

ОПЕРАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАКСИАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ

В.В. Котляр¹, С.Н. Хонина¹, Я.Ванг²

¹ Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

² Пекинский технологический институт

Аннотация

Дано описание параксиального светового поля, распространяющегося в свободном пространстве или среде с параболическим показателем преломления, с помощью операторов-инвариантов. Приведено интегральное преобразование (аналогичное преобразованию Френеля), описывающее распространение света в среде с параболическим показателем преломления. Приведены результаты численного и натурального экспериментов по формированию мод Гаусса-Эрмита с помощью фазовых ДОЭ. Отличие экспериментальных результатов от теоретических составило около 12%.

Введение

В [1] описана алгебра операторов симметрии уравнения Шредингера. В данной работе, пользуясь связью уравнения Шредингера с уравнением параксиального распространения светового поля, рассмотрена оптическая интерпретация операторов-инвариантов. Показано, что действие оператора эволюции светового поля в свободном пространстве эквивалентно преобразованию Френеля, а действие оператора эволюции в среде с параболическим показателем преломления также эквивалентно некоторому интегральному преобразованию, аналогичному преобразованию Френеля.

В [2] предложен метод формирования мод Гаусса-Эрмита (ГЭ) с помощью фазовых ДОЭ, функция пропускания которых равна знаковой функции от многочлена Эрмита заданного порядка. Такой ДОЭ должен освещаться плоской волной, ограниченной диафрагмой определенного размера.

Очевидно, что фазовый ДОЭ с конечной апертурой не может идеально точно сформировать амплитудно-фазовое распределение, описывающее моду ГЭ. Ниже с помощью численного моделирования для одномерного случая показано, что в рамках данного метода [2] можно формировать моды ГЭ с номерами от 1 до 5, отличающиеся от идеальных мод, в среднем, на 10-18%. Причем после пространственной фильтрации этих мод в Фурье-плоскости в плоскости изображения ДОЭ также формируются моды ГЭ, отличающиеся от идеальных, в среднем, уже на 5-12%. При этом энергетическая эффективность любой моды - не ниже 78% (для одномерного случая).

Также приведены результаты эксперимента по формированию двухмодового инвариантного пучка ГЭ с помощью бинарного ДОЭ, рассчитанного методом частичного кодирования [3]. Среднеквадратичная ошибка поперечного распределения интенсивности в фокальной плоскости от предсказанного теоретически составила около 12%.

1. Операторы-инварианты

Параксиальное уравнение распространения

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

где k – волновое число света, z – координата вдоль оси распространения света, можно записать в операторной форме:

$$QE=0,$$

базис алгебры симметрии которого (алгебра Ли) имеет 9 операторов [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2 &= -\frac{z^2}{2k} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{z}{2k} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{z}{2k} + i \frac{x^2 + y^2}{4}, \\ \mathbf{K}_{-2} &= 2k \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{P}_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{P}_y = \frac{\partial}{\partial y}, \\ \mathbf{B}_x &= -\frac{z}{2k} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{ix}{2}, \quad \mathbf{B}_y = -\frac{z}{2k} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{iy}{2}, \\ \mathbf{M} &= x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{D} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 1, \quad \mathbf{E} = i. \end{aligned} \quad (2)$$

Операторы (2) имеют следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}, \mathbf{K}_{\pm 2}] &= \pm 2\mathbf{K}_{\pm 2}, \quad [\mathbf{D}, \mathbf{B}_{x,y}] = \mathbf{B}_{x,y}, \\ [\mathbf{D}, \mathbf{P}_{x,y}] &= -\mathbf{P}_{x,y}, \quad [\mathbf{D}, \mathbf{M}] = 0, \quad [\mathbf{M}, \mathbf{K}_{\pm 2}] = 0, \\ [\mathbf{P}_x, \mathbf{M}] &= \mathbf{P}_y, \quad [\mathbf{P}_y, \mathbf{M}] = -\mathbf{P}_x, \quad [\mathbf{B}_x, \mathbf{M}] = \mathbf{B}_y, \\ [\mathbf{B}_y, \mathbf{M}] &= -\mathbf{B}_x, \quad [\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_{-2}] = \mathbf{D}, \\ [\mathbf{K}_2, \mathbf{B}_{x,y}] &= 0, \quad [\mathbf{K}_{-2}, \mathbf{B}_{x,y}] = -\mathbf{P}_{x,y}, \\ [\mathbf{K}_{-2}, \mathbf{P}_{x,y}] &= 0, \quad [\mathbf{P}_{x,y}, \mathbf{K}_2] = \mathbf{B}_{x,y}, \\ [\mathbf{B}_{x,y}, \mathbf{P}_{x,y}] &= \frac{i}{2}, \quad [\mathbf{P}_{x,y}, \mathbf{B}_{y,x}] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$.

Операторы симметрии \mathbf{L} в уравнении (2) и любая их линейная комбинация переводят одно решение уравнения (1) в другое решение и удовлетворяют условию:

$$[\mathbf{L}, \mathbf{Q}] = R(x)\mathbf{Q}, \quad (4)$$

где $\mathbf{Q} = 2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Шредингера,

$R(x)$ – функция, которая может зависеть и от \mathbf{L} .

Уравнение (1) можно представить в виде

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} = i\mathbf{K}_{-2}E, \quad (5)$$

где $\mathbf{K}_{-2} = 2k \frac{\partial}{\partial z} = i \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$, решение которого в операторной форме имеет вид:

$$E(x, y, z) = \exp\left(\frac{z}{2k} \mathbf{K}_{-2}\right) E_0(x, y), \quad (6)$$

где $E_0(x, y)$ – функция $E(x, y, z)$ при $z=0$.

Оператор $\exp\left(\frac{z}{2k}\mathbf{K}_{-2}\right)$ – оператор, описывающий распространение светового поля вдоль оси z . Поэтому операторы симметрии из уравнения (2), которые коммутируют с оператором \mathbf{K}_{-2} , будут также коммутировать с оператором (6):

$$\exp\left(\frac{z}{2k}\mathbf{K}_{-2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2k}\right)^n \frac{\mathbf{K}_{-2}^n}{n!}, \quad (7)$$

то есть являются инвариантами распространения.

Можно показать, что действие оператора распространения (6) эквивалентно преобразованию Френеля:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{z}{2k}\mathbf{K}_{-2}\right)E_0(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iz}{2k}\right)^n (n!)^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} E_0(\xi,\eta) \\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n \delta(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iz}{2k}\right)^n (n!)^{-1} \\ &\iint_{-\infty}^{\infty} F(\alpha,\beta) (\alpha^2 + \beta^2)^n \exp[-i(x\alpha + y\beta)] d\alpha d\beta = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} F(\alpha,\beta) \exp\left[-i\frac{z}{2k}(\alpha^2 + \beta^2)\right] \times \\ &\times \exp[-i(x\alpha + y\beta)] d\alpha d\beta = \\ &= \frac{-ik}{2\pi z} \iint_{-\infty}^{\infty} E_0(\xi,\eta) \exp\left\{i\frac{k}{2z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (8)$$

где $\delta(x,y)$ – дельта-функция Дирака, $F(\alpha,\beta)$ – Фурье-образ функции $E_0(\xi,\eta)$.

Из уравнения (3) видно, что имеются пять операторов-инвариантов. Операторы \mathbf{P}_x и \mathbf{P}_y описывают малые смещения светового поля по осям x и y соответственно (операторы сноса пучка [4]). Оператор \mathbf{K}_{-2} описывает дифракционную расходимость светового поля. Оператор \mathbf{M} определяет малые повороты вокруг оси z и может быть назван оператором углового момента [5]. Оператор \mathbf{E} определяет тождественное преобразование и связан с сохранением энергии светового поля при его распространении. Из этих пяти операторов-инвариантов с помощью линейных комбинаций можно образовать и другие инвариантные операторы.

Остальные четыре оператора из (3) не являются инвариантами распространения, но тоже имеют наглядный физический смысл. Операторы \mathbf{V}_x и \mathbf{V}_y при $z=0$ описывают малый наклон светового поля вдоль оси x и y соответственно. Оператор \mathbf{K}_2 при $z=0$ описывает малую квадратичную фазовую задержку светового поля. Оператор \mathbf{D} при $z=0$ описывает малые растяжения (сжатия) светового поля по осям x и y .

Можно показать, что действия перечисленных операторов определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \exp(\theta\mathbf{M})E_0(r,\varphi) &= E_0(r,\varphi + \theta), \\ \exp[c\mathbf{D}(0)]E_0(x,y) &= e^c E_0(e^c x, e^c y), \\ \exp[b\mathbf{K}_2(0)]E_0(x,y) &= \exp\left[\frac{ib(x^2 + y^2)}{4}\right]E_0(x,y), \\ \exp[d\mathbf{V}_x(0)]E_0(x,y) &= \exp\left[\frac{idx}{2}\right]E_0(x,y), \\ \exp[a\mathbf{P}_x]E_0(x,y) &= E_0(x+a,y). \end{aligned} \quad (9)$$

Базис операторов симметрии уравнения (1) при $z=0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2(0) &= i\frac{x^2 + y^2}{4}, \quad \mathbf{V}_x(0) = \frac{ix}{2}, \quad \mathbf{V}_y(0) = \frac{iy}{2}, \\ \mathbf{D}(0) &= x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 1, \quad \mathbf{K}_{-2} = i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \\ \mathbf{P}_x &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{P}_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{M} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{E} = i. \end{aligned} \quad (10)$$

Операторы (10) подчиняются тем же коммутационным соотношениям (3). Операторы (2) и (10) связаны между собой формулами:

$$\mathbf{L}(z) = \exp\left(\frac{z}{2k}\mathbf{K}_{-2}\right)\mathbf{L}(0)\exp\left(-\frac{z}{2k}\mathbf{K}_{-2}\right). \quad (11)$$

Оптический смысл оператора $\mathbf{K}_2(z)$ в том, что он описывает изменение эффективного радиуса светового поля, определенного как момент второго порядка по интенсивности при распространении вдоль оси z . Действительно,

$$\begin{aligned} &\iint_{-\infty}^{\infty} E_0^*(x,y)\mathbf{K}_2 E_0(x,y) dx dy = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} E^*(x,y,z)\mathbf{K}_2(0)E(x,y,z) dx dy = \\ &= \frac{i}{4} \iint_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) |E(x,y,z)|^2 dx dy = \\ &= -\left(\frac{z}{2k}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} E_0^*(x,y)\mathbf{K}_{-2}E_0(x,y) dx dy - \\ &- \left(\frac{z}{2k}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} E_0^*(x,y)\mathbf{D}(0)E_0(x,y) dx dy + \\ &+ \frac{i}{4} \iint_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) |E_0(x,y)|^2 dx dy \end{aligned} \quad (12)$$

Независящие от z интегралы в уравнения (12):

$$\begin{aligned} &\iint_{-\infty}^{\infty} E_0^*(x,y)\mathbf{K}_{-2}E_0(x,y) dx dy, \\ &\iint_{-\infty}^{\infty} E_0^*(x,y)\mathbf{D}(0)E_0(x,y) dx dy \end{aligned}$$

описывают расходимость светового поля из-за дифракции и смещение с оптической оси, соответственно.

Алгебра операторов (2), (3) описывает не только распространение светового поля в свободном пространстве, но также распространение его в волноводе с параболической зависимостью показателя преломления:

$$n^2(r) = n_0^2 \left(1 - 2\Delta \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (13)$$

где n_0 – показатель преломления на оси, Δ – параметр дисперсии показателя преломления, r_0 – радиус волновода.

Параксиальное уравнение, описывающее световое поле в среде (13) имеет вид:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \frac{x^2 + y^2}{4} \right) E(x, y, z) = 0, \quad (14)$$

где $\alpha = 2\sqrt{2\Delta} \frac{n_0}{r_0}$.

В операторном виде уравнения (14) можно записать

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} = i\mathbf{L}_{36} E, \quad (15)$$

где $\mathbf{L}_{36} = \mathbf{K}_{-2} - \alpha^2 \mathbf{K}_2(0)$.

Замкнутая алгебра операторов $\mathbf{L}_{3\alpha}$, $\mathbf{D}(0)$ и $\mathbf{L}_{26} = \mathbf{K}_{-2} + \alpha^2 \mathbf{K}_2(0)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} [L_{3\alpha}, D(0)] &= 2L_{2\alpha}, \quad [L_{2\alpha}, D(0)] = 2L_{3\alpha}, \\ [L_{2\alpha}, L_{3\alpha}] &= 2\alpha^2 D(0) \end{aligned} \quad (16)$$

Решение уравнения (15) можно записать в операторном виде

$$E(x, y, z) = \exp\left(\frac{z}{2k} \mathbf{L}_{36}\right) E_0(x, y). \quad (17)$$

Можно показать, что для оператора распространения в среде с параболическим показателем преломления (13) имеет место соотношение:

$$\exp\left(\frac{z}{2k} \mathbf{L}_{36}\right) = \exp(a\mathbf{K}_2(0)) \exp(b\mathbf{K}_{-2}) \exp(c\mathbf{D}(0)), \quad (18)$$

где $a = -\alpha \operatorname{tg}(\omega z)$, $b = \frac{\sin(\omega z)}{2\alpha}$,

$$c = \ln[\cos(\omega z)], \quad \omega = \frac{\alpha}{2k} \quad (19)$$

Из (18) с учетом (8) и (9) следует:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{z}{2k} \mathbf{L}_{36}\right) E_0(x, y) &= \frac{\alpha}{4\pi i \sin(\omega z)} \times \\ &\times \exp\left[\frac{i\alpha \operatorname{ctg}(\omega z)}{4} (x^2 + y^2)\right] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int E_0(\xi, \eta) \exp\left\{\frac{i\alpha}{4 \sin(\omega z)} \times \right. \\ &\times \left. \left[(\xi^2 + \eta^2) \cos(\omega z) - 2(x\xi + y\eta) \right] \right\} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения (20) является аналогом преобразования Френеля (8) в среде (13). Из уравнения (20) видно, что при $z_m = (\pi/2 + m\pi)\omega^{-1}$ в среде будет формироваться Фурье-спектр исходного поля, а при $z_m = m\pi\omega^{-1}$ будет формироваться изображение исходного поля.

Заметим, что так как оператор углового момента \mathbf{M} коммутирует с операторами $\mathbf{K}_2(0)$, \mathbf{K}_2 , $\mathbf{D}(0)$, то из уравнения (18) следует, что оператор \mathbf{M} также коммутирует с оператором распространения в среде с параболическим показателем преломления $\exp\left(\frac{z}{2k} \mathbf{L}_{36}\right)$. Поэтому можно утверждать, что угловой момент светового поля при распространении в такой среде сохраняется.

Действие операторов симметрии $\exp(a\mathbf{L})$ на решение уравнения (1) $E(x, y, z)$ эквивалентно действию операторов \mathbf{T} , определенных матрицами $\|A\|$:

$$\mathbf{T}(\|A\|) = \exp(a\mathbf{L}), \quad (21)$$

где $\|A\| = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Действие оператора \mathbf{T} описывается соотношением:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} E(x, y, z) &= \\ &= \frac{\exp\left[\frac{i\beta(x^2 + y^2)}{4u}\right]}{u} E\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{\gamma + \alpha z/2k}{u}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

где $u = \delta + \frac{z}{2k} \beta$.

Для конкретных операторов уравнения связи (21) имеют вид:

$$\begin{aligned} \exp(a\mathbf{K}_{-2}) &= \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp(b\mathbf{D}(0)) = \mathbf{T}\begin{pmatrix} e^b & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}, \\ \exp(c\mathbf{L}_3) &= \mathbf{T}\begin{pmatrix} \cos(c) & -\sin(c) \\ \sin(c) & \cos(c) \end{pmatrix}, \\ \exp(d\mathbf{K}_2(0)) &= \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mathbf{L}_3 = \mathbf{K}_{-2} - \mathbf{K}_2$.

Формулы (23) дают связь операторного и матричного описаний светового поля.

2. Формирование инвариантных пучков

Примером решения уравнения (1) могут служить моды Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра [6]. Они инвариантны к действию оператора распространения в свободном пространстве с точностью до масштаба.

В работах [2, 7] предложен простой метод расчета фазовых ДОЭ для эффективного формирования одномодовых гауссовых пучков, основанный на пропорциональности функции пропускания ДОЭ знаковой функции соответствующего полинома. Например, для мод Гаусса-Эрмита:

$$\begin{aligned} \exp[i\varphi_{nm}(x, y)] &= \\ &= \exp\left\{i \arg H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right) + i \arg H_m\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $H_n(x)$ - полином Эрмита, σ - параметр, характеризующий эффективную ширину моды ГЭ.

При освещении фазового ДОЭ (24) плоской или гауссовой волной в спектральной плоскости сформируется световое поле с комплексной амплитудой, близкой к заданной моде. Сохранение структуры формируемого пучка на различных расстояниях подтверждает его модовый характер [8].

Введение в спектральную плоскость диафрагмы, аналогично [9], позволяет получать в плоскости изображения световое поле, также близкое к заданной моде. На рис. 1 показана оптическая схема для формирования гауссовых мод.

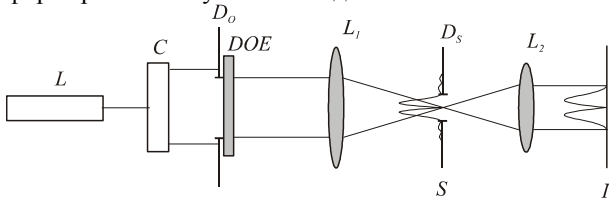


Рис. 1. Оптическая схема для формирования гауссовых мод.

Гелий-неоновый лазер L освещает DOE , фаза которого пропорциональна знаковой функции соответствующего полинома. Диафрагма D_0 подстраивается на оптимальный для формируемой моды размер [10]. Сферическая линза L_1 формирует в плоскости S пространственный спектр, из которого диафрагмой D_s выделяется эффективная часть. Полученное с помощью сферической линзы L_2 в плоскости I изображение имеет комплексную амплитуду, демонстрирующую модовый характер сформированного поля.

На рис. 2 и 3 показано формирование 4-й и 5-й мод ГЭ соответственно. При этом для наглядности все распределения амплитуды и интенсивности выравнены по максимальному значению, а не по энергетическим характеристикам. На рис. 2а и 3а показано распределение амплитуды идеальной моды (линия 1) и бинарная фаза ДОЭ (линия 2). На рис. 2б и 3б показано распределение интенсивности, получаемое в спектральной плоскости при освещении ДОЭ пучком (линия 2) и для сравнения распределение интенсивности идеальной моды (линия 1). Положение диафрагмы здесь выделено пунктирной линией. На рис. 2в и 3в показаны распределения интенсивности в плоскости изображения (линия 3), Фурье-образа такого изображения (линия 2) и идеальной моды (линия 1). На рис. 2г и 3г приведены соответствующие фазы.

На рис. 4 приведены аналогичные результаты для 1-й, 2-й и 3-й мод ГЭ. На рис. 4а, в, д показаны распределения интенсивности в плоскости изображения (линия 3), Фурье-образа такого изображения (линия 2) и идеальной моды (линия 1). На рис. 4б, г, е приведены соответствующие фазы.

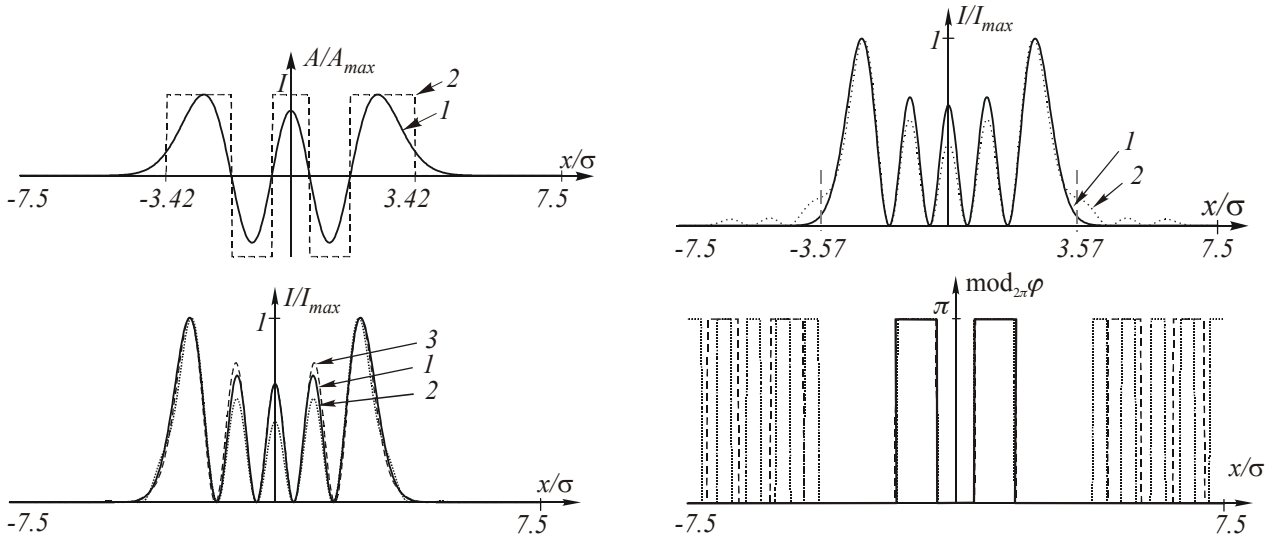


Рис. 2. Формирование 4-ой моды ГЭ с помощью бинарного фазового ДОЭ.

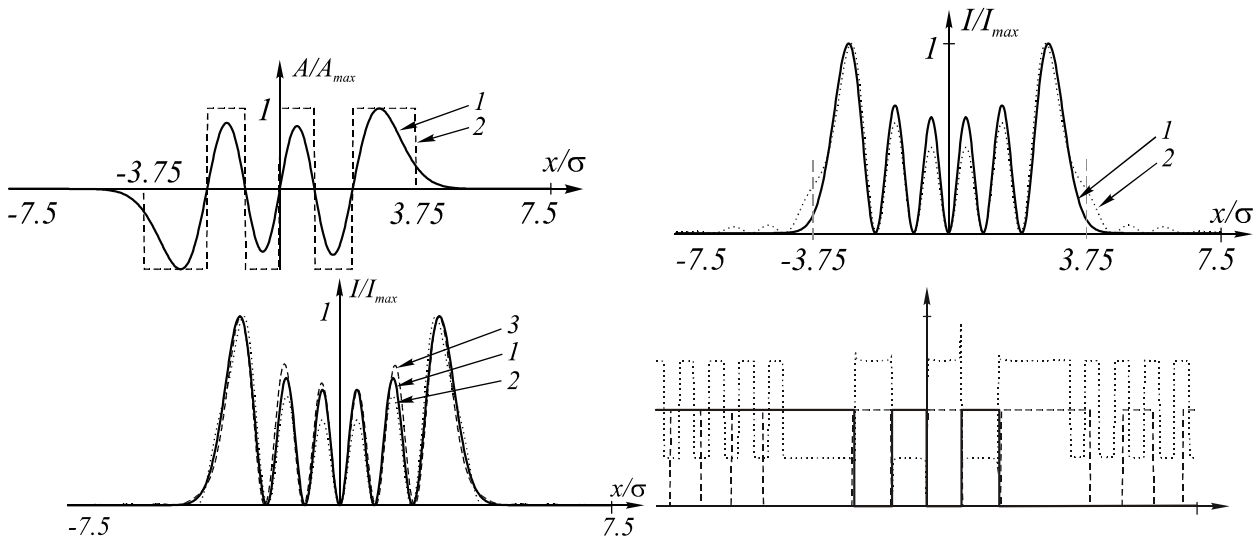


Рис. 3. Формирование 5-ой моды ГЭ с помощью бинарного фазового ДОЭ.

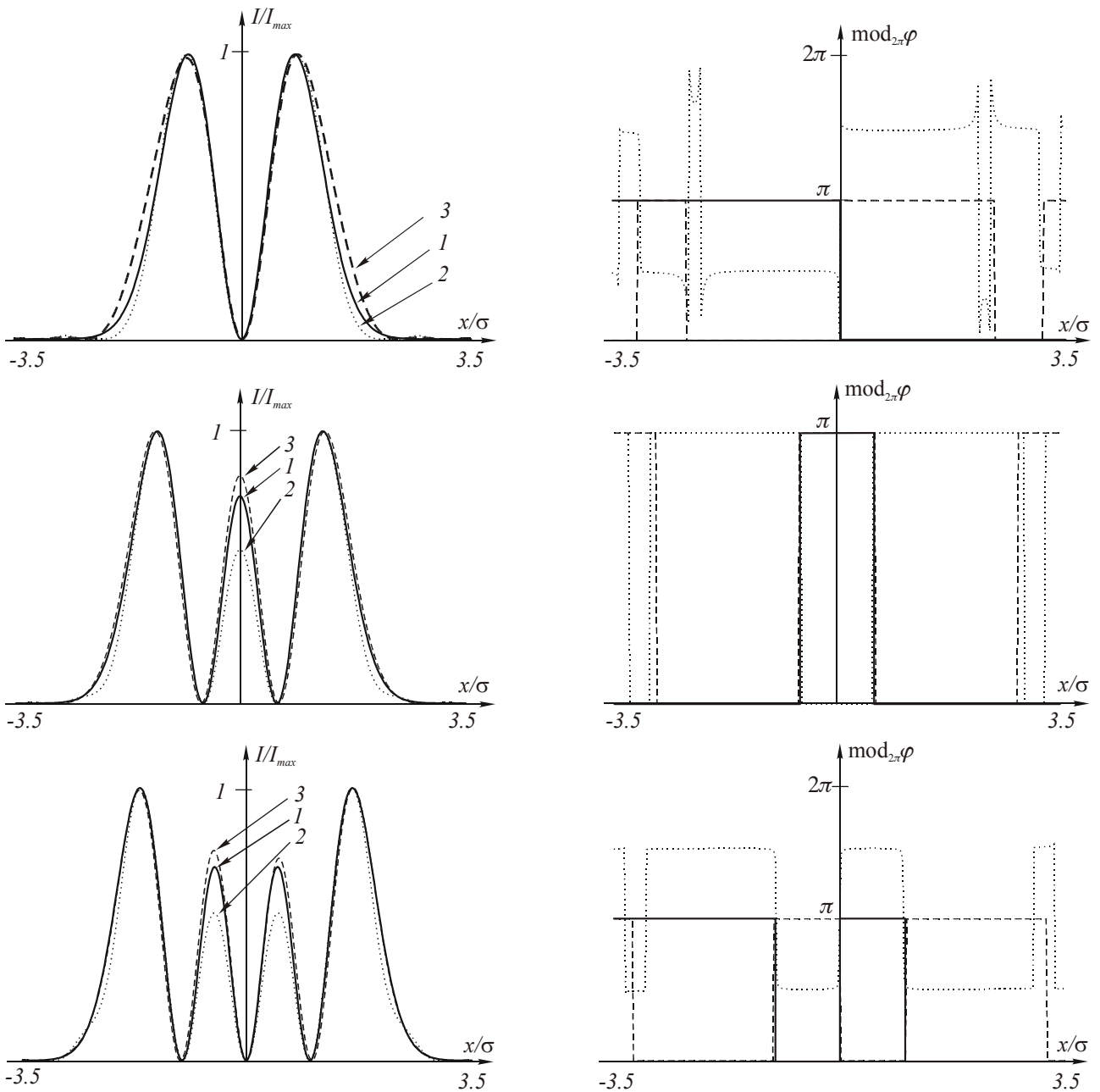


Рис. 4. Формирование 1-ой (а, б), 2-ой (в, г) и 3-ей (д, е) мод ГЭ с помощью бинарных фазовых ДОЭ.

Из рисунков 2в, г, 3в, г и 4 видно, что сформированные световые поля имеют модовый характер, то есть сохраняется как амплитудное, так и фазовое распределение в плоскости изображения и спектральной плоскости. При сравнении фазовых распределений нужно учитывать, что после каждого преобразования Фурье моды ГЭ приобретают фазовый набег $\pi/2$, где n - номер моды. В таблице 1 приведены фазовый набег (взятый по модулю 2π) в плоскости изображения - φ_I и фазовый набег в следующей спектральной плоскости - φ_{SS} . Понятно, что для мод ГЭ, номер которых n кратен 4, фазовый портрет будет одинаковым как в плоскости изображения, так и в спектральной плоскости. Для четных мод ГЭ, но не кратных 4, комплексные распределения в плоскости изображения и в спектральной плоскости будут находиться в противофазе.

На рис. 5. показаны графики среднеквадратичного отклонения распределения интенсивности от идеальной в спектральной плоскости δ_s для 4-й (линия 1) и 5-й (линия 2) мод ГЭ, а также в плоскости изображения δ_I для 4-й (линия 3) и 5-й (линия 4) мод в зависимости от размера диафрагмы. Интересно отметить, что если глобальные минимумы на рис. 5 (линии 1, 2) соответствуют оптимальному размеру ДОЭ, то дополнительные (локальные) минимумы совпадают с последними нулями полиномов Эрмита.

Оптимальные размеры ДОЭ x_0/σ и диафрагмы в спектральной плоскости x_s/σ приведены в сводной таблице 1. Из таблицы видно, что среднеквадратичное отклонение распределения интенсивности в плоскости изображения от идеального δ_I , как правило, меньше отклонения в спектральной плоскости δ_s . При этом отклонение в следующей спектральной

плоскости δ_{SS} (то есть для Фурье-образа изображения) меньше, чем δ_S . То есть оптическая система на рис. 1, повторяемая последовательно несколько раз, представляет собой некоторое приближение резонатора.

На рис. 6 приведены графики энергетической эффективности ε (линии 1, 2) и среднеквадратичное отклонение распределения интенсивности от идеального (линии 3, 4) в зависимости от количества преобразований Фурье, k , для 4-й (линии 1, 3) и 5-й (линии 2, 4) мод ГЭ. При этом $k=0$ соответствует плоскость ДОЭ, $k=1$ - первая спектральная плоскость (см. δ_S, ε_S в Таблице 1), $k=2$ - первая плоскость изображения (см. δ_I, ε_I в таблице 1), $k=3$ - вторая спектральная плоскость (см. δ_{SS} в таблице 1), $k=4$ - вторая плоскость изображения.

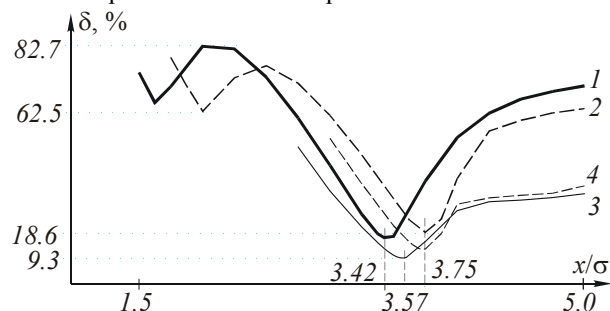
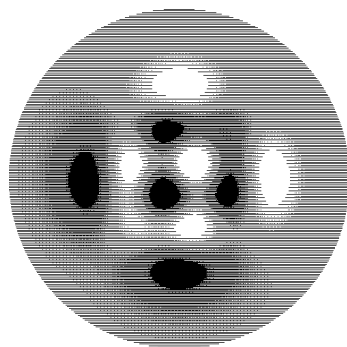


Рис. 5. График среднеквадратичного отклонения распределения интенсивности от идеального в спектральной плоскости δ_S для 4-й (линия 1) и 5-й (линия 2) мод ГЭ в зависимости от размера ДОЭ x_0/σ , а также в плоскости изображения δ_I для 4-й (линия 3) и 5-й (линия 4) мод в зависимости от размера диафрагмы x_s/σ .

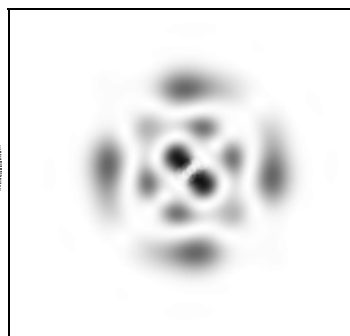
Из рис. 6 видно, что после этапа низкочастотной фильтрации в первой спектральной плоскости ($k=1$) дальнейшие потери энергии незначительны. То есть практически вся энергия изображения, как и спектра, сосредоточена на конечном интервале, что также свойственно гауссовым модам.

Таблица 1.

n	x_0/σ	$\delta_S, \%$	$\varepsilon_S, \%$	x_s/σ	$\delta_I, \%$	$\varepsilon_I, \%$	$\delta_{SS}, \%$	φ_I	φ_{SS}
1	2,25	10,09	85,59	3,50	12,00	85,45	6,09	π	$3\pi/2$
2	2,70	14,91	83,33	3,32	7,98	83,22	12,47	0	π
3	3,10	15,51	81,76	3,42	6,67	81,49	13,82	π	$\pi/2$
4	3,42	16,70	80,50	3,57	9,32	80,03	15,20	0	0
5	3,75	18,60	79,45	3,75	12,48	78,71	15,92	π	$3\pi/2$



(a)



(б)

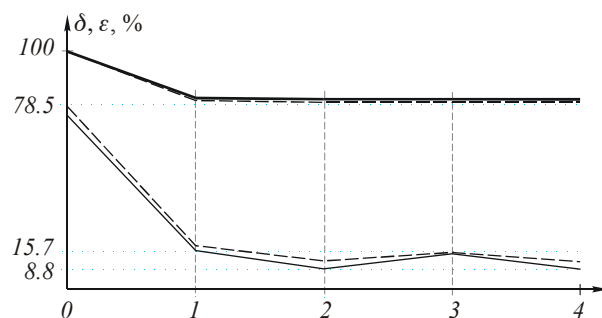


Рис. 6. Графики энергетической эффективности ε (линии 1, 2) и среднеквадратичное отклонение распределения интенсивности от идеального (линии 3, 4) в зависимости от количества преобразований Фурье, k , для 4-й (линии 1, 3) и 5-й (линии 2, 4) мод ГЭ.

3. Эксперимент

В работе [8] была экспериментально продемонстрирована возможность эффективного (65-70%) формирования одномодовых пучков ГЭ с невысокими индексами - (1,0), (1,1), (1,2) - бинарными ДОЭ с фазой (24). Однако точность формируемых мод сильно зависит от размера освещающего пучка или диафрагмы, которая его ограничивает.

В [3] был предложен метод частичного кодирования, позволяющий варьировать соотношение двух параметров - точности и энергетической эффективности - в широком диапазоне.

На рис. 7. показаны результаты эксперимента по формированию инвариантного двухмодового пучка ГЭ (0,5)+(5,0) бинарным фазовым ДОЭ с уровнем кодирования 0,5. В этом случае теоретическое среднеквадратичное отклонение от идеального распределения интенсивности в фокальной плоскости составляет около 9% при энергетической эффективности 20%.

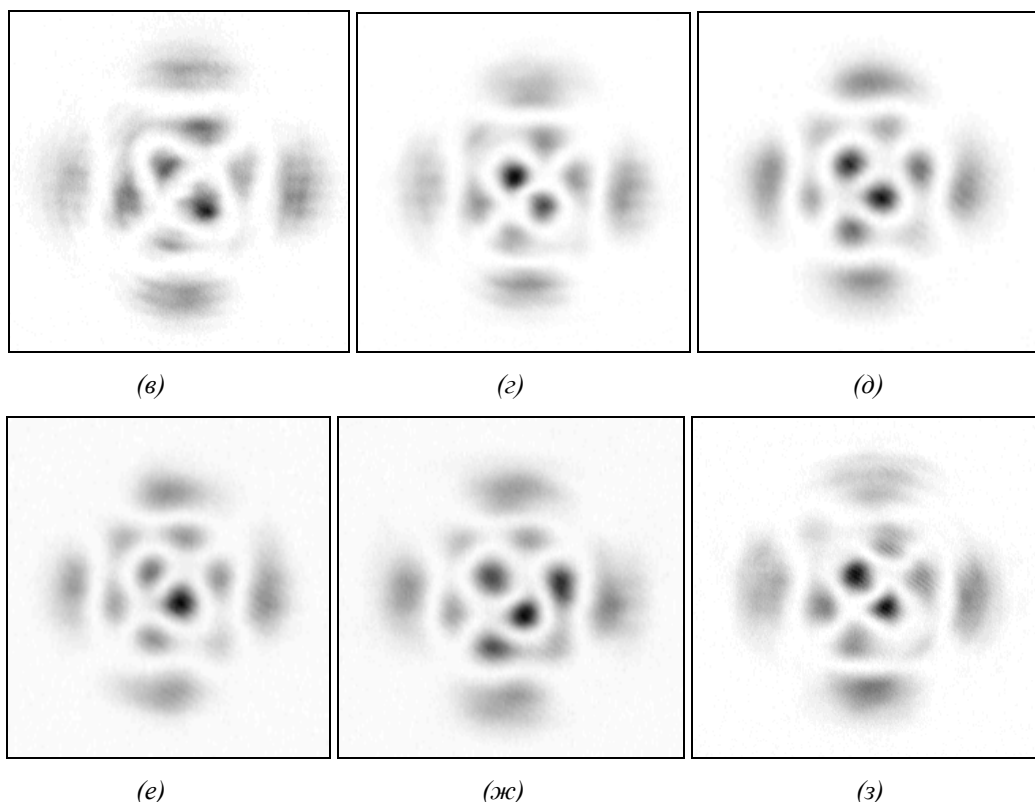


Рис. 7. Эксперимент по формированию инвариантного двухмодового пучка ГЭ $(0,5)+(5,0)$: бинарная фаза ДОО (а), теоретическое распределение интенсивности в фокальной плоскости (б), экспериментально зафиксированное поперечное распределение интенсивности на расстояниях $z=900$ мм (в), $z=975$ мм (г), $z=1075$ мм (д), $z=1125$ мм (е), $z=1225$ мм (ж), $z=1350$ мм (з) от плоскости ДОО при освещении его сходящимся пучком.

Бинарный ДОО с фазой, показанной на рис. 7а, был изготовлен в Университете Йёнсуу (Финляндия): диаметр - 10 мм, 2000×2000 отсчетов размером 5×5 мкм. Результаты эксперимента, зафиксированные телекамерой с разрешением $8,59 \times 8,43$ мкм, при освещении ДОО сходящимся пучком показаны на рис. 7: поперечное распределение интенсивности на расстояниях $z=900$ мм (рис. 7в), $z=975$ мм (рис. 7г), $z=1075$ мм (рис. 7д), $z=1125$ мм (рис. 7е), $z=1225$ мм (рис. 7ж), $z=1350$ мм (рис. 7з) от плоскости ДОО. Видно, что сформированное поле демонстрирует инвариантные (с точностью до масштаба) к распространению свойства. Заметны некоторые вариации в центральной части картины там, где амплитуда не была закодирована.

Нужно отметить хорошую согласованность теоретических и экспериментальных результатов: среднеквадратичное отклонение распределения интенсивности на различных расстояниях от теоретически рассчитанного в фокальной плоскости (рис. 7б) составило следующие величины: 17,4% ($z=900$ мм), 15,2% ($z=975$ мм), 11,7% ($z=1075$ мм), 12,3% ($z=1125$ мм), 15,7% ($z=1225$ мм), 16,8% ($z=1350$ мм). Минимальная ошибка (около 12%), как и следовало ожидать, наблюдалась на расстоянии $z=1075$ мм (рис. 7д), что соответствует фокаль-

ной плоскости сходящегося освещающего пучка. При этом отклонение после прохождения фокальной плоскости меньше, чем отклонение до нее. Этот эффект связан с чисто фазовым характером ДОО: для того, чтобы фазовое распределение под воздействием дифракции перешло в амплитудное, необходимо, чтобы световая волна преодолела определенное расстояние.

Заключение

В данной работе дана оптическая интерпретация операторов симметрии алгебры Ли параксиального уравнения распространения. Показано, что действие оператора эволюции светового поля в пространстве и в параболической среде эквивалентно интегральному преобразованию, аналогичному преобразованию Френеля.

С помощью компьютерного моделирования показано, что фазовый ДОО, функция пропускания которого равна знаковой функции от многочлена Эрмита n -го порядка, освещаемый плоской волной, ограниченной диафрагмой определенного размера, формирует моду ГЭ с номером 1-5, отличную от идеальной не более чем на 13%.

Приведены результаты эксперимента по формированию двухмодового инвариантного пучка ГЭ. Отличие экспериментальных результатов от теоретических составило 12%.

Благодарность

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 98-01-00894, 99-01-39012, 00-15-96114, 00-01-00031).

Литература

1. Миллер У., Симметрия и разделение переменных, М., Мир, 1981.
2. V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer Generalized Hermite beams in free space // *Optik*, **108** (1), 20-26 (1998)/
3. Котляр В.В., Хонина С.Н., Сойфер В.А. Метод частичного кодирования для расчета фазовых формирователей мод Гаусса-Эрмита // *Автометрия*. № 6. С. 74-83. (1999).
4. Лебедев В.В., Лукьянов Ю.Н., Орлов М.И., Преображенский Н.Г., Соколовский Р.И. Амплитудно-фазовые характеристики световых пучков с минимальной расходимостью // *Препринт Института теоретической и прикладной механики СО РАН*. 1989. №16-89.
5. E. Abramochkin, V. Volostnikov Structurally stable singular wavefields // *Proceedings of SPIE: International conference on singular optics*. 3487. P. 20-28 (1998).
6. Методы компьютерной оптики // под ред. В.А.Сойфера, М., Физматлит. 2000. 688с.
7. S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer Diffraction optical elements matched to the Gauss-Laguerre modes // *Optics and Spectroscopy*, 85 (4). P. 636-644 (1998).
8. S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, J. Lautanen, M. Honkanen, J. Turunen Generation of Gauss-Hermite modes using binary DOEs // *Proceedings of SPIE: Photonics Prague'99, Device and Systems*, 4016. P. 234-239. (2000).
9. Павельев В.С., Хонина С.Н. Быстрый итерационный расчет фазовых формирователей мод Гаусса-Лагерра // *Компьютерная оптика*, 1997. № 17. С. 15-20.
10. Хонина С.Н. Формирование мод Гаусса-Эрмита с помощью бинарных ДОЭ // *II. Оптимизация апертурной функции*, *Компьютерная оптика*. 1998. № 18, С. 28-36.