

# АНАЛИЗ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА МИКРООБЪЕКТАХ С ПОМОЩЬЮ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. В. Котляр, М. А. Личманов\*

Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

\*Самарский государственный аэрокосмический университет

## Аннотация

Разработан алгоритм решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с помощью метода конечных элементов. Задача решения интегрального уравнения сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений методом Гаусса. Само интегральное уравнение вытекает из теоремы Грина для уравнения Гельмгольца и описывает дифракцию плоской волны ТЕ-поляризации на цилиндрическом прозрачном объекте с неоднородным показателем преломления.

## Введение

В [1, 2] для анализа дифракции поля на микрооптике рассмотрен метод интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В данной работе двумерная задача дифракции обобщена на случай объектов с неоднородным показателем преломления. Рассматривается случай, когда внутренняя область состоит из подобластей с постоянным показателем преломления.

### 1. Постановка задачи

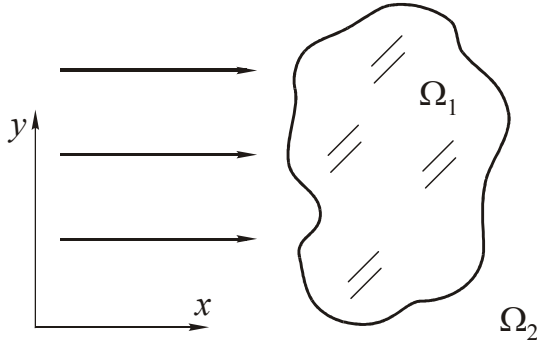


Рис. 1. Дифракция плоской волны на прозрачном объекте

Для полей  $\psi_2$   $\psi_1$  и из  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  требуется решить дифференциальные уравнения Гельмгольца [2]:

$$\begin{aligned} (\Delta + k_1^2) \psi_1 &= 0, (x, y) \in \Omega_1, \\ (\Delta + k_2^2) \psi_2 &= -g_2, (x, y) \in \Omega_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $g_2$  – источник во внешней области  $\Omega_2$ ,  $k_1$  – волновое поле для среды 1 с неоднородным показателем преломления,  $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$  – волновое поле для среды 2.

Для ТЕ-поляризации граничные условия следуют из непрерывности на границе раздела двух сред тангенциальных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} \psi_1|_S &= \psi_2|_S, (x, y) \in S, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \vec{n}}|_S &= -\frac{\partial \psi_2}{\partial \vec{n}}|_S. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\vec{n}$  и  $\vec{n}_2$  – векторы внешней к областям  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  нормали к контуру  $S$  соответственно.

Для функций  $\psi_1$  и  $G_2$  имеет место формула Грина

$$\iint_{\Omega_1} (\psi_1 \Delta G_2 - G_2 \Delta \psi_1) dx dy = \oint_S \left( \psi_1 \frac{\partial G_2}{\partial \vec{n}} - G_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \vec{n}} \right) dl. \quad (3)$$

Из уравнений (1) следует

$$\Delta \psi_1 = -k_1^2(x, y) \psi_1, \Delta \psi_2 = -k_2^2 \psi_2 - g_2. \quad (4)$$

Для функции Грина справедливо равенство

$$\Delta G_2 + k_2^2 G_2 = -\delta(M, M_0), \quad (5)$$

где  $M$  – текущая узловая точка, по которой проводится интегрирование,  $M_0$  – точка наблюдения. Иначе говоря,

$$\delta(M, M_0) = \delta(x', y'; x, y).$$

Подставляя уравнения (4, 5) в уравнение (3), получим

$$\begin{aligned} \oint_S \left( G_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \vec{n}} - \psi_1 \frac{\partial G_2}{\partial \vec{n}} \right) dl + \iint_{\Omega_1} (k_1^2(x, y) - k_2^2) \psi_1 G_2 dx dy - \iint_{\Omega_1} \psi_1(x', y') \delta(x', y'; x, y) dx' dy' &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя свойство  $\delta$ -функции, приводим уравнение (6) к виду

$$\begin{aligned} \oint_S \left( G_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \vec{n}} - \psi_1 \frac{\partial G_2}{\partial \vec{n}} \right) dl + \iint_{\Omega_1} (k_1^2(x, y) - k_2^2) \psi_1 G_2 dx dy &= \begin{cases} \psi_1, (x, y) \in \Omega_1 \\ 0, (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично, применив формулу Грина для функций  $\psi_2$  и  $G_2$  при помощи уравнений (4, 5), получаем:

$$\begin{aligned} \oint_S \left( G_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \vec{n}_2} - \psi_2 \frac{\partial G_2}{\partial \vec{n}_2} \right) dl + \iint_{\Omega_2} g_2 G_2 dx dy &= \begin{cases} 0, (x, y) \in \Omega_1 \\ \psi_2, (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (8)$$

Сложив уравнения (7) и (8) с учетом граничных условий (2), получим

$$\iint_{\Omega_1} (k_1^2 - k_2^2) \psi_1 G_2 dx dy + \psi_0 = \begin{cases} \psi_1, (x, y) \in \Omega_1 \\ \psi_2, (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}, \quad (9)$$

где  $\psi_0(x, y) = \iint_{\Omega_2} g_2 G_2 dx dy$  – поле в области  $\Omega_1$  или  $\Omega_2$ , созданное источниками с функцией  $g_2(x, y)$ .

Первое из уравнений (9) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода относительно  $\psi_1(x, y)$  и при  $\psi_0 \neq 0$  имеет единственное нетривиальное решение.

Далее мы полагаем, что точечный источник находится далеко от области  $\Omega_1$ , и  $\psi_0(x, y)$  можно рассматривать как плоскую волну. Рассмотрим случай, когда плоская волна падает вдоль оси  $x$  слева направо в выбранной системе координат (рис. 1):

$$\psi_0 = e^{ik_2 x}. \quad (10)$$

Функция Грина [3] для двумерных световых полей (цилиндрическая волна) равна функции Ханкеля первого рода нулевого порядка, умноженной на  $\frac{i}{4}$ :

$$G_2(\xi) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\xi), \quad (11)$$

где  $\xi = k_2 \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ .

По определению

$$H_0^{(1)} = J_0 + iY_0, \quad (12)$$

где  $J_0$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $Y_0$  – функция Неймана нулевого порядка.

Функции  $J_0$  и  $Y_0$  аппроксимируются многочленами [4]:

$$-3 \leq \xi \leq 3,$$

$$\begin{aligned} J_0(\xi) = & 1 - 2,2499997 \left(\frac{\xi}{3}\right)^2 + 1,2656208 \left(\frac{\xi}{3}\right)^4 - \\ & - 0,3163866 \left(\frac{\xi}{3}\right)^6 + 0,0444479 \left(\frac{\xi}{3}\right)^8 - \\ & - 0,0039444 \left(\frac{\xi}{3}\right)^{10} + 0,0002100 \left(\frac{\xi}{3}\right)^{12} + \varepsilon, \end{aligned}$$

где  $|\varepsilon| < 5 \cdot 10^{-8}$ ,

$$0 < \xi \leq 3,$$

$$\begin{aligned} Y_0(\xi) = & \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\xi}{2}\right) J_0(\xi) + 0,36746691 + \\ & + 0,60559366 \left(\frac{\xi}{3}\right)^2 - 0,74350384 \left(\frac{\xi}{3}\right)^4 + \\ & + 0,25300117 \left(\frac{\xi}{3}\right)^6 - 0,04261214 \left(\frac{\xi}{3}\right)^8 + \\ & + 0,00427916 \left(\frac{\xi}{3}\right)^{10} - 0,00024846 \left(\frac{\xi}{3}\right)^{12} + \varepsilon, \end{aligned}$$

где  $|\varepsilon| < 1.4 \cdot 10^{-8}$ ,

$$3 \leq \xi < \infty,$$

$$J_0(\xi) = \xi^{-1/2} f_0 \cos \theta_0, \quad Y_0(\xi) = \xi^{-1/2} f_0 \sin \theta_0,$$

$$\begin{aligned} f_0 = & 0.79788456 - 0.00000077 \left(\frac{3}{\xi}\right) - \\ & - 0.00552740 \left(\frac{3}{\xi}\right)^2 - 0.00009512 \left(\frac{3}{\xi}\right)^3 + \\ & + 0.00137237 \left(\frac{3}{\xi}\right)^4 - 0.0007285 \left(\frac{3}{\xi}\right)^5 + \\ & + 0.00014476 \left(\frac{3}{\xi}\right)^6 + \varepsilon, \end{aligned}$$

где  $|\varepsilon| < 1.6 \cdot 10^{-8}$ ,

$$\begin{aligned} \theta_0 = & \xi - 0.78539816 - 0.04166397 \left(\frac{3}{\xi}\right) - \\ & - 0.00003954 \left(\frac{3}{\xi}\right)^2 + 0.00262573 \left(\frac{3}{\xi}\right)^3 - \\ & - 0.00054125 \left(\frac{3}{\xi}\right)^4 - 0.00029333 \left(\frac{3}{\xi}\right)^5 + \\ & + 0.00013558 \left(\frac{3}{\xi}\right)^6 + \varepsilon, \end{aligned}$$

где  $|\varepsilon| < 7 \cdot 10^{-8}$ .

Рассмотрим случай, когда область  $\Omega_1$  состоит из  $p$  частей, в которых  $k_1$  – постоянная величина

$$\Omega_1 = \sum_{i=1}^p \Omega_{1i}.$$

Тогда уравнения (9) приобретают следующий вид

$$\sum_{i=1}^p (k_{1i}^2 - k_2^2) \iint_{\Omega_{1i}} \psi_1 G_2 dx dy + \psi_0 = \begin{cases} \psi_1, (x, y) \in \Omega_1 \\ \psi_2, (x, y) \in \Omega_2 \end{cases},$$

(13) где  $k_{1i} = \text{const}$  внутри подобласти  $\Omega_{1i}$ .

## 2. Метод расчета

В методе конечных элементов уравнения (9) сводятся к системе алгебраических уравнений. Используя разложение искомого поля по базису интерполирующих функций

$$\psi(x, y) = \sum_{m=1}^N C_m \psi_m(x, y), \quad (14)$$

вместо первого из уравнений (9) получаем линейную систему алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^N C_m D_{mn} = \psi_{0n}, \quad (15)$$

где

$$D_{mn} = \psi_m(x_n, y_n) - \iint_{\Omega_1} (k_1^2 - k_2^2) \psi_m(x', y').$$

$$G_2(x_n, y_n; x', y') dx' dy', \quad (16)$$

$$\psi_{0n} = \psi_0(x_n, y_n).$$

В качестве системы линейных интерполирующих функций можно выбрать функцию вида

$$\psi_m(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{x_m - x}{\Delta} - \frac{y_m - y}{\Delta}, & (x, y) \in \Omega_1(\Delta_1) \\ 1 - \frac{x_m - x}{\Delta}, & (x, y) \in \Omega_1(\Delta_2) \\ 1 + \frac{y_m - y}{\Delta}, & (x, y) \in \Omega_1(\Delta_3) \\ 1 + \frac{x_m - x}{\Delta} + \frac{y_m - y}{\Delta}, & (x, y) \in \Omega_1(\Delta_4) \\ 1 + \frac{x_m - x}{\Delta}, & (x, y) \in \Omega_1(\Delta_5) \\ 1 - \frac{y_m - y}{\Delta}, & (x, y) \in \Omega_1(\Delta_6) \end{cases} \quad (17)$$

где  $\Delta$  – шаг сетки отсчетов, показанной на рис. 2.

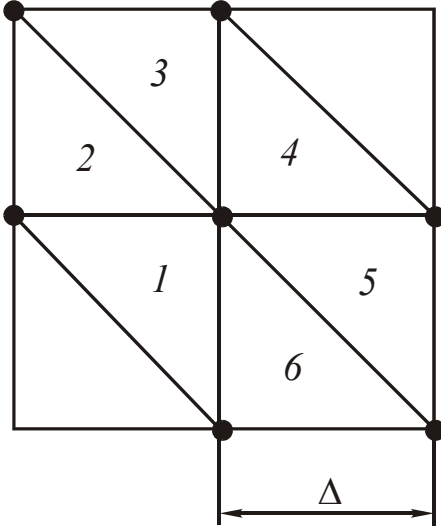


Рис. 2. Фрагмент триангуляции.

Так как подынтегральная функция из уравнения (16) имеет сложный вид, то ее интеграл реализуется численно по каждому из шести треугольников для текущего узла  $m$ . При этом для треугольников 2, 4 и 6 он имеет вид:

$$\sum_{l=0}^K \sum_{p=0}^{K-l} (k_1^2(a+l\Delta', c+p\Delta') - k_2^2) \cdot [\alpha(a+l\Delta') + \beta(c+p\Delta') + \gamma] \cdot [J_0(x_n, y_n; a+l\Delta', c+p\Delta') + iY_0(x_n, y_n; a+l\Delta', c+p\Delta')] \Delta'^2, \quad (18)$$

а для треугольников 1, 3 и 5 –

$$\sum_{l=0}^K \sum_{p=0}^{K-l} (k_1^2(a+l\Delta', c-p\Delta') - k_2^2) \cdot [\alpha(a+l\Delta') + \beta(c-p\Delta') + \gamma] \cdot [J_0(x_n, y_n; a+l\Delta', c-p\Delta') + iY_0(x_n, y_n; a+l\Delta', c-p\Delta')] \Delta'^2. \quad (19)$$

Здесь  $(a, c)$  – координаты точки, от которой начинается интегрирование, а  $\Delta'$  – шаг внутренней сетки отсчетов, показанной на рис. 3.

Так как функция Ханкеля (12) не определена в нуле, то значение интеграла из уравнения (16) можно заменить на интеграл по  $\varepsilon$ -окрестности, где  $\varepsilon$  – сколь угодно малая величина. Можно показать, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  такой интеграл стремится к нулю.

Матрица системы (14) является полностью заполненной с преобладающей главной диагональю, поэтому для решения системы используется метод Гаусса для комплексных чисел.

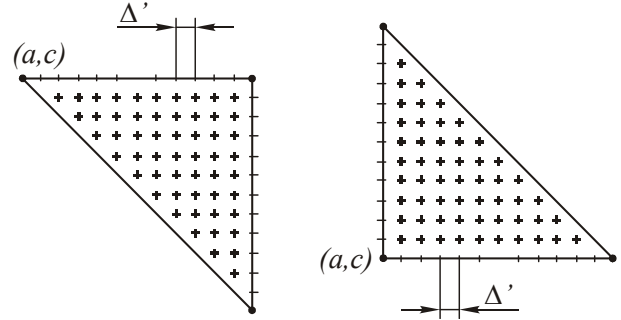


Рис. 3. Разбиение треугольников для численного интегрирования.

Решив систему уравнений (14), получаем комплексные коэффициенты  $C_m, m=1, \dots, N$ , которые подставляем затем во второе из уравнений (9):

$$\psi_2(x_n, y_n) = \psi_0(x_n, y_n) + \sum_{m=1}^N C_m \cdot \iint_{\Omega_1} (k_1^2 - k_2^2) \psi_m(x', y') G_2(x_n, y_n; x', y') dx' dy' \quad (20)$$

### 3. Численная реализация

Для сравнения результатов вычислений с гибридным методом, использующимся в работе [2], был выбран квадратный объект с постоянным показателем преломления. Оба метода дали одинаковое решение с расхождением результатов порядка 5%. Ниже приведены примеры дифракции плоской волны с длиной  $\lambda=1$  мкм на однородных объектах типа призмы (рис. 4) и бинарного выступа (рис. 5), а также на прямоугольной области, состоящей из двух квадратов и промежутка между ними (рис. 6). Такую область можно расценивать как объект с участками, где показатель преломления постоянный. Все объекты имеют характерный размер, равный 1 мкм. Показатель преломления всех объектов равен 2. Для среды  $n=1$ . Число отсчетов внешней области –  $100 \times 100$ . Число отсчетов внутри объектов можно получить, исходя из расчета 30 отсчетов на 1 мкм. Сечения интенсивности по  $x$  и  $y$  (рис. 4-6б, в) вычислены в местах, указанных штрихами на рис. 4-6а. Интересно отметить, что не зависимо от формы объекта максимальное значение интенсивности достигается внутри объекта вблизи его контура.

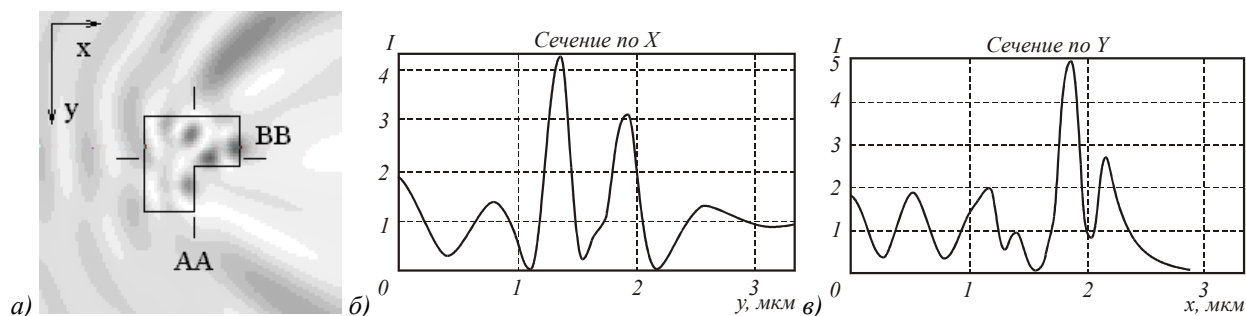


Рис. 4. Дифракция плоской волны на однородном бинарном выступе:  
а) распределение интенсивности в плоскости XY; б) сечение по X; в) сечение по Y.

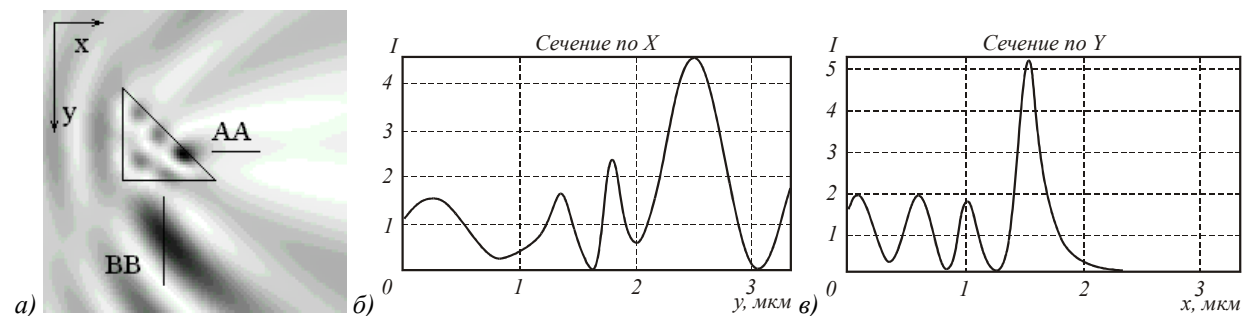


Рис. 5. Дифракция плоской волны на однородной треугольной призме:  
а) распределение интенсивности в плоскости XY; б) сечение по X; в) сечение по Y.

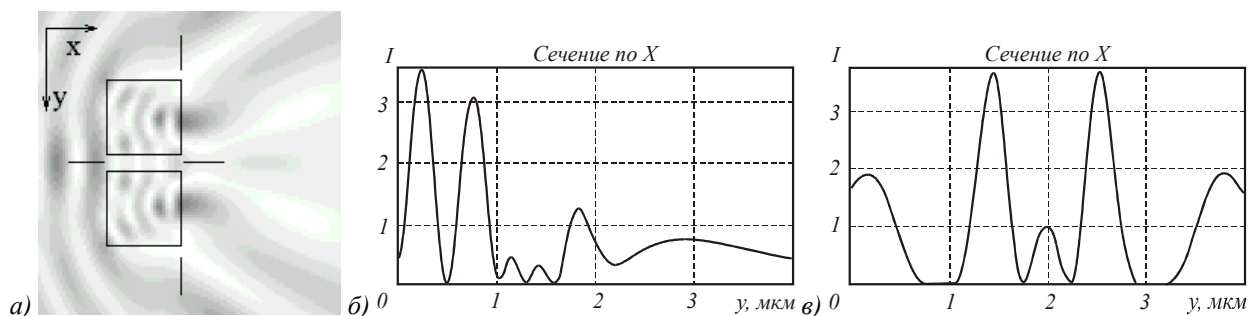


Рис. 6. Дифракция плоской волны на кусочно однородном объекте (два квадрата):  
а) распределение интенсивности в плоскости XY; б) сечение по Y; в) сечение по X.

### Заключение

Разработан метод анализа дифракции света на прозрачных цилиндрических микрообъектах с произвольным контуром и с неоднородным распределением показателя преломления.

### Благодарность

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 99-01-39012, 00-01-00031, 0015-96114)

### Литература

1. Котляр В.В., Нестеренко Д.В. Анализ дифракции света на микрооптике гибридным методом ко-

нечных элементов – граничных элементов // Компьютерная Оптика. 2000, №20. С. 10-14.

2. Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Математические модели электродинамики // М., Высшая школа. 1991. С. 223.

3. Солимено С., Крозиньяни Б., Портро П. Ди. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения // М., Мир. 1989. С. 662.

4. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., Наука. 1979. С. 830.