

МЕТОДЫ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИОННОЙ ОПТИКИ

С.Г. Волотовский, Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов

Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

В данной работе предложен метод решения системы уравнений Максвелла для случая дифракции плоской электромагнитной волны на дифракционном оптическом элементе, представляющем тонкую пластинку с нанесенным на нее микрорельефом. Расчет проводился в рамках строгой электромагнитной теории. Метод основан на приведении исходной системы уравнений Максвелла к системе интегродифференциальных уравнений.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется методам расчета дифракционных оптических элементов в рамках электромагнитной теории. Применение различных разностных схем к решению системы уравнений Максвелла требует значительных вычислительных ресурсов.

В данной работе предложен метод решения системы уравнений Максвелла для случая дифракции плоской электромагнитной волны на дифракционном оптическом элементе, представляющем собой тонкую пластинку с нанесенным на нее микрорельефом. Расчет проводится в рамках строгой электромагнитной теории. Метод основан на приведении исходной системы уравнений Максвелла к системе интегродифференциальных уравнений.

Рассмотрим прямую задачу дифракции.

Пусть освещающий пучок с заданными значениями векторов электрического и магнитного поля падает на дифракционный оптический элемент.

Анализируя оптическую схему, расположенную на рис. 1, можно выделить несколько областей:

1. между источником и дифракционным оптическим элементом,
2. подложки,
3. модуляции,
4. между областью модуляции и регистратором.

Необходимо найти значение векторов электрического и магнитного поля в области регистратора.



Рис. 1. Оптическая схема.

1. Формальная теория рассеяния для бивекторного электромагнитного поля

В данном разделе изложены основы формального математического аппарата, который в дальнейшем будет использован для описания процессов дифракции света на дифракционных оптических элементах. Приводимый математический аппарат частично заимствован из квантовой механики [1] и теории взаимодействующих классических полей.

Уравнения Максвелла для бивекторного поля имеют вид:

$$\frac{i}{k} \frac{\partial W}{\partial z} = HW, \quad (1)$$

$$W = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix},$$

где H - матричный дифференциальный оператор, называемый также оператором Гамильтона, E_i , H_i - компоненты электрического и магнитного поля вдоль координатных осей x^i .

В дальнейшем четырехкомпонентный вектор W будем называть бивектором, а соответствующее поле бивекторным электромагнитным полем. Выражение (1) можно рассматривать как операторную запись в абстрактном гильбертовом пространстве бивекторов. В этом случае система уравнений Максвелла приобретает стандартный вид эволюционного уравнения.

В координатном представлении оператор Гамильтона имеет следующий вид:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$A = \frac{-1}{k^2} \begin{bmatrix} \partial_{x^1} & 0 \\ 0 & \partial_{x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\partial_{x^2} & \partial_{x^1} \\ -\partial_{x^2} & \partial_{x^1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} \partial_{x^1} & 0 \\ 0 & \partial_{x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\partial_{x^2} & \partial_{x^1} \\ -\partial_{x^2} & \partial_{x^1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где x^i - декартовы координаты, ε - диэлектрическая проницаемость среды.

Операторное уравнение (1) можно формально проинтегрировать:

$$W(t) = U_1(t, t_0) W(t_0) = \exp(-i(t - t_0)H) W(t_0), \quad (3)$$

где

$$U_1(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{t_{n-1}}^t d\xi_{n-1} \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} d\xi_{n-2} \times \int_{t_1}^{t_2} d\xi_1 \int_{t_0}^{t_1} d\xi_0 [H(\xi_{n-1})H(\xi_{n-2}) \dots H(\xi_1)H(\xi_0)], \quad (4)$$

где $t = kz$.

Здесь приведена запись уравнений в абстрактном операторном представлении. Для решения конкретных физических задач нужно все векторы и операторы записать в конкретном представлении.

Произвольную функцию из рассматриваемого линейного гильбертова пространства представим в виде линейной комбинации:

$$W = \sum_n f^n(z) F_n(x_1, x_2). \quad (5)$$

Набор функций $f^n(z)$, будем называть волновой функцией бивекторного электромагнитного поля в f -представлении. Каждому абстрактному оператору в данном базисе можно сопоставить матрицу H_n^m

$$HF_n = \sum_m H_n^m(f) F_m(x^1, x^2). \quad (6)$$

Система уравнений Максвелла в F -представлении записывается в виде:

$$\frac{i}{k} \frac{\partial f^m}{\partial z} = \sum_n H_n^m(z) f_n(z).$$

В общем случае система базисных функций не является счетной. В этом случае суммирование заменяется интегрированием.

Базисные векторы в координатном представлении имеют вид:

$$X_{y_1 y_2 m}(x_1, x_2) = \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \begin{bmatrix} \delta_{m1} \\ \delta_{m2} \\ \delta_{m3} \\ \delta_{m4} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $\delta(x)$ - функция Дирака.

Бивекторное поле имеет вид:

$$W(x^1, x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{m=4} W^{y^1 y^2 m}(x^1, x^2) dy^1 dy^2. \quad (8)$$

В дальнейшем для записи выражений будем использовать правило Эйнштейна, согласно которому по повторяющимся индексам производится суммирование или интегрирование.

Если в пространстве существуют два базиса, связанные соотношением

$$V_m = S_m^n(v \rightarrow f) F_n, \quad (9)$$

тогда волновые функции бивекторных полей и матричные элементы операторов в различных представлениях связаны соотношением

$$f_n = S_m^n(v \rightarrow f) v^m, \quad (10)$$

$$H_i^q(f) = S_i^m(f \rightarrow v) H_m^p(g) S_p^q(v \rightarrow f), \quad (11)$$

где $H(g)_i^q$, $H(f)_i^q$ - матричные элементы в G - и F -представлении.

Пусть бивекторное поле имеет следующий вид:

в области 1

$$W(x^1, x^2, z) = q^n(z) Q_n(x^1, x^2), \quad (12)$$

в области модуляции

$$W(x^1, x^2, z) = f^n(z) F_n(x^1, x^2), \quad (13)$$

в области 4

$$W(x^1, x^2, z) = v^n(z) V_n(x^1, x^2). \quad (14)$$

Пусть связь между базисными векторами в F -, G - и Q -представлениях имеет вид

$$V_m = (x^1, x^2) = S_m^n(v \rightarrow f) F_n(x^1, x^2), \quad (15)$$

$$F_m = (x_1, x_2) = S_m^n(f \rightarrow q) Q F_n(x_1, x_2). \quad (16)$$

На границе области модуляции и области 4 волновая функция бивекторного поля в G -представлении имеет вид $v^m(0)$. Запишем ее в F -представлении:

$$f^n(0) = S_m^n(v \rightarrow f) v^m(0). \quad (17)$$

Поле в произвольной точке в области модуляции имеет вид:

$$f^n(z) = U_m^n(z) f^m(0), \quad (18)$$

где эволюционная матрица удовлетворяет уравнению

$$\frac{i}{k} \frac{\partial U_m^n(z)}{\partial z} = H_i^n(z) U_m^l(z) \quad (19)$$

с начальными условиями $U_m^n(0) = \delta_m^n$.

Бивекторное поле в F -представлении на границе области модуляции и области 1 имеет вид:

$$f^n(-a) = U_m^n(-a) f^m(0). \quad (20)$$

То же самое в Q -представлении:

$$q^n(-a) = S_m^n(f \rightarrow q) f^m(-a). \quad (21)$$

Подставляя выражение в (20) и (21), получаем

$$q^n(-a) = S_m^n(f \rightarrow q) \times U_i^m(-a) S_j^i(f \rightarrow q) v^j(0). \quad (22)$$

Полученное выражение можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $q^n(-a)$ и $v^k(0)$.

Выражение (22) можно переписать в эквивалентной форме

$$S_n^p(q \rightarrow f) q^n(-a) = U_i^p(-a) S_j^i(q \rightarrow f) v^j(0). \quad (23)$$

В данном случае интегрирование дифференциального уравнения для эволюционной матрицы проводилось в направлении противоположном направлению оси z . Рассмотрим метод, в котором интегрирование эволюционного уравнения проводится в направлении оси z .

Пусть $q^n(-a)$ - волновая функция бивекторного поля в Q -представлении на границе области модуляции и области 1. Запишем ее в F -представлении $f^n(-a) = S_m^n(q \rightarrow f) q^m(-a)$. Поле в произвольной точке в области модуляции имеет вид

$$f^n(z) = U_m^n(z) f^m(-a), \quad (24)$$

где эволюционная матрица удовлетворяет уравнению

$$\frac{i}{k} \frac{\partial U_m^n(z)}{\partial z} = H_i^n(z) U_m^l(z)$$

с начальными условиями $U_m^n(-a) = \delta_m^n$.

Бивекторное поле в F -представлении на границе области модуляции и области 1 имеет вид:

$$f^n(0) = U_j^n(z) S_m^j(q \rightarrow f) q^m(-a). \quad (25)$$

То же самое в V -представлении

$$v^n(0) = S_m^n(f \rightarrow v) f^m(0). \quad (26)$$

Подставляя выражение (25) в (26), получаем

$$v^n(0) = S_m^n(f \rightarrow v) U_j^m(0) S_k^j(q \rightarrow f) q^k(-a). \quad (27)$$

Полученное выражение можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $q^n(-a)$ и $v^k(0)$.

Выражение (27) можно переписать в следующем виде

$$S_n^p(v \rightarrow f) v^n(0) = U_j^p(0) S_k^j(q \rightarrow f) q^k(-a). \quad (28)$$

Вышеизложенный метод применим для решения широкого класса задач дифракции, как в свободном пространстве, так и в среде (например, в волкне). Выбор представления зависит от конкретной задачи. В качестве базисных функций удобно использовать собственные функции оператора Гамильтона. В этом представлении система уравнений Максвелла имеют наиболее простой вид.

2. Ковариантная запись системы уравнений Максвелла в криволинейных координатах.

В предыдущем разделе исследовалась система уравнений Максвелла в декартовых координатах. В данном разделе получим систему уравнений Максвелла в параболической форме в ковариантном виде. Ковариантная запись позволяет легко записывать выражения в произвольной системе координат.

Для записи уравнения Максвелла в криволинейной системе координат введем тензоры

$$E_n, D^n, H_n, B^n,$$

где

$$D^n = \varepsilon g^{nm} E_m, \quad B^n = g^{nm} H_m, \quad (29)$$

ε - диэлектрическая проницаемость среды.

Система уравнений Максвелла в криволинейных координатах в ковариантной форме имеет вид

$$(\text{rot } H)^n = -ikD^n, \quad (30)$$

$$(\text{rot } E)^n = -ikB^n, \quad (31)$$

где оператор $(\text{rot } F)^n$ представляется в виде

$$(\text{rot } F)^n = \frac{\varepsilon^{ijn}}{2\sqrt{g}} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x^i} - \frac{\partial F_i}{\partial x^j} \right), \quad g = \det(g_{ij}),$$

g_{ij} - компоненты метрического тензора в криволинейной системе координат.

Рассмотрим криволинейную систему координат, в которой метрический тензор имеет вид

$$g_{13} = g_{23} = 0, \quad (32)$$

$$g_{33} = 1, \quad (33)$$

$$\varepsilon^{ij} \partial_3 E_j = -ik(\sqrt{g}) g^{ij} H_j + \varepsilon^{ij} \partial_j E_3, \quad (34)$$

$$\varepsilon^{ij} \partial_3 H_j = -ik(\sqrt{g}) g^{ij} E_j + \varepsilon^{ij} \partial_j H_3,$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{nm3} (\partial_n E_m - \partial_m E_n) = ikH^3 \sqrt{g}, \quad (35)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{nm3} (\partial_n H_m - \partial_m H_n) = ikE^3 \sqrt{g}. \quad (36)$$

Выражаем E^3, H^3 из последних двух выражений, и, подставляя в первую пару уравнений, получаем:

$$\varepsilon^{ij} \partial_3 E_j = -ik(\sqrt{g}) g^{ij} H_j - \varepsilon^{ij} \partial_j \left(\frac{\varepsilon^{nm3} (\partial_n H_m - \partial_m H_n)}{2ik\sqrt{g}} \right), \quad (37)$$

$$\varepsilon^{ij} \partial_3 H_j = -ik(\sqrt{g}) g^{ij} E_j - \varepsilon^{ij} \partial_j \left(\frac{\varepsilon^{nm3} (\partial_n E_m - \partial_m E_n)}{2ik\sqrt{g}} \right). \quad (38)$$

Рассмотрим случай ортогональных криволинейных координат. В этом случае система уравнений Максвелла относительно четырех компонентных бивекторов имеет вид:

$$\frac{i}{k} \partial_z W = HW, \quad (39)$$

где

$$W = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где

$$A = \frac{-1}{k^2} \begin{pmatrix} \partial_{y1} & 0 \\ 0 & \partial_{y2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\varepsilon\sqrt{g})^{-1} & 0 \\ 0 & (\varepsilon\sqrt{g})^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\partial_{y2} & \partial_{y1} \\ -\partial_{y2} & \partial_{y1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & g^{22}\sqrt{g} \\ -g^{22}\sqrt{g} & 0 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$B = \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} \partial_{y1} & 0 \\ 0 & \partial_{y2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sqrt{g})^{-1} & 0 \\ 0 & (\sqrt{g})^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\partial_{y2} & \partial_{y1} \\ -\partial_{y2} & \partial_{y1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g^{22}\sqrt{g} \\ -g^{22}\sqrt{g} & 0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Отметим, что при переходе от одной системы криволинейных координат к другой компоненты четырехкомпонентного бивектора - верхняя и нижняя

половины бивектора - преобразуются как двумерные векторы.

3. Пространственно-частотное представление системы уравнений Максвелла

Многие задачи дифракционной оптики значительно упрощаются при переходе к пространственно-частотному представлению.

Базисные функции F -пространственно-частотного представления имеют вид:

$$F_{\alpha_1\alpha_2,i}(x^1, x^2) = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \exp\left(ik(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)\right) \\ \delta_{2i} \exp\left(ik(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)\right) \\ \delta_{3i} \exp\left(ik(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)\right) \\ \delta_{4i} \exp\left(ik(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)\right) \end{bmatrix}, \quad (44)$$

где δ_{ik} - символ Кронекера.

Связь между базисными функциями координатного и F -пространственно-частотного представления имеет вид

$$F_{\alpha_1\alpha_2,i}(x^1, x^2) = \sum_{k=1}^{k=4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\alpha_1\alpha_2,i}^{y^1 y^2 k}(f \rightarrow x) \times X_{y^1 y^2, k}(x^1, x^2) dy^1 dy^2. \quad (45)$$

Связь между волновыми функциями координатного и F -пространственно-частотного представления имеет вид

$$W^{y^1 y^2 k} = \sum_{k=1}^{k=4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\alpha_1\alpha_2,i}^{y^1 y^2 k}(f \rightarrow x) \times f^{\alpha_1\alpha_2 i} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (46)$$

где

$$X_{y^1 y^2, m}(x^1, x^2) = \delta(x^1 - y^1) \delta(x^2 - y^2) \begin{bmatrix} \delta_{m1} \\ \delta_{m2} \\ \delta_{m3} \\ \delta_{m4} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Матрица преобразования имеет вид

$$S_{\alpha_1\alpha_2,i}^{x^1 x^2, k}(f \rightarrow x) = \exp\left(ik(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)\right) \delta_i^k. \quad (48)$$

Матрица обратного преобразования имеет вид

$$S_{x^1 x^2, k}^{\alpha_1\alpha_2, i}(x \rightarrow f) = \frac{k^2}{4\pi} \exp\left(-ik(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)\right) \delta_k^i. \quad (48)$$

Гамильтониан в пространственно-частотном представлении имеет вид

$$H_{\omega_1\omega_2}^{\alpha_1\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 & A_{\omega_1\omega_2}^{\alpha_1\alpha_2} \\ B_{\omega_1\omega_2}^{\alpha_1\alpha_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$A_{\omega_1\omega_2}^{\alpha_1\alpha_2} = - \begin{bmatrix} i\alpha_1 & 0 \\ 0 & i\alpha_2 \end{bmatrix} \varepsilon^{-1}(\alpha_1 - \omega_1, \alpha_2 - \omega_2) \times \\ \times \begin{bmatrix} -i\omega_2 & i\omega_1 \\ -i\omega_2 & i\omega_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \delta_{\omega_1}^{\alpha_1} \delta_{\omega_1}^{\alpha_2}, \\ B_{\omega_1\omega_2}^{\alpha_1\alpha_2} = - \begin{bmatrix} i\alpha_1 & 0 \\ 0 & i\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\omega_2 & i\omega_1 \\ -i\omega_2 & i\omega_1 \end{bmatrix} \delta_{\omega_1}^{\alpha_1} \delta_{\omega_1}^{\alpha_2} - \\ - \varepsilon^{-1}(\alpha_1 - \omega_1, \alpha_2 - \omega_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\delta_{\omega}^{\alpha} = \delta(\alpha - \omega)$ - дельта-функция Дирака.

Уравнения Максвелла в пространственно-частотном представлении приобретают вид:

$$\frac{i}{k} \frac{\partial f^{\alpha_1\alpha_2 i}}{\partial z} = H_{\omega_1\omega_2 k}^{\alpha_1\alpha_2 i} f^{\omega_1\omega_2 k}. \quad (51)$$

Для вакуума уравнения приобретают вид:

$$\frac{i}{k} \frac{\partial f^{\alpha_1\alpha_2 i}}{\partial z} = H_{\alpha_1\alpha_2 k}^{\alpha_1\alpha_2 i} f^{\alpha_1\alpha_2 k}. \quad (52)$$

$$H_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 & A_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_2} \\ B_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_2} = - \begin{bmatrix} i\alpha_1 & 0 \\ 0 & i\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\alpha_2 & i\alpha_1 \\ -i\alpha_2 & i\alpha_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_2} = - \begin{bmatrix} i\alpha_1 & 0 \\ 0 & i\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\alpha_2 & i\alpha_1 \\ -i\alpha_2 & i\alpha_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в формуле (52) нет суммирования или интегрирования по повторяющимся индексам и система уравнений распадается на множество систем из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения (52) имеют четыре линейно независимых решения следующего вида:

$$f_{\pm e}^{\alpha_1\alpha_2} = \begin{bmatrix} f_{\pm e}^{\alpha_1\alpha_2, 1} \\ f_{\pm e}^{\alpha_1\alpha_2, 2} \\ f_{\pm e}^{\alpha_1\alpha_2, 3} \\ f_{\pm e}^{\alpha_1\alpha_2, 4} \end{bmatrix} = \|W\|^{-1} \begin{bmatrix} \mp \left(\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}\right) \alpha_1 \\ \mp \left(\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}\right) \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} \times \quad (53)$$

$$\times \exp\left(\pm ik\left(\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}\right)z\right),$$

$$f_{\pm h}^{\alpha_1\alpha_2} = \begin{bmatrix} f_{\pm h}^{\alpha_1\alpha_2, 1} \\ f_{\pm h}^{\alpha_1\alpha_2, 2} \\ f_{\pm h}^{\alpha_1\alpha_2, 3} \\ f_{\pm h}^{\alpha_1\alpha_2, 4} \end{bmatrix} = \|W\|^{-1} \begin{bmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \mp \left(\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}\right) \alpha_1 \\ \mp \left(\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}\right) \alpha_2 \end{bmatrix} \times \quad (54)$$

$$\times \exp\left(\pm ik\left(\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}\right)z\right),$$

$$\|W\| = \sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \left(1 + \sqrt{|1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2|}\right)}.$$

Введем V -пространственно-частотное представление (V -представление). В качестве базисных функций V -представления выберем собственные функции оператора Гамильтона для бивекторного поля, распространяющегося в вакууме. Базисные функции V -пространственно-частотного представления связаны с базисными функциями F -представления

$$V_{\omega_1\omega_2n}(x^1, x^2) = S_{\omega_1\omega_2n}^{\alpha_1\alpha_2n}(v \rightarrow f) F_{\alpha_1\alpha_2n}(x^1, x^2), \quad (55)$$

$$S_{\alpha_1\alpha_2n}^{\omega_1\omega_2n}(v \rightarrow f) = \delta_{\alpha_2}^{\omega_1} \delta_{\alpha_1}^{\omega_2} S_m^n(v \rightarrow f), \quad (56)$$

$$S_m^n(v \rightarrow f) = \begin{cases} f_{+e}^{\omega_1\omega_2n} & m=1 \\ f_{+h}^{\omega_1\omega_2n} & m=2 \\ f_{-e}^{\omega_1\omega_2n} & m=3 \\ f_{-h}^{\omega_1\omega_2n} & m=4 \end{cases}.$$

Тензор обратного преобразования выглядит следующим образом

$$S_{\alpha_1\alpha_2m}^{\omega_1\omega_2p}(f \rightarrow v) = \delta_{\alpha_2}^{\omega_1} \delta_{\alpha_1}^{\omega_2} (M^{-1})_n^p P_m^n, \quad (57)$$

где матрица P_m^n есть матрица эрмитово-сопряженная по отношению к матрице $S_m^n(v \rightarrow f)$, а матрица $M_m^n = P_k^n S_m^k(v \rightarrow f)$. Здесь верхний индекс означает номер строки в матрице, а нижний индекс - номер столбца.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W \pm & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W \pm \\ W \pm & 0 & 1 & 0 \\ 0 & W \pm & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -W \pm & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -W \pm \\ -W \pm & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -W \pm & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{1 - |W \pm|^2}. \quad (59)$$

Волновые функции бивекторных полей в этих двух различных представлениях связаны следующим образом

$$f^{\alpha_1\alpha_2n} = S_{\omega_1\omega_2n}^{\alpha_1\alpha_2n}(v \rightarrow f) v^{\omega_1\omega_2n}, \quad (60)$$

$$v^{\alpha_1\alpha_2n} = S_{\omega_1\omega_2n}^{\alpha_1\alpha_2n}(f \rightarrow v) f^{\omega_1\omega_2n}.$$

4. Распространение бивекторного электромагнитного поля в вакууме

В настоящем разделе рассмотрим задачу распространения бивекторного электромагнитного поля в свободном пространстве.

Пусть в плоскости $z=0$ бивекторное поле имеет вид:

$$W = W_0(x^1, x^2) = W^{x^1x^2k}(0). \quad (61)$$

Для вычисления поля в произвольной плоскости перейдем от координатного представления к пространственно-частотному представлению

$$f^{\alpha_1\alpha_2,i}(0) = S_{x_1x_2,k}^{\alpha_1\alpha_2,i}(x \rightarrow f) W^{x^1x^2k}(0). \quad (62)$$

$$v^{\alpha_1\alpha_2,i}(0) = S_{\omega_1\omega_2n}^{\alpha_1\alpha_2n}(f \rightarrow v) f^{\omega_1\omega_2n}(0). \quad (63)$$

Матричные элементы гамильтониана в вакууме в V -представлении $H_{\omega_1\omega_2k}^{\alpha_1\alpha_2i}$ есть элементы следующей матрицы:

$$H_{\omega_1\omega_2}^{\alpha_1\alpha_2}(v) = -ik \delta_{\omega_1}^{\alpha_1} \delta_{\omega_1}^{\alpha_2} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \sqrt{|1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2|}. \quad (64)$$

Решая систему уравнений Максвелла в V -представлении для произвольной плоскости, получим

$$\begin{bmatrix} v^{\alpha_1\alpha_2,1}(z) \\ v^{\alpha_1\alpha_2,2}(z) \\ v^{\alpha_1\alpha_2,3}(z) \\ v^{\alpha_1\alpha_2,4}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{\alpha_1\alpha_2,1}(0) \exp\left(ik\sqrt{|1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2|}z\right) \\ v^{\alpha_1\alpha_2,2}(0) \exp\left(ik\sqrt{|1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2|}z\right) \\ v^{\alpha_1\alpha_2,3}(0) \exp\left(-ik\sqrt{|1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2|}z\right) \\ v^{\alpha_1\alpha_2,4}(0) \exp\left(-ik\sqrt{|1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2|}z\right) \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Далее перейдем от V -представления к координатному представлению

$$f^{\alpha_1\alpha_2n}(z) = S_{\omega_1\omega_2n}^{\alpha_1\alpha_2n}(v \rightarrow f) v^{\omega_1\omega_2n}(z), \quad (66)$$

$$W^{x^1x^2,k}(z) = S_{\alpha_1\alpha_2,i}^{x^1x^2,k}(f \rightarrow x) f^{\alpha_1\alpha_2,i}(z). \quad (67)$$

Выражение описывает бивекторное электромагнитное поле в плоскости регистратора.

5. Дифракция на пропускающих дифракционных оптических элементах

Рассмотрим дифракцию света на пропускающих дифракционных оптических элементах

Пусть $v^{\alpha_1\alpha_2n}(-a)$ - волновая функция бивекторного поля в V -пространственно-частотном представлении на границе области модуляции и области 1. Запишем ее в F -пространственно-частотном представлении

$$f^{\alpha_1\alpha_2n}(-a) = S_m^n(v \rightarrow f) v^{\omega_1\omega_2m}(-a). \quad (68)$$

Поле в произвольной точке в области модуляции имеет вид:

$$f^{\omega_1\omega_2n}(z) = U_{\alpha_1\alpha_2m}^{\omega_1\omega_2n}(z) f^{\alpha_1\alpha_2m}(-a), \quad (69)$$

где эволюционная матрица $U_m^n(z)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{i}{k} \frac{\partial U_{\alpha_1 \alpha_2 m}^{\omega_1 \omega_2 n}}{\partial z} = H_{\beta_1 \beta_2 l}^{\omega_1 \omega_2 n}(z) U_{\alpha_1 \alpha_2 m}^{\beta_1 \beta_2 l}(z) \quad (70)$$

с начальными условиями

$$U_{\alpha_1 \alpha_2 m}^{\omega_1 \omega_2 n}(-a) = \delta_{\alpha_2}^{\omega_2} \delta_{\alpha_1}^{\omega_1} \delta_m^n. \quad (71)$$

Полученное выражение представляет собой интегро-дифференциальное уравнение.

Бивекторное поле в F-представлении на границе области модуляции и области 4 имеет вид:

$$f^{\omega_1 \omega_2 n}(0) = U_{\alpha_1 \alpha_2 j}^{\omega_1 \omega_2 n}(0) S_{\beta_1 \beta_2 m}^{\alpha_1 \alpha_2 j}(v \rightarrow f) v^{\beta_1 \beta_2 m}(-a). \quad (72)$$

То же самое в V-представлении

$$v^{\alpha_1 \alpha_2 n}(0) = S_{\beta_1 \beta_2 m}^{\alpha_1 \alpha_2 j}(f \rightarrow v) f^{\beta_1 \beta_2 m}(0). \quad (73)$$

Подставляя выражение (72) в (73), получаем:

$$v^{\alpha_1 \alpha_2 n}(0) = S_{\beta_1 \beta_2 m}^{\alpha_1 \alpha_2 n}(f \rightarrow v) U_{\omega_1 \omega_2 j}^{\beta_1 \beta_2 m}(0) \times S_{\eta_1 \eta_2 k}^{\omega_1 \omega_2 j}(v \rightarrow f) v^{\eta_1 \eta_2 k}(-a). \quad (74)$$

Полученное выражение (74) представляет собой связь между полями $v^{\alpha_1 \alpha_2 n}(-a)$ и $v^{\alpha_1 \alpha_2 k}(0)$ на границах области модуляции. Выражение (74) можно переписать в следующем виде:

$$S_{\alpha_1 \alpha_2 n}^{\omega_1 \omega_2 p}(v \rightarrow f) v^{\alpha_1 \alpha_2 n}(0) = U_{\beta_1 \beta_2 j}^{\omega_1 \omega_2 p}(0) S_{\eta_1 \eta_2 k}^{\beta_1 \beta_2 j}(v \rightarrow f) v^{\eta_1 \eta_2 k}(-a). \quad (75)$$

На практике поле удовлетворяет следующим условиям.

Условие 1. Поле прошедшее через оптический элемент не содержит волн, распространяющихся против оси z :

$$v^{\eta_1 \eta_2 3}(0) = v^{\eta_1 \eta_2 4}(0) = 0. \quad (76)$$

Условие 2. Компоненты определяются из условия задачи. Они описывают бивекторное поле в отсутствие ДОЭ. На практике при решении задач дифракции падающее и прошедшее поле удобно задавать в координатном представлении. В этом случае необходимо в выражении для падающего поля перейти от координатного представления к V-представлению, используя формулы

$$f^{\alpha_1 \alpha_2, i}(-a) = S_{x^1 x^2, k}^{\alpha_1 \alpha_2, i}(x \rightarrow f) W^{x^1 x^2, k}(-a), \quad (77)$$

$$v^{\alpha_1 \alpha_2 n}(-a) = S_{\omega_1 \omega_2 n}^{\alpha_1 \alpha_2 n}(f \rightarrow v) f^{\omega_1 \omega_2 n}(-a). \quad (78)$$

Решая систему интегральных уравнений (75) и используя результаты, полученные в предыдущем пункте, определяем прошедшее бивекторное поле в области 4.

6. Дискретное пространственно-частотное представление

Для решения задач дифракции на периодических структурах используется дискретное пространственно-частотное представление. Связь между волновыми функциями в координатном и дискретном

пространственно-частотном представлении имеет следующий вид:

$$f^{nm, i}(0) = S_{x^1 x^2, k}^{nm, i}(x \rightarrow f) W^{x^1 x^2, k}(0), \quad (79)$$

$$S_{x^1 x^2, k}^{nm, i}(x \rightarrow f) = \frac{1}{d_1 d_2} \exp\left(ik(\alpha_1^m x^1 + \alpha_2^m x^2)\right) \delta_k^i, \quad (80)$$

$d_1 d_2$ - размеры дифракционного оптического элемента или периоды периодической двумерной структуры.

Тензор обратного преобразования имеет вид:

$$S_{nm, i}^{x_1 x_2, k}(f \rightarrow x) = \exp\left(ik(\alpha_1^m x^1 + \alpha_2^m x^2)\right) \delta_i^k. \quad (81)$$

Гамильтониан в дискретном пространственно-частотном представлении имеет вид

$$H_{mq}^{np} = \begin{bmatrix} 0 & A_{mq}^{np} \\ B_{mq}^{np} & 0 \end{bmatrix}, \quad (82)$$

$$A_{mq}^{np} = - \begin{bmatrix} i\alpha_1^n & 0 \\ 0 & i\alpha_2^p \end{bmatrix} \varepsilon_{n-m, p-q}^{-1} \begin{bmatrix} -i\alpha_2^m & i\alpha_1^q \\ -i\alpha_2^m & i\alpha_1^q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \delta_m^n \delta_q^p,$$

$$A_{mq}^{np} = - \begin{bmatrix} i\alpha_1^n & 0 \\ 0 & i\alpha_2^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\alpha_2^m & i\alpha_1^q \\ -i\alpha_2^m & i\alpha_1^q \end{bmatrix} \delta_m^n \delta_q^p - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \varepsilon_{n-m, p-q}^{-1}.$$

Формулы (75) в дискретном пространственно-частотном представлении имеют вид:

$$S_{mj q}^{nip}(v \rightarrow f) v^{mj q}(0) = U_{mj q}^{nip}(0) S_{slr}^{mj q}(v \rightarrow f) v^{slr}(-a). \quad (83)$$

Отметим, что в отличие от обычного пространственно-частотного представления, в дискретном случае интегральное уравнение превращается в систему линейных алгебраических уравнений. Матрицы перехода от F-представления к V-представлению и обратно имеют вид:

$$S_{kqm}^{ipn}(v \rightarrow f) = \delta_k^i \delta_q^p S_m^n(v \rightarrow f), \quad (84)$$

$$S_{jqm}^{ipn}(f \rightarrow v) = \delta_j^i \delta_q^p (M^{-1})_k^n P_m^k. \quad (85)$$

Интегро-дифференциальное уравнение для эволюционной матрицы в дискретном пространственно-частотном представлении превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{i}{k} \frac{\partial U_{mjp}^{nik}(z)}{\partial z} = H_{slr}^{nik}(z) U_{mjp}^{slr}(z) \quad (86)$$

с начальными условиями

$$U_{mjp}^{nik}(-a) = \delta_m^n \delta_j^i \delta_p^k. \quad (87)$$

Формулы (84), (85), (86) могут быть получены из формул (56), (57), (70) если заменить интегралы на интегральные суммы.

7. Реализация вычислений

Для того чтобы получить систему линейных алгебраических уравнений (83), необходимо многократное уравнение для эволюционной матрицы (86). Решение эволюционного уравнения сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с различными начальными условиями. Это позволяет использовать технику параллельных вычислений. В данном случае был использован под-

ход, состоящий в том, чтобы система уравнений для различных начальных условий решалась на различных компьютерах. Приводимые ниже результаты были получены с использованием кластера, состоящего из четырех двухпроцессорных компьютеров PENTIUM-II с частотой 450 МГц. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений использовались методы матричной экспоненты и Рунге-Кутты.

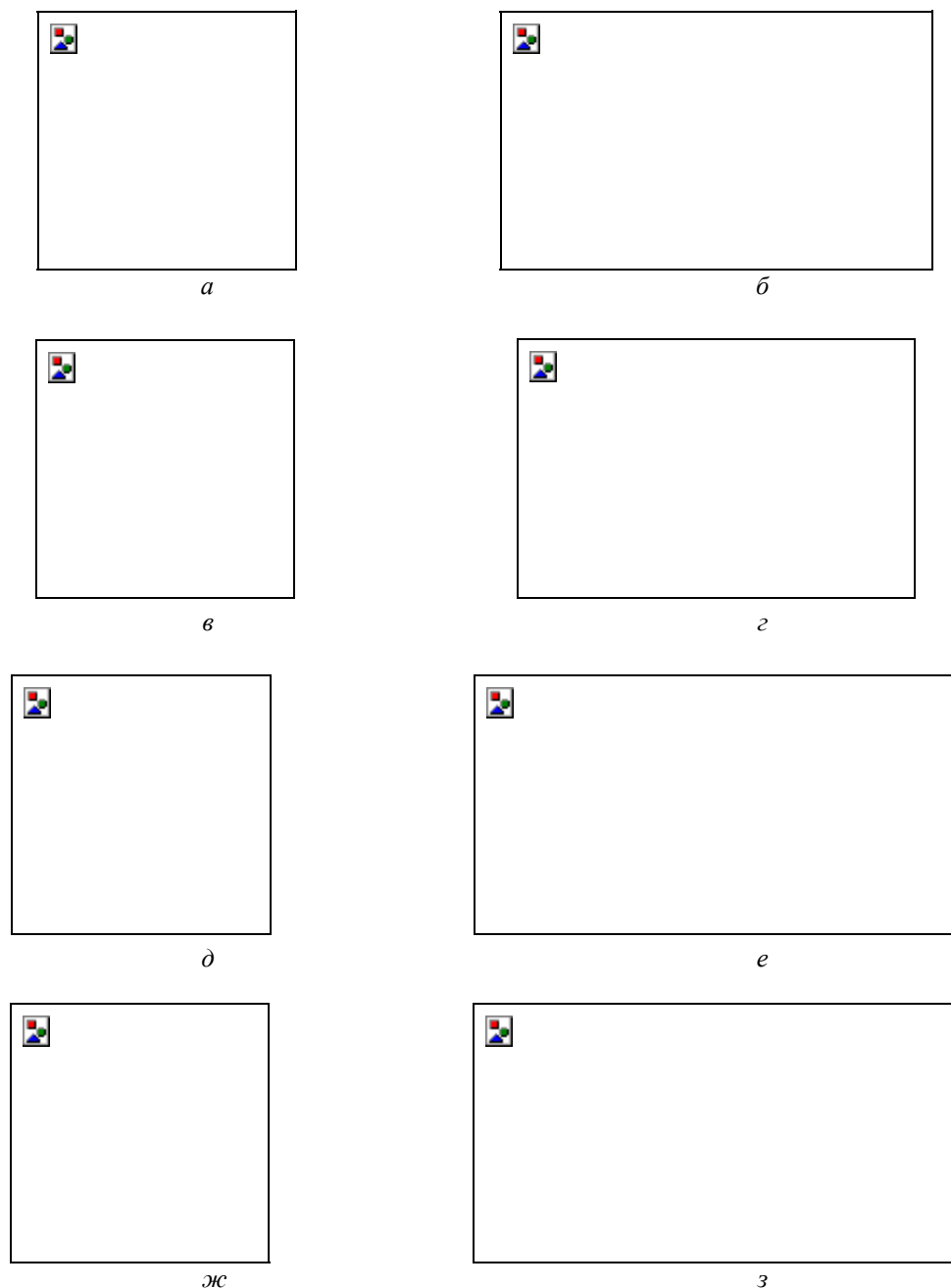


Рис. 2. Результаты расчета проекции вектора Умова-Пойтинга на оптическую ось для дифракции плоской электромагнитной волны на радиально-симметричной бинарной линзе в плоскости $z=0$ (а, б), в плоскости $z=f/2$ (в, г), в плоскости $z=f$ (д, е), $z=3f/2$ (ж, з).

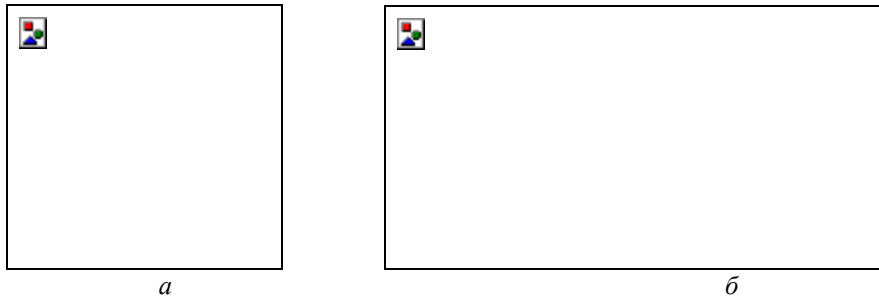


Рис. 3. Результаты расчета проекции вектора Умова-Пойтинга на оптическую ось для дифракции плоской электромагнитной волны на радиально-симметричной бинарной линзе в плоскости xz .

В качестве примера был выбран расчет поля от бинарной цилиндрической линзы.

При расчете были использованы следующие параметры: радиус апертуры $R=4,82\lambda$, фокусное расстояние $f=4,82\lambda$. На рисунках 2, 3 приведены результаты расчета проекции вектора Умова-Пойтинга на оптическую ось для дифракции плоской электромагнитной волны на бинарной радиально-симметричной линзе на различных расстояниях от оптического элемента. При этом на рисунках черный цвет соответствует максимальному значению. Приведенные выше результаты показывают работоспособность приведенного алгоритма. Разработанный метод снижает требования к вычислительным ресурсам, по сравнению с многомерными разностными методами. Анализ полученных результатов показывает, что максимум интенсивности в фокусе линзы примерно в четыре раза меньше значения, рассчитанного в скалярном приближении Кирхгофа. Однако, несмотря на это, бинарная линза сохраняет свои фокусирующие свойства. Следует отметить, что в отличие от скалярной теории, фокальное пятно имеет слегка вытянутую форму. Это объясняется тем, что в рамках электромагнитной теории не существует радиально-симметричных ре-

шений даже в случае дифракции плоской волны на радиально-симметричном объекте. Радиальная симметрия нарушается за счет наличия поляризации у падающей электромагнитной волны.

Заключение

В работе предложен компактный математический аппарат для решения задач дифракции плоской электромагнитной волны на дифракционном оптическом элементе. Математический аппарат позволяет однообразно описать различные задачи дифракционной оптики и свести многие задачи к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с различными начальными условиями. Это позволяет в свою очередь использовать технику параллельных вычислений. Предложенные в работе методы апробированы на решении задачи дифракции плоской электромагнитной волны на бинарной линзе Френеля.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика // М., Наука. Т. 3. 1973. 504 с.
2. Методы компьютерной оптики // М., Физматлит. 2000. 688 с.