

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

А.А. Дегтярев, А.Е. Деркач.

Самарский государственный аэрокосмический университет

## Аннотация

Для решения уравнения Шредингера, описывающего распространение электромагнитной волны в нелинейной среде, используется консервативная разностная схема с итерационным уточнением, которая имеет квадратичный порядок точности по направлению распространения волны и близкий к квадратичному по радиальной переменной. Результаты, полученные с помощью вычислительных экспериментов, полностью подтверждают теоретические исследования. Важной особенностью данного метода является возможность моделирования процесса распространения волны на расстояние порядка десятков метров в нелинейной среде.

## Введение

Как известно [1], нелинейное уравнение Шредингера является частным случаем волнового уравнения в параболическом приближении и с учетом эффекта самовоздействия. Эффект самовоздействия проявляется при распространении оптического излучения в средах с кубичной нелинейностью (поляризация пропорциональна напряженности электрического поля в третьей степени).

С учетом этого эффекта уравнение Шредингера в радиально-симметричном случае запишется как [2]

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{i}{2kn_0} \Lambda_r U - \frac{kn_{nl}^2}{2n_0} |U|^2 U = 0, \quad (1)$$

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq L,$$

где  $\Lambda_r \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right)$  - оператор Лапласа в ради-

ально-симметричном случае,

$U$  - напряженность электрического поля,

$k$  - волновой вектор,

$n_0$  - показатель преломления среды,

$n_{nl}$  - изменение показателя преломления под действием поля распространяющейся волны.

Уравнение (1) необходимо дополнить граничным и начальным условиями

$$\begin{cases} U|_{z=0} = \phi(r) \\ U|_{r=R} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Функция  $\phi(r)$  описывает напряженность электрического поля волны на входе в среду (волновод), а нулевые граничные условия показывают, что среда (волновод) ограничена проводящей оболочкой.

Без учета нелинейных эффектов уравнение Шредингера принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{i}{2kn_0} \Lambda_r U = 0 \quad (3)$$

В дальнейшем уравнение (1) будем называть нелинейным уравнением Шредингера, а уравнение (3) - линейным уравнением.

### 1. Расчетная конечно-разностная схема с итерационным уточнением

Для численного решения системы (1)-(2) построим консервативную разностную схему [2]. Определим сетку

$$z_k = k \cdot h_z, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad h_z = L/K$$

$$r_i = (i+0,5) \cdot h_r, \quad i = \overline{0, I-1}, \quad h_r = R/(I+0,5)$$

где  $h_z, h_r$  - шаги по переменной  $z$ , описывающей направление распространения волны, и по радиальной переменной соответственно.

Оператор Лапласа по переменной  $r$  аппроксимируем следующим разностным оператором [3]:

$$\Lambda_r A(r) = \frac{1}{rh_r} (r+0,5h_r) \frac{A(r+h_r) - A(r)}{h_r} - \frac{1}{rh_r} (r-0,5h_r) \frac{A(r) - A(r-h_r)}{h_r},$$

причем  $\Lambda_r = \Lambda_r A + O(h_r^2/r)$  для достаточно гладкой функции  $A$ . Задаче (1)-(2) поставим в соответствие следующую двухслойную нелинейную разностную схему:

$$\begin{cases} \frac{a(z+h_z, r) - a(z, r)}{h_z} + \frac{i}{2kn_0} \Lambda_r A(z, r) - \frac{kn_{nl}^2}{2n_0} |A(z, r)|^2 A(z, r) = 0 \\ a(0, r) = \phi(r) \\ a(z, R) = 0 \\ A(z, r) = 0,5(a(z+h_z, r) + a(z, r)). \end{cases} \quad (4)$$

Система разностных уравнений (4) является нелинейной. Для нахождения неизвестной функции  $a(z+h_z, r)$  можно использовать итерационный метод последовательных приближений в сочетании с разностной прогонкой по  $r$ :

$$\begin{cases} \frac{a^{s+1}(z+h_z, r) - a^s(z, r)}{h_z} + \frac{i}{2kn_0} \Lambda_r A^{s+1}(z, r) - \frac{kn_{nl}^2}{2n_0} |A^s(z, r)|^2 A^s(z, r) = 0, \\ a^s(z+h_z, R) = 0, \\ A^s(z, r) = 0,5 \left( a^s(z+h_z, r) + a^s(z, r) \right), \\ a^0(z+h_z, r) = u(z, r), \quad s = \overline{0, 1, \dots} \end{cases} \quad (5)$$

Теоретические исследования сходимости схем вида (5) приведены в работе [2].

Необходимо также отметить, что так как данная схема является консервативной, она - аналог интегральной формы закона сохранения электромагнитной энергии в среде.

## 2. Вычислительные эксперименты для среды с постоянным показателем преломления

Рассмотрим сначала аналитическое решение линейного уравнения, то есть  $n_{nl} = 0$ . В этом случае решение задачи (1) запишем в виде

$$U(z, r) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \exp\left(-i \frac{\mu_m^2}{R^2} \alpha z\right) J_0\left(\frac{\mu_m}{R} r\right),$$

где  $\alpha = -\frac{1}{2kn_0}$ ,

$$C_m = \int_0^R \varphi(r) J_m\left(\frac{\mu_m}{R} r\right) dr,$$

а  $\mu_m$  - нули функции Бесселя нулевого порядка.

Для простоты выберем начальное условие в виде функции Бесселя нулевого порядка

$$\phi(r) = J_0\left(\frac{\mu_1}{R} r\right),$$

тогда, используя свойство ортонормированности Бесселевых функций, получаем

$$C_0 = 1, \quad C_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots,$$

в результате решение системы (1) - (2) будет иметь вид

$$U(z, r) = \exp\left(-i \frac{\mu_1^2}{R^2} \alpha z\right) J_0\left(\frac{\mu_1}{R} r\right). \quad (6)$$

### 2.1. Результаты экспериментальных исследований линейного уравнения

Пучок, описываемый формулой (6), является стационарным, так как  $|U(r, z)|^2 = |U(r, 0)|^2$ , то есть распределение интенсивности в плоскости  $OXY$  не зависит от расстояния  $z$ . Это распределение изображено на рис. 1.

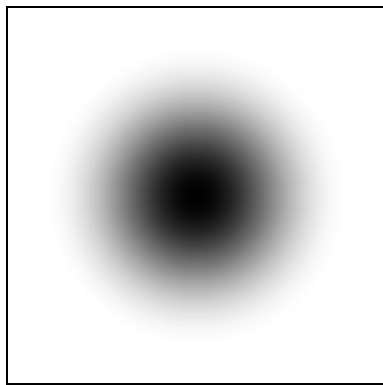


Рис. 1. Распределение интенсивности волны в линейной среде.

На рис. 2-3 приведены результаты численного решения линейного уравнения Шредингера на различных расстояниях от входа в среду.<sup>1</sup>

В расчетах были использованы следующие значения параметров:

$$R=50 \text{ мкм};$$

$$\lambda=0,63 \text{ мкм}, \text{ причем } \lambda=2\pi/k;$$

$$n_0=1.$$

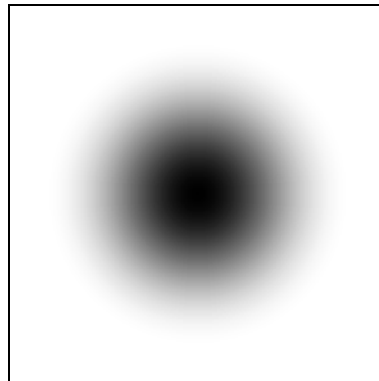


Рис. 2. Распределение интенсивности волны на расстоянии  $L$  от входа в среду ( $L = 1 \text{ м}$ ,  $nz = 1000$ ,  $nr = 100$ ).

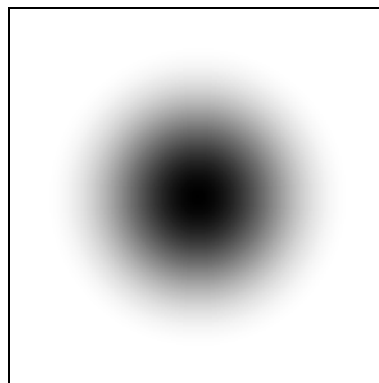


Рис. 3. Распределение интенсивности волны на расстоянии  $L$  от входа в среду ( $L = 10 \text{ м}$ ,  $nz = 1000$ ,  $nr = 100$ ).

Как видно из приведенных графиков результат численного решения уравнения Шредингера полностью совпадает с результатом аналитического решения. Это подтверждает правильность выбора консервативной разностной схемы (5) для вычислительных экспериментов с уравнением Шредингера.

### 3.2. Численное решение нелинейного уравнения Шредингера

#### Самофокусировка пучка

На рис.4-6 приведены результаты численного решения нелинейного уравнения Шредингера со следующими параметрами:

$$R=50 \text{ мкм};$$

$$\lambda=0,63 \text{ мкм}, \text{ причем } \lambda=2\pi/k;$$

<sup>1</sup> В дальнейшем использованы следующие обозначения:  
 $nr$  - количество интервалов разбиений по радиусу;  
 $nz$  - количество интервалов разбиений по оси  $z$ .

Белым цветом изображается график решения линейного уравнения (3), а серым цветом - график численного решения уравнения Шредингера (1)-(2).

$$n_0 = 1;$$

$$n_{нл}^2 = 0,001, \text{ причем } n_{нл} > 0.$$

В работе [1] показано, что при  $n_{нл} > 0$  происходит фокусировка пучка на расстоянии

$$f = R \sqrt{\frac{n_0^2}{2n_{нл}^2 \phi(0)}} \text{ от входа в нелинейную среду.}$$

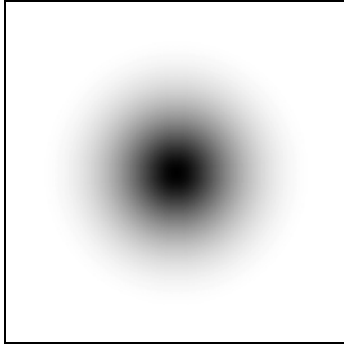


Рис. 4. Распределение интенсивности волны на расстоянии  $L$  от входа в среду ( $L = 500 \text{ мкм}$ ,  $nz = 1000$ ,  $nr = 100$ ).

Подставляя экспериментальные значения параметров, получаем, что  $f \approx 1100 \text{ мкм}$ . Вычислительные эксперименты (рис. 3-5) показывают, что фокусировка пучка происходит на расстоянии порядка 800-900 мкм. Таким образом, результаты численного решения достаточно близки к теоретическим оценкам, что еще раз подтверждает практическую пригодность выбранной разностной схемы.

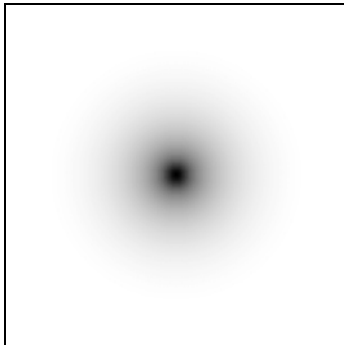


Рис. 5. Распределение интенсивности волны на расстоянии  $L$  от входа в среду ( $L = 700 \text{ мкм}$ ,  $nz = 1000$ ,  $nr = 100$ ).

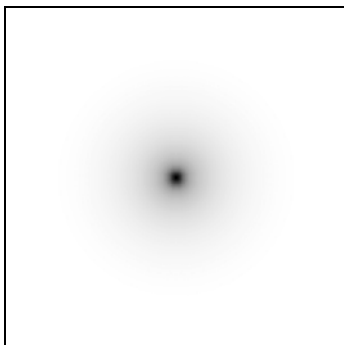


Рис. 6. Распределение интенсивности волны на расстоянии  $L$  от входа в среду ( $L = 750 \text{ мкм}$ ,  $nz = 1000$ ,  $nr = 100$ ).

### Самодефокусировка пучка

На рис. 7-10 приведены результаты численного решения нелинейного уравнения Шредингера со следующими параметрами:

$$R = 50 \text{ мкм};$$

$$\lambda = 0,63 \text{ мкм}, \text{ причем } \lambda = 2\pi/k;$$

$$n_0 = 1;$$

$$n_{нл}^2 = 0,001, \text{ причем } n_{нл} < 0.$$

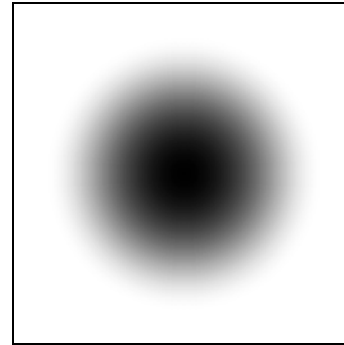


Рис. 7. Распределение интенсивности волны на расстоянии  $L$  от входа в среду ( $L = 500 \text{ мкм}$ ,  $nz = 1000$ ,  $nr = 100$ ).

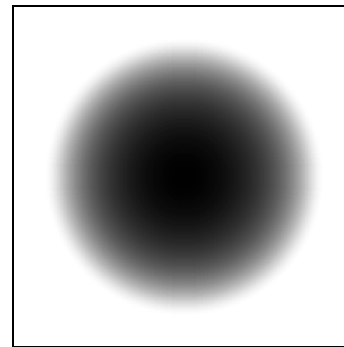


Рис. 8. Распределение интенсивности волны на расстоянии  $L$  от входа в среду ( $L = 1 \text{ мм}$ ,  $nz = 1000$ ,  $nr = 100$ ).

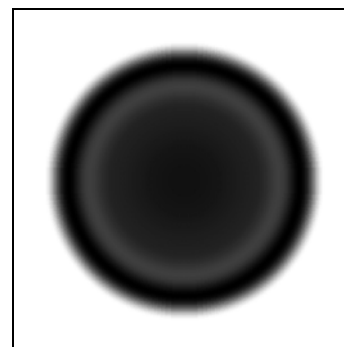


Рис. 9. Распределение интенсивности волны на расстоянии  $L$  от входа в среду ( $L = 1,5 \text{ мм}$ ,  $nz = 1000$ ,  $nr = 100$ ).

В работе [1] показано, что при  $n_{нл} < 0$  происходит самодефокусировка пучка в нелинейной среде, то есть смещение энергии пучка в периферийную зону. Приведенные выше графики численного моделирования демонстрируют этот факт.

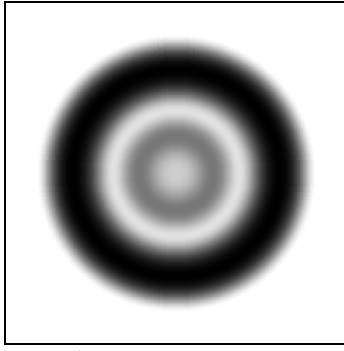


Рис. 10. Распределение интенсивности волны на расстоянии  $L$  от входа в среду ( $L = 2,5\text{мм}$ ,  $nz = 1000$ ,  $nr = 100$ ).

### 3. Вычислительные эксперименты для среды с показателем преломления, распределенным по параболическому закону

Пусть показатель преломления зависит от радиуса следующим образом

$$n_0^2 = n_1^2 \left( 1 - 2\Delta \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right), \quad (7)$$

причем  $n_{\text{пл}} = 0$ .

Будем искать решение уравнения в виде

$$U(z, r) = A(r)B(z). \quad (8)$$

Подставляя (8) в уравнение (1), получаем факторизованное уравнение

$$\frac{2ik}{B} \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{1}{n_0 A} \Lambda_r A = -f, \quad (9)$$

где  $f$  - произвольная константа.

$$\text{Таким образом, } B(z) = C \exp\left(i \frac{f}{2k} z\right). \quad (10)$$

Представим  $A(r)$  в виде произведения двух функций

$$A(r) = X(r) \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right). \quad (11)$$

После подстановки (11) и (10) в (8) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} - \frac{4r}{\omega_0^2} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} - \frac{4}{\omega_0^2} X + \\ + \frac{4r^2}{\omega_0^4} X + fn_0 X = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Осуществим замену переменных  $\alpha = r^2$ . Тогда (12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 X}{\partial \alpha^2} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\omega_0^2}\right) \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \left(\frac{fn_1}{4} - \frac{1}{\omega_0^2}\right) X + \\ + \left(\frac{\alpha}{\omega_0^4} - \frac{\alpha \Delta fn_1}{4a^2}\right) X = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{Пусть } \frac{1}{\omega_0^4} = \frac{\Delta fn_1}{4a^2}. \quad (14)$$

Осуществим еще одну замену переменных

$$\alpha' = \frac{2\alpha}{\omega_0^2} \quad (15)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \alpha' \frac{\partial^2 X}{\partial \alpha'^2} + (1 - \alpha') \frac{\partial X}{\partial \alpha'} + \\ + \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{fn_1}{4} - \frac{1}{\omega_0^2} \right) X = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Решением уравнения (16) являются многочлены Лагерра

$$X = L_s(\alpha') = L_s\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right), \quad (17)$$

причем

$$s = \frac{fn_1}{8} \omega_0^2 - \frac{1}{2} \quad (18)$$

Таким образом, с учетом (8), (10) и (11) получаем искомое решение

$$U(z, r) = C \exp\left(i \frac{f}{2k} z\right) L_s\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \times \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \quad (19)$$

#### 3.1. Результаты численного решения линейного уравнения Шредингера

Для вычислительных экспериментов выберем, например, моду Гаусса-Лагерра с номером  $s=10$

Тогда из (18) и (14) получаем, что

$$f = \frac{42^2 \Delta}{n_1 a^2} \quad (20)$$

$$\omega_0^2 = \frac{a^2}{21\Delta} \quad (21)$$

Для того чтобы обеспечить выполнение граничного условия, выберем аргумент многочлена Лагерра, равный десятому нулю функции.

$$\frac{2R^2}{\omega_0^2} = m_{10}, \quad (22)$$

где  $m_{10}=29,9206970123$  - десятый нуль многочлена Гаусса-Лагерра.

На рис. 11 изображено распределение интенсивности в пучке, описываемом формулой (19).

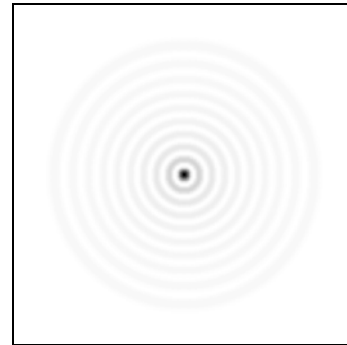


Рис. 11. Распределение интенсивности волны в линейной среде.

На рис. 12-13 приведены результаты численного моделирования линейного уравнения со следующими параметрами:

$$R = 50 \text{ мкм};$$

$$\lambda = 0,63 \text{ мкм, причем } \lambda = 2\pi/k;$$

$$n_1 = 1.$$

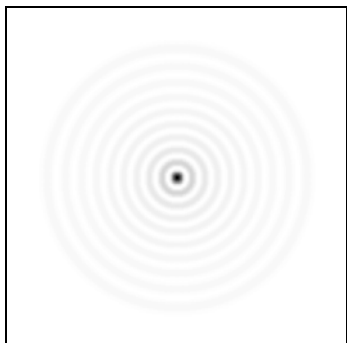


Рис. 12. Распределение интенсивности волны на расстоянии  $L$  от входа в среду ( $L = 1\text{ м}$ ,  $nz = 1000$ ,  $nr = 100$ ).

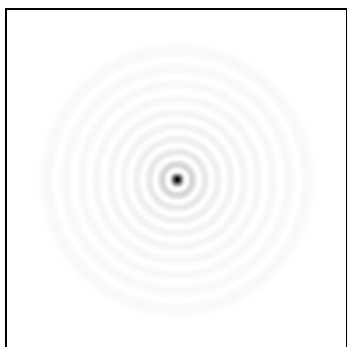


Рис. 13. Распределение интенсивности волны на расстоянии  $L$  от входа в среду ( $L = 10\text{ м}$ ,  $nz = 1000$ ,  $nr = 100$ ).

Как видно из приведенных графиков, результат численного решения уравнения Шредингера полностью совпадает с результатом аналитического решения.

### Заключение

Итак, в результате проведения вычислительных экспериментов получено подтверждение сходимости разностной схемы (5), использованной для решения нелинейного уравнения Шредингера. Процесс итерационного уточнения обнаружил быструю сходимость: для уточнения решения до величин порядка  $10^{-4}$  требуются 2-3 итерации.

Проведенные исследования подтвердили высокую точность численного решения задачи. Так для модели среды, не учитывающей эффект самовоздействия, численное решение практически совпадает с аналитическим, рассчитанным по формуле (6).

Для среды с “параболическим профилем” показатели преломления моды Гаусса-Лагерра, рассчитанные с помощью схемы (5), практически не претерпевают изменений в процессе распространения волны на расстояние порядка десятков метров, что соответствует теории [4].

Для модели среды, учитывающей эффект самовоздействия, численный расчет позволяет наблюдать как явление самофокусировки излучения, так и его самодефокусировки, что спрогнозировано теоретическими оценками, например в работе [1].

### Литература

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн // М., Наука. 1979.
2. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Трофимов В.А. Математическое моделирование в нелинейной оптике // М., Изд-во Моск. ун-та. 1989.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем // М., Наука. 1977.
4. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов // М., Мир. 1984.