ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА С КРУТЫМ ФРОНТОМ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ВАКУУМЕ

А.В. Гладких, С.И. Харитонов
Институт систем обработки изображений РАН
Самарский государственный аэрокосмический университет

Введение

Целью настоящей работы является исследование эволюции пространственно-временной структуры поля импульса с крутым передним и задним фронтом при распространении в вакууме. Обращено внимание на процессы установления и спада поля импульса. Из-за специфики исследуемых процессов (быстрота изменения во времени) не применим традиционно используемый в оптике метод медленно меняющихся амплитуд [1]. Исследование проводилось на основе решения дифракционного интеграла Френеля для функции частотного спектра первоначального импульса [2]. Представленный в данной работе метод и полученные результаты справедливы для импульсов, длительностью не меньше двадцати периодов.

Основные уравнения

В данной работе рассматривается распространение импульса в вакууме. Использовалась следующая нормировка: скорость света c и период несущего колебания T_0 приравнивались к единице. Все временные переменные выражались через количество периодов, а пространственные переменные через количество длин волн несущего колебания.

Зададим поле во входной плоскости в виде $E(x,y,z=0,t)=\varphi(x,y)\gamma(t)$. Эволюция пространственно-временной структуры поля импульса в скалярном приближении при распространении в вакууме описывается уравнением [1, 3, 4]

$$E(x,y,z,t)=\int_0^{\infty}\frac{-i\omega}{2\pi cz}g(\omega)\exp\left(i\omega\frac{z}{c}-i\omega t\right)\times \\ \times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u,v)\exp\left(\left\{i\frac{\omega}{2cz}(u-x)^2+ \right.\right. \\ \left.\left. +(v-y)^2\right\}\right)dudvd\omega \tag{1}$$

где $g(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(t)\exp(i\omega t)dt$ - частотный спектр входного импульса. При этом не накладывается никаких ограничений на исходное пространственно-временное распределение поля.

Рассмотрим импульс с ярко выраженными передним и задним фронтами

$$\gamma(t)=\begin{cases}Cos(\varphi_0-\omega_0 t); & |t|\le T\\ 0; & |t|>T\end{cases} \tag{2}$$

где $\omega_0=2\pi$ - несущая частота; $\varphi_0=\pi/2$ для обеспечения условия $\gamma(\pm T)=0$; $2T$ - длительность импульса.

Частотный спектр импульса (2)

$$g(\omega)=\frac{1}{2}\left[\exp(i\varphi_0)\widetilde{g}(\omega,\omega_0)+ \right. \\ \left. +\exp(-i\varphi_0)\widetilde{g}(\omega,-\omega_0)\right] \tag{3}$$

где

$$\widetilde{g}(\omega,\omega_0)=\frac{1}{\pi}\frac{Sin(\omega-\omega_0)T}{\omega-\omega_0} \tag{4}$$

Функция (3) удовлетворяет условию для частотного спектра реальных импульсов $g(-\omega)=g^*(\omega)$ [3].

Для упрощения дальнейших выкладок проанализируем функцию (3) и способ ее использования в (1). Первое слагаемое в (3) существенно отлично от нуля при положительных значениях ω ($\omega_0>0$), в то время как второе при отрицательных ω. При выполнении условия

$$\frac{\int_{-\infty}^{0}\left|\widetilde{g}(\omega,\omega_0)\right|^2 d\omega}{\int_{0}^{\infty}\left|\widetilde{g}(\omega,\omega_0)\right|^2 d\omega}<<1 \tag{5}$$

и учитывая, что интегрирование в (1) ведется только по $\omega>0$, предлагается второе слагаемое в (3) приравнять к нулю. Условие (5) выполняется для $T\ge 10$. С учетом всего вышесказанного, рассмотрим временную зависимость первоначального импульса в виде

$$\widetilde{\gamma}(t)=\begin{cases}\exp(i\varphi_0-i\omega_0 t); & |t|\le T\\ 0; & |t|>T\end{cases} \tag{2a}$$

Частотный спектр (2a) равен (4).

Т.к. $\widetilde{g}(\omega,\omega_0)$ в области отрицательных частот принимает значения мало отличные от нуля, то нижний предел интегрирования в (1) можно положить равным минус бесконечности. Подставляя (4) в (1) и интегрируя по $d\omega$, получаем интегральное представление для поля импульса

$$E(x,y,z,t)=\frac{1}{2\pi cz}\exp(i\varphi_0+i\omega_0 t)\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\eta_1+T)\varphi(u,v)dudv-$$
$$-\frac{1}{2\pi cz}\exp(i\varphi_0-i\omega_0 t)\times \qquad (6)$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\eta_1-T)\varphi(u,v)dudv-$$
$$-\frac{\omega_0 i}{2\pi cz}\iint\limits_{G(u,v)}\tilde{\gamma}(\eta_1)\varphi(u,v)dudv$$

где $\eta_1=t-\frac{z}{c}-\frac{(u-x)^2}{2cz}-\frac{(v-y)^2}{2cz}$.

Первое и второе слагаемое в (6) описывают поле, создаваемое передним и задним фронтами первоначального импульса соответственно. При выполнении условия $\mathrm{Im}(\varphi(u,v))=0$, т.е. для начального импульса с плоским волновым фронтом, учитывая, что $\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\pm T)]=0$, вклад первого и второго слагаемого в поле равен нулю. На область интегрирования третьего слагаемого наложены ограничения из условия $|\eta_1|\le T$, возникающего при задании временного профиля первоначального импульса (2а).

Из полученного интегрального представления поля следует, что временная структура импульса влияет на эволюцию пространственно-временного распределения поля при его распространении.

Рассмотрим импульс с гауссовским распределением в поперечном сечении $\varphi(u,v)=\exp\left(-\frac{u^2+v^2}{\sigma^2}\right)$. Из (6) получаем следующие выражения для поля:

$\eta<-T$

$E(x,y,z,t)\equiv 0$ - поле не дошло

до этой точки (7.1)

$|\eta|<T$

$$E(x,y,z,t)=-\frac{iA_0\omega_0}{2zc}\times$$
$$\times\exp\left(i\varphi_0-i\omega_0\eta-\frac{r^2}{\sigma^2}\right)\times \qquad (7.2)$$
$$\times\int\limits_{0}^{\rho_1^2}\exp\left(-\frac{\rho^2}{a^2}\right)\mathrm{I}_0\left(2\frac{r\rho}{\sigma^2}\right)d\rho^2$$

$\eta>T$

$$E(x,y,z,t)=-\frac{iA_0\omega_0}{2zc}\times$$
$$\times\exp\left(i\varphi_0-i\omega_0\eta-\frac{r^2}{\sigma^2}\right)\times \qquad (7.3)$$
$$\times\int\limits_{\rho_2^2}^{\rho_1^2}\exp\left(-\frac{\rho^2}{a^2}\right)\mathrm{I}_0\left(2\frac{r\rho}{\sigma^2}\right)d\rho^2$$

где

$\rho_1=\sqrt{2zc(\eta+T)}$ - радиус окружности во входной плоскости с центром в точке $(u=x, v=y)$, с которой начальное поле уже влияет на поле в точке наблюдения (x,y,z,t);

$\rho_2=\sqrt{2zc(\eta-T)}$ - радиус окружности во входной плоскости, с которой начальное поле уже не влияет на поле в точке наблюдения;

$\eta=t-\frac{z}{c}$ - "бегущее время";

$I_0(...)$ - модифицированная функция Бесселя [5];

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{1}{a^2(z)}=\frac{1}{\sigma^2}-\frac{i\omega_0}{2zc}$.

Формулы (7) дают окончательное выражение поля импульса вида (2а) при $z>0$ для любого момента времени.

В случае $\sigma\to\infty$ (что соответствует бесконечному в поперечном сечении импульсу) из (7) получаем

$$\lim_{\sigma\to\infty}E(x,y,z,t)=A_0\gamma(\eta)$$

- т.е. импульс распространяется без изменения.

При $\rho_1\to\infty$, т.е. когда поле в исследуемой точке формируется всем первоначальным импульсом, получаем обычный гауссов пучок в параболическом приближении [1], что и следовало ожидать

$$E_c(x,y,z,t)=\frac{\sigma^2}{\rho^2(z)}\exp\left(-\frac{r^2}{\rho^2(z)}\right)\tilde{\gamma}(\eta) \qquad (8)$$

где $\rho(z)=\sigma\sqrt{1+i\frac{2z}{\kappa_0\sigma^2}}$.

Поле на оси определяется выражениями

$|\eta|<T$

$$E(x,y,z,t)=-\frac{iA_0\omega_0}{2zc}a^2(z)\times$$
$$\times\exp(i\varphi_0-i\omega_0\eta)\left[1-\exp\left(-\frac{\rho_1^2}{a^2}\right)\right] \qquad (9.1)$$

$\eta>T$

$$E(x,y,z,t) = -\frac{iA_0\omega_0}{2zc}a^2(z)\times$$
$$\times\exp(i\varphi_0 - i\omega_0\eta)\left[\exp\left(-\frac{\rho_2^2}{a^2}\right) - \right. \qquad (9.2)$$
$$\left. -\exp\left(-\frac{\rho_1^2}{a^2}\right)\right]$$

Время нарастания амплитуды поля на оси (и время спада) равно

$$\Delta\eta \approx \frac{\sigma^2}{2zc} \qquad (10)$$

Видно, что длительность процесса установления и спада амплитуды поля обратно пропорционально расстоянию до входной плоскости. Элементарные оценки показывают, что эти процессы могут занимать от нескольких периодов до долей периода.

Перед обсуждением результатов моделирования следует сделать замечание о величинах, которые следует рассматривать в нашем случае.

При стандартном рассмотрении поля в скалярном приближении его задают в виде $E = A\exp(i\varphi)$. Плотность энергии электромагнитного поля Q [6], величина, регистрируемая приборами, определяется уравнением

$$Q = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\widetilde{E}}{\partial t}\right)^2 + \left(\nabla\widetilde{E}\right)^2\right] \qquad (11)$$

где $\widetilde{E} = \mathrm{Re}(E)$, $\nabla = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}$ - для полей с цилиндрической симметрией. Получаем, что

$$\widetilde{E}_t = A_t Cos(\varphi) + A\varphi_t Cos(\varphi + \pi/2) \qquad (12.1)$$

$$\widetilde{E}_z = A_z Cos(\varphi) + A\varphi_z Cos(\varphi + \pi/2) \qquad (12.2)$$

$$\widetilde{E}_r = A_r Cos(\varphi) + A\varphi_r Cos(\varphi + \pi/2) \qquad (12.3)$$

где $\varphi \sim \omega t - \kappa z$. Учитывая малость длин волн для электромагнитного спектра, первыми слагаемыми в первых двух уравнениях пренебрегают по сравнению со вторым, что эквивалентно применению метода медленно меняющихся амплитуд.

Значение слагаемых третьего уравнения так же малы по сравнению с оставленными членами. Учитывая, что среднее значение $Cos^2(\varphi + \pi/2)$ за период равно 0.5, получаем - плотность энергии электромагнитного поля для длинных импульсов пропорциональна A^2 или $|E|^2$.

В случае же переходных процессов метод медленно меняющихся амплитуд не применим. Для данных процессов следует рассматривать $|\mathrm{Re}(E)|$, т.е. действительное значение поля.

При помощи полученных уравнений (7) исследуем эволюцию пространственно-временной структуры импульса со следующими параметрами: $T = 10$, $a_0 = 10^3$.

На рисунках 1-3 представлены распределение действительной части и амплитуды поля рассчитанного по формуле (7) для различных расстояний от входной плоскости. Видно, что в пространственно-временном распределении амплитуды поля наблюдаются ярко выраженные процессы установления и спада, их длительность оценивается формулой (10). На переднем фронте наблюдается всплеск амплитуды, который уменьшается по мере удаления от входной плоскости. В ходе выхода амплитуды поля на стационарное значение, она претерпевает осцилляции с частотой ω_0. На периферии пучка переходные процессы начинаются позже и длятся дольше, чем на оси. В пространственно-временном распределении $|\mathrm{Re}(E)|$ не наблюдается сколь либо заметных переходных процессов. Можно сделать вывод, что для физически наблюдаемых параметров электромагнитного импульса процесс установления и спада происходит мгновенно.

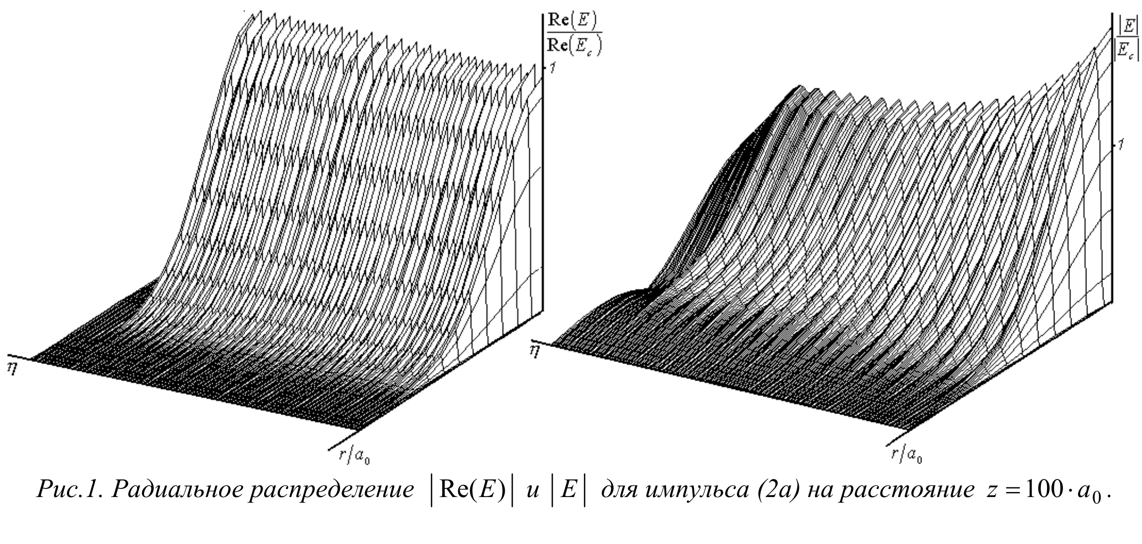

Рис.1. Радиальное распределение $|\mathrm{Re}(E)|$ *и* $|E|$ *для импульса (2а) на расстояние* $z = 100 \cdot a_0$.

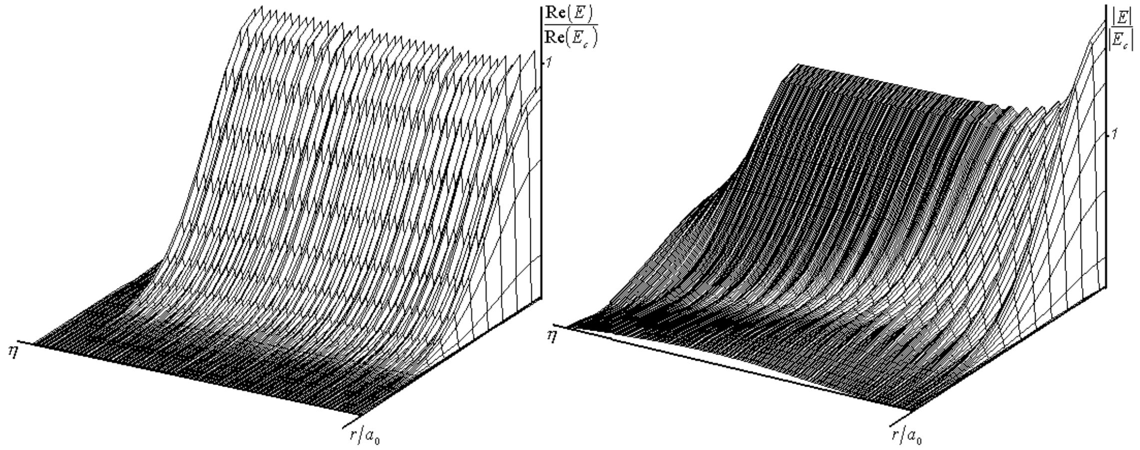

Рис.2. Радиальное распределение $|\mathrm{Re}(E)|$ *и* $|E|$ *для импульса (2а) на расстояние* $z = 300 \cdot a_0$.

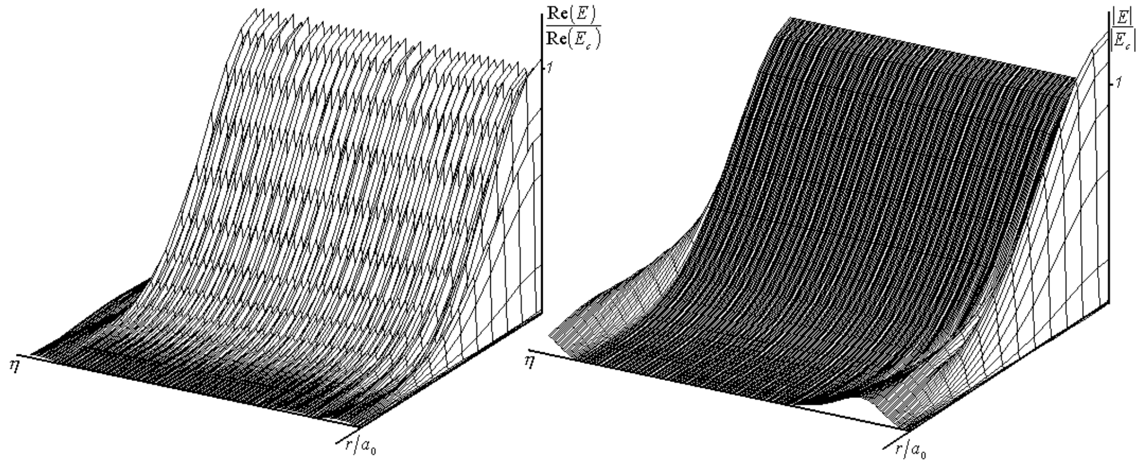

Рис.3. Радиальное распределение $|\mathrm{Re}(E)|$ *и* $|E|$ *для импульса (2а) на расстояние* $z = 1500 \cdot a_0$.

Вывод

Специальным подбором функции временного профиля с крутым фронтом удалось получить удобное интегральное представление для поля импульса с гауссовым распределением в поперечном сечении. Показано, что для поля импульсов, длительностью более двадцати периодов, отсутствуют ярко выраженные переходные процессы (амплитуда переходных процессов пренебрежимо мала по сравнению с абсолютным значением |Re(E)|).

Результаты, представленные в данной статье, являются справедливыми для любых волновых процессов описываемых волновым уравнением.

Литература

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П., Теория волн. - М.: Наука, 1979.
2. Гладких А.В., Уравнения для описания пространственно-временной эволюции предельно-коротких импульсов// Компьютерная оптика- 2000, т. 20.
3. Борн М., Вольф Э., Основы оптики. - М.: Наука, 1973.
4. Бельский А.М., Хапалюк А.П., О распространении пространственно-ограниченного импульса в изотропной среде// Журнал прикладной спектроскопии- 1972, т. 27, в. 1, стр. 150-155.
5. Справочник по специальным функциям М.: Наука,1979.
6. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Квантовые поля. -М.: Наука, 1993.