УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ ПРЕДЕЛЬНО-КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

А.В. Гладких
Самарский государственный аэрокосмический университет

В последнее время достигнут существенный прогресс в генерации импульсов длительностью в несколько периодов колебания поля [1]. При малом количестве длин волн в импульсе, далее называемым предельно-коротким импульсом (ПКИ), его спектральная ширина $\Delta\omega \approx 2/T$ сравнима с несущей частотой ω_0, где T-полудлительность импульса. Из-за столь широкого частотного спектра наблюдаются следующие эффекты: уширение дифракционного порядка при дифракции на решетке [2], значительное удлинение ПКИ в оптических системах, содержащих элементы с материальной дисперсией [3]. Пространственное ограничение ПКИ, в поперечном сечении, привносит новые явления в процесс их распространения и преобразования оптическими системами. Пространственно-временные процессы, которые ранее не учитывались, такие как нарастание поля и его спад, для ПКИ могут принимать первостепенное значение. Одной из фундаментальных физических причин, приводящей к существенной трансформации пространственно-временной структуры ПКИ, является взаимосвязное дифракционное преобразование частотного и углового спектров.

Во многих задачах, связанных с применением ПКИ, требуется тщательный контроль пространственно-временной структуры излучения. В данной работе представлены две модификации одного способа решения волнового уравнения, описывающего распространение ПКИ в вакууме, в двумерном случае. Проанализировано сходство между полученными уравнениями и дифракционным интегралом Френеля [4]. Для удобства расчетов используется следующая нормировка: скорость света равна 1, несущая частота 2π. Таким образом, все временные параметры будут выражаться через количество периодов несущей частоты, а параметры с метровой размерностью через количество длин волн несущей частоты.

В скалярном приближении компоненты напряженностей полей светового импульса удовлетворяют волновому уравнению, наиболее корректно описывающему распространение ПКИ в вакууме [5, 6, 7]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

Зададим во входной плоскости поле в виде

$$E(x,z=0,t)=\varphi(x)\gamma(t) \tag{2}$$

Решение будем искать с помощью метода Фурье. Частотный спектр искомого поля на расстоянии z определяется по формуле

$$\widetilde{E}(x,z,\omega)=g(\omega)\times \times\int_{-\infty}^{\infty} g_2(\chi)\exp\left[i\chi x+iz\sqrt{\omega^2/c^2-\chi^2}\right]d\chi \tag{3}$$

где

$$g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(t)\exp[i\omega t]dt \tag{4}$$

- частотный спектр входного импульса,

$$g_2(\chi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)\exp[-i\chi u]du \tag{5}$$

- угловой спектр входного импульса.

Функции частотного и углового спектров являются куполообразными, из-за конечности импульсов во времени и ограниченности в поперечном сечении. Основные энергонесущие частоты сосредоточены в диапазоне $\omega\in[\omega_0-1/T;\ \omega_0+1/T]$ и $\chi\in[-1/a_0\,;\,1/a_0]$, где T - полудлительность импульса, a_0 - характерный поперечный размер первоначального импульса. Учитывая данные свойства, можно разложить корень

$$f=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\chi^2} \tag{6}$$

в ряд. Популярно и часто используется разложение по формуле Эйлера [5,6]:

$$f\approx f_1=\frac{\omega}{c}-\frac{c\chi^2}{2\omega} \tag{6.1}$$

Реже применяют разложение (6) в ряд Тейлора, как функцию двух переменных ω и χ [7]:

$$f\approx f_2=\frac{\omega}{c}-\frac{\chi^2}{\kappa_0}+\frac{\omega\chi^2}{2\kappa_0^2 c} \tag{6.2}$$

Данные разложения справедливы для расстояний, на которых набег фазы от неучтенного члена разложения много меньше π. Для (6.1)

$$0\le z_Э << \frac{8\pi\omega^3 a_0^4}{c^3} \tag{7.1}$$

Для (6.2)

$$0\le z_T << \frac{8\pi k_0^3 a_0^4 c^2 T^2}{c^2T^2+4a_0^2} \tag{7.2}$$

Как можно заметить, для длинных импульсов, когда $cT >> 2a_0$, формула (7.2) переходит в (7.1), которая хорошо известна как условие применимости метода параболического приближения [8]. Рассмотрим накладываемые ограничения для случая $T = 5$, $a_0 = 100$: $z_Э << 6.2 \cdot 10^{11}$, $z_T << 10^8$. Получаем, что разложение Эйлера работает в большем диапазоне расстояний, по сравнению с разложением Тейлора. Т.е. применение разложения Эйлера для дальней зоны, наиболее интересной для традиционной оптики [7], является более предпочтительным.

Сравним точность разложения (6) в ряд (6.1) и (6.2). В таблице приведены результаты сравнения (6.1) и (6.2) по критерию $\varepsilon_i = \max\left|\left(f_i - f\right)/f\right|$ в диапазоне энергонесущих значений ω и χ. λ_0, T_0 - длина волны и период несущей частоты.

Сравнение разложения (6) в ряд Эйлера и Тейлора

	$a_0 = 100\lambda_0$		$a_0 = 500\lambda_0$		$a_0 = 1000\lambda_0$	
	ε_1, 10^{-11}	ε_2, 10^{-11}	ε_1, 10^{-14}	ε_2, 10^{-14}	ε_1, 10^{-15}	ε_2, 10^{-15}
$T = 1T_0$	6	10^5	9.5	$4.4 \cdot 10^6$	6	$1.1 \cdot 10^7$
$T = 5T_0$	1.6	$2.3 \cdot 10^3$	2.7	$9.4 \cdot 10^4$	1.6	$2.34 \cdot 10^5$
$T = 10T_0$	1.5	$5.5 \cdot 10^2$	2.3	$2.2 \cdot 10^4$	1.5	$5.5 \cdot 10^4$
$T = 20T_0$	1.4	$1.3 \cdot 10^2$	2.2	$5 \cdot 10^3$	1.4	$1.3 \cdot 10^4$
$T = 200T_0$	1.3	2.6	2.1	$5.4 \cdot 10$	1.4	$1.3 \cdot 10^2$

Из данных таблицы видно, что с увеличением длительности и ширины импульса точность обоих разложений растет (это обусловлено более узким частотным и угловым спектром). Формула (6.1) более точно аппроксимирует (6), чем (6.2) и это объясняет различие в допустимом диапазоне расстояний при разложении Эйлера (6.1) и Тейлора (6.2). Из представленных данных можно сделать вывод: оба подхода применимы для описания поля ПКИ в ближней зоне, что может быть использовано при исследовании ввода излучения ПКИ в волокно и в интегральной оптике.

После подстановки (5) и (6.1) в (3) и интегрирования по χ, получаем:

$$\widetilde{E}(x,z,\omega) = \sqrt{\frac{-i}{z\lambda}}\, g(\omega)\exp\left[iz\frac{\omega}{c}\right] \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\exp\left[i\frac{\omega}{c}\frac{(x-u)^2}{2z}\right]du \tag{8.1}$$

Подставляя (5) и (6.2) в (3) и интегрируя по χ, получаем:

$$\widetilde{E}(x,z,\omega) = \sqrt{\frac{-i}{2z\lambda A}}\, g(\omega)\exp\left[iz\frac{\omega}{c}\right] \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\exp\left[i\frac{\kappa_0}{z}\frac{(x-u)^2}{4A}\right]du \tag{8.2}$$

где

$$A = 1 - \frac{1}{2c\kappa_0}\omega .$$

Если $g(\omega)$ отлична от нуля в малой окрестности ω_0, т.е. импульс достаточно длинный, то (8.2) переходит в (8.1). Интегральное уравнение (8.1) аналогично применению дифракционного интеграла в приближении Френеля для определенной спектральной компоненты. Это является следствием того факта, что функция частотного спектра удовлетворяет уравнению Гельмгольца, применяя к нему теорему Грина, проводя все рассуждения аналогично [9], получим дифракционный интеграл для частотного спектра $g(\omega)$ в виде (8.1).

Подставляя (6.2) в (3) и интегрируя по $d\omega$, переходим к временному описанию эволюции импульса

$$E(x,z,t) = \int\limits_{G(x,z,t)} g_2(\chi)\gamma\left[t - \frac{z}{c}\left(1 + \frac{\chi^2}{2\kappa_0^2}\right)\right] \times \\ \times \exp\left(i\chi x - i\frac{z}{\kappa_0}\chi^2\right)d\chi \tag{8.3}$$

Пределы интегрирования меняются в зависимости от *x, z, t* так, чтобы аргумент функции $\gamma(...)$ принимал допустимые значения.

Для практического использования наиболее применимы интегралы (8.1) и (8.3). Выбор конкретного интеграла следует делать в зависимости от вида функций $\gamma(t)$, $\varphi(x)$ и их Фурье образов.

В частности, если $\varphi(x)$ гауссова функция, а $\gamma(t)=\exp(at+b)$, взятие интеграла (8.3) не составит труда [7] (получим выражения через интеграл вероятности), в то время как работа с интегралом (8.1) представит определенную трудность. Использование интеграла (8.2) не представляется целесообразным ни для каких функций из-за сложной зависимости подынтегрального выражения от ω. Принимая во внимание ограничения накладываемые (7.1) и (7.2), следует сказать, что интегральное уравнение (8.1) описывает пространственно-временную структуру дифрагированного поля ПКИ на больших расстояниях, чем (8.2) и (8.3). Из уравнений (8.1)-(8.3) получаем, что дифракционное поле ПКИ зависит от временной структуры первоначального импульса, чего не наблюдается, или точнее, на что не обращается внимание, для длинных импульсов.

В заключение отметим, что представленные в данной работе уравнения позволяют проводить качественный анализ волновых полей любой природы и допускают обобщение на случай диспергирующих сред. Получение численных результатов планируется в последующих работах.

Литература

1. Baltuska A., Wei Z., Phenichnicov M.S., Wiersma D.A., Opt. Lett.- 1997, vol. 22, p. 269.
2. Ichikawa H., Minoshima K., Femtosecond laser pulses diffracted by dielectric transmission gratings in the resonance-domain// Optics Communications- 1999, vol. 166, p. 243-251.
3. Варданян А.О., Маилян А.Э., Оганесян Д.Л., Фокусировка фемтосекундных световых импульсов линзой// Оптика и спектроскопия- 1997, т. 82, № 3, стр. 454-457.
4. Борн М., Вольф Э., Основы оптики. - М.: Наука, 1973.
5. Авакян Р.А., Варданян А.О., Маилян А.Э., Оганесян Д.Л., Дифракция пространственно-ограниченного фемтосекундного светового импульса на дифракционной решетке// Оптика и спектроскопия- 1994, т. 77, № 4, стр. 668-673.
6. Christov I.P., Propagation of femtosecond light pulses// Optics Communications- 1985, vol. 53, № 6, p. 364-366.
7. Бельский А.М., Хапалюк А.П., О распространении пространственно-ограниченного импульса в изотропной среде// Журнал прикладной спектроскопии- 1972, т. 27, в. 1, стр. 150-155.
8. Хапалюк А.П., Нестеренко Т.М., Вестник БГУ, сер. I, 1970, № 1, стр. 52.
9. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П., Теория волн. - М.: Наука, 1979.