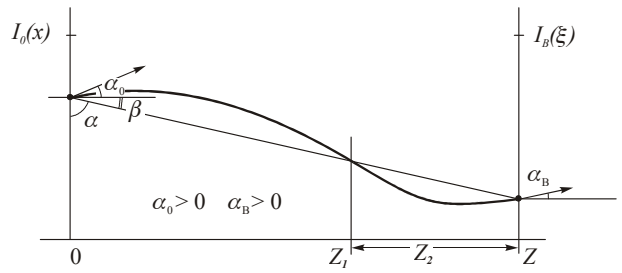


Рис. 3. Случай сонаправленных лучей.

Для обеспечения плавности изменения угла вдоль хода луча координата точки перегиба должна зависеть от соотношения входного и выходного углов:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\alpha_0}{\alpha_B}, \quad (26)$$

где  $Z_2 = Z - Z_1$ .

Тогда координата  $Z_1$  точки перегиба луча определится по формуле:

$$Z_1 = \frac{Z\alpha_0}{\alpha_B + \alpha_0}, \quad (27)$$

Таким образом, при  $\alpha_0 = \alpha_B$  последнее равенство переходит в очевидное:

$$Z_1 = \frac{Z}{2}, \quad (28)$$

Тогда, если  $\alpha$  – угол у направляющей луча, вычисленный по формуле (24), угол  $\beta = \pi/2 - \alpha$ , то за  $Z_1$  шагов необходимо сменить угол у луча с  $\alpha_0$  до  $2\beta$ . Таким образом (в случае  $\alpha_0 > 0, \alpha_B > 0$ ), угол на каждом шаге от 1 до  $Z_1$  будет задаваться формулой:

$$\alpha_i = \alpha_0 - \frac{\alpha_0 + 2\beta}{Z_1} \cdot i. \quad (29)$$

Далее за  $Z_2$  шагов необходимо сменить угол у луча с  $2\beta$  до  $\alpha_B$ , соответственно угол на каждом шаге от  $Z_1+1$  до  $Z$  будет задаваться формулой:

$$\alpha_i = 2\beta - \frac{2\beta + \alpha_B}{Z_2} \cdot i. \quad (30)$$

### 4. Расчет показателя преломления ГОЭ

Рассмотрим уравнение (20), вычисляя величины  $a(z, s)$ ,  $b(z, s)$  и  $\tilde{c}(z, s)$ , исходя из заданных нами траекторий лучей, можно определить величину  $n(z, s)$ , что позволит полностью рассчитать требуемый ГОЭ. Так как уравнение (20) записано относительно  $z$  и  $s$ , и мы не предполагаем разрешения уравнения семейства лучей относительно  $s$ , то, очевидно, для каждой конкретной точки с координатами  $x$  и  $z$  можно получить несколько значений коэффициента преломления  $n(x, z)$ . Возникшую неоднозначность можно устранить, например, путем усреднения полученных в точке  $(x, z)$  значений коэффициента преломления:

$$n(x, z) = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P n(x, z, s_k, z), \quad (31)$$

где  $p$  – число значений коэффициента преломления.

Далее для удобства записи переобозначим:

$$\begin{aligned} n &\equiv n(x, z), \quad a \equiv a(z, s), \\ b &\equiv b(z, s), \quad c \equiv \tilde{c}(z, s). \end{aligned} \quad (32)$$

Для численного решения уравнения (20) зададим сетку с узлами в точках  $(s, z) = (kh, l\tau)$ ,

где  $h : 0 \dots k$  – шаги сетки.  
 $\tau : 0 \dots l$

Запишем разностную схему:

$$a_k^l + b_k^l \frac{n_k^l - n_k^{l-1}}{\tau} + c_k^l \frac{n_{k+1}^l - n_k^l}{h} = 0, \quad (33)$$

$$n_k^0 = n_0(kh).$$

Отсюда:

$$n_k^l = \frac{b_k^l h n_k^{l-1} - c_k^l \tau n_{k-1}^l - a_k^l h \tau}{b_k^l h - c_k^l \tau}. \quad (34)$$

Производные  $dx/dz$ ,  $d^2x/dz^2$  и  $dx/ds$  входящие в величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  зададим следующими разностными выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &\approx \frac{\Delta x_{i+1} - \Delta x_i}{\Delta z}, \\ \frac{d^2x}{dz^2} &\approx \frac{\Delta x_{i+1} - 2\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{\Delta z^2}, \\ \frac{dx}{ds} &\approx \frac{\Delta x_{i+1} - \Delta x_i}{\Delta s}. \end{aligned} \quad (35)$$

Очевидно, что при  $dx/ds=0$ , величина  $c$  обращается в бесконечность. Подобная ситуация возникает в случае слияния двух соседних лучей в точке  $(x, z)$ , и в этом случае разностная схема примет вид:

$$n_k^l = n_k^{l-1} - \frac{a_k^l \tau}{b_k^l}. \quad (36)$$

### 5. Численное моделирование

Для реализации численного расчета ГОЭ была написана программа с использованием среды программирования Borland® Delphi®. В рамках единой программы объединены средства задания распределения интенсивностей на входе и выходе, расчета траекторий лучей и расчета показателя преломления ГОЭ. Программа позволяет интерактивно менять различные параметры, оказывающие влияние на расчет, вид применяемых разностных схем, а также позволяет представлять полученные результаты в различных вариантах.

На рис. 4 показан ход лучей в ГОЭ (верхняя полуплоскость), переводящего плоский пучок с постоянной интенсивностью на входе в плоский пучок меньшей ширины, также с постоянной интенсивностью, на выходе. На рис. 5 показаны (в псевдоцветах) соответствующие энергетические веса, переносимые по рассчитанным траекториям лучей. На рис. 6 показаны (в псевдоцветах) полученные значения

коэффициента преломления заданного ГОЭ в координатах  $s$  и  $z$ .

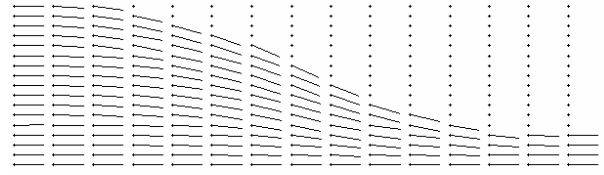


Рис. 4. Рассчитанные траектории лучей (верхняя полуплоскость).

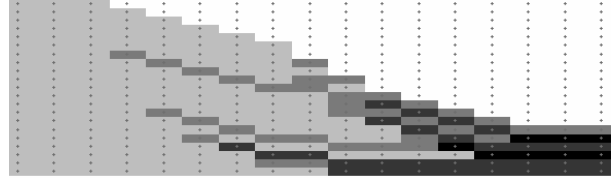


Рис. 5. Энергетические веса переносимые лучами вдоль рассчитанных траекторий (верхняя полуплоскость, псевдоцвета).

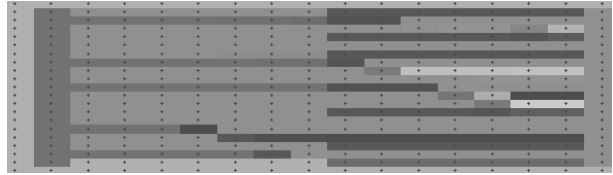


Рис. 6. Коэффициент преломления ГОЭ в координатах  $s$  и  $z$  (верхняя полуплоскость, псевдоцвета).

Параметры расчета: длина элемента  $L = 30$  мм., ширина пучка на входе  $h_{вх} = 8$  мм., на выходе –  $h_{вых} = 1,5$  мм., количество отсчетов: по вертикали – 16, по горизонтали – 14.

### Заключение

Получены следующие результаты:

- рассмотрены различные варианты зависимости показателя преломления от пространственных координат, получены соответствующие им аналитические выражения;
- разработаны алгоритмы построения траекторий лучей внутри ГОЭ для различных сочетаний входных и выходных углов;
- поставлена и решена разностная задача для общего уравнения.
- составлено программное обеспечение для реализации численного расчета ГОЭ.

### Литература

1. Микаэлян А.Л. Применение слоистой среды для фокусирования волн, Доклады академии наук СССР, Том LXXXI, 1951, 569–571.
2. Микаэлян А.Л. Общий метод определения параметров неоднородных сред по заданным траекториям лучей, Доклады академии наук СССР, Том LXXXIII, 1952, 219–220.
3. Greishuk G.I., Bobrov S.T., Stepanov S.A. Optics of diffractive and gradient-index elements and systems, SPIE Press, Bellington, 1997.