

ПОВЫШЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ВЫТЯНУТЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

М.А. Броварова, С.Н. Хонина

Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

Вытянутые сфероидальные волновые функции нулевого порядка применены для повышения разрешающей способности изображений, получаемых оптическими системами с ограниченным зрачком. Проведено сравнение данного подхода с линейной интерполяцией и интерполяцией с помощью функций отсчетов (функций Котельникова). Рассмотрен одномерный случай, который легко обобщается на двумерный для прямоугольного зрачка.

Введение

Проблема повышения разрешающей способности при восстановлении изображений имеет актуальное значение. Набор ортогональных функций, которые оказываются очень полезными в проблемах экстраполяции и интерполяции на некотором интервале, называются вытянутыми сфероидальными волновыми функциями (ВСВФ). Их использование в этих задачах было первоначально представлено в работах [1-3], а затем и в других работах [4-10].

При получении изображения оптическими системами с ограниченным зрачком происходит его искажение и потеря информации, связанная с усечением спектра. Для восстановления сигнала может быть применен метод аналитического продолжения спектра [10]. При этом используется разложение известной части спектра в различные функциональные ряды, например в ряд Котельникова [11]. Наиболее удобным оказывается разложение по системе ВСВФ, так как они обладают свойством двойной ортогональности: образуют ортогональную и полную систему как на ограниченном, так и на неограниченном диапазоне.

В данной работе проведено сравнение данного подхода повышения разрешающей способности одномерных сигналов с линейной интерполяцией и интерполяцией с помощью функций отсчетов (ряд Котельникова). Заметим, что одномерный случай легко обобщается на двумерный для прямоугольного зрачка.

1. Вытянутые сфероидальные волновые функции нулевого порядка

ВСВФ нулевого порядка могут быть определены как решение интегрального уравнения:

$$\lambda_n \psi_n(t) = 2w_c \int_{-T/2}^{T/2} \psi_n(\tau) \text{sinc}[2w_c(t-\tau)] d\tau, \quad (1)$$

$$t \in [-\infty, \infty],$$

где $0 \leq n < \infty$ и λ_n - собственные значения, $\text{sinc}(t) = \text{sin}(t)/t$;

ВСВФ могут таким образом быть рассмотрены как собственные функции низкочастотной фильтрации ограниченных сигналов:

$$\lambda_n \psi_n(t) = \left[\psi_n(t) \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right] * 2w_c \text{sinc}(2w_c t), \quad (2)$$

$$\text{где } * - \text{ знак свертки, } \Pi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-0,5, 0,5] \\ 0, & t \notin [-0,5, 0,5] \end{cases}$$

При этом $\psi_n(t)$ и λ_n являются непрерывными функциями параметра

$$c = 2w_c T. \quad (3)$$

Из (2) видно, что энергия в $\psi_n(t)$ подвергается сначала усечению, а потом фильтрации. Таким образом, каждый λ_n будет иметь значение меньше единицы. Обычно их выбирают так, чтобы они были положительными и упорядоченными по убыванию:

$$1 > \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots > 0. \quad (4)$$

Из (2) также следует, что ВСВФ являются точно полосо-ограниченными и, таким образом, не искажаются низкочастотной фильтрацией:

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &= \psi_n(t) * 2w_c \text{sinc}(2w_c t), \\ \mathfrak{Z}[\psi_n(t)] &= \mathfrak{Z}[\psi_n(t)] \cdot \Pi\left(\frac{w}{2w_c}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где \mathfrak{Z} - знак преобразования Фурье.

На бесконечном интервале для заданного параметра c ВСВФ являются ортонормированными:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(\tau) \psi_m(\tau) d\tau = \delta[n-m] \quad (6)$$

и образуют полный базисный набор для полосо-ограниченных сигналов с ограниченной энергией. То есть, если $f(t)$ - полосо-ограниченная, то

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(t), \\ a_n &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_n(t) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

На конечном интервале $|t| \leq T/2$ для заданного параметра c ВСВФ ортогональны:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \psi_n(\tau) \psi_m(\tau) d\tau = \lambda_n \delta[n-m] \quad (8)$$

и образуют полный базисный набор для функций на интервале $|t| \leq T/2$ с ограниченной энергией:

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{n=-N}^N b_n \psi_n(t), \quad |t| \leq \frac{T}{2}, \\ \lambda_n b_n &= \int_{-T/2}^{T/2} h(t) \psi_n(t) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

ВСВФ являются также собственными функциями вида преобразования Фурье:

$$\psi_n(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \sqrt{\frac{T}{2w_c\lambda_n}} \psi_n\left(\frac{T}{2w_c}w\right) \Pi\left(\frac{w}{2w_c}\right). \quad (10)$$

Аналогично для усеченных ВСВФ:

$$\psi_n(t) \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \sqrt{\frac{T\lambda_n}{2w_c}} \psi_n\left(\frac{T}{2w_c}w\right) \quad (11)$$

2. Применение ВСВФ для аналитического продолжения спектра

Пусть оптический прибор, формирующий изображение $g(t)$ исходного сигнала $f(t)$, состоит из телескопической системы линз L_1 , L_2 и диафрагмы D размером $2w_c$ (рис.1).

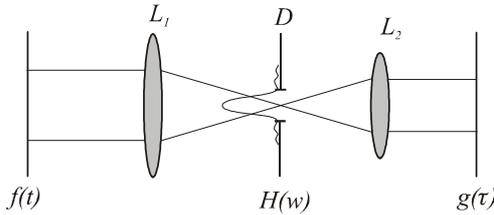


Рис. 1. Телескопическая система с ограниченным зрачком.

Без учета шумов искажение в такой изображающей системе вносится за счет дифракции Фраунгофера на диафрагме и может быть описано следующими соотношениями:

$$g(\tau) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \mathfrak{F}[f(t)] \cdot \Pi\left(\frac{w}{2w_c}\right) \right\}, \quad (12)$$

$$g(\tau) = f(t) * 2w_c \text{sinc}(2w_c t).$$

Учитывая, что ВСВФ инвариантны к преобразованию (12) (см. ур. (5)), предлагается именно их использовать для восстановления сигнала $f(t)$ по изображению $g(t)$.

Рассмотрим алгоритм восстановления с аналитическим продолжением спектра.

Пусть $F_0(w)$ будет полосо-ограниченной функцией с известной шириной $2w_0$. Задача экстраполяции состоит в восстановлении $F(w)$ из

$$F_0(w) = F(w) \Pi\left(\frac{w}{2w_0}\right). \quad (13)$$

Разложим $F(w)$ в ряд по ВСВФ:

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(w) \quad (14)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-w_0}^{w_0} F_0(w) \psi_n(w) dw. \quad (15)$$

В силу двойной ортогональности ВСВФ, разложение (14) существует для всех значений $w \in [-\infty, \infty]$, хотя коэффициенты a_n вычисляются по значе-

ниям спектра на конечном интервале. Вследствие полноты системы ВСВФ в множестве функций с финитным спектром, ряд сходится к $F(w)$ [10].

Восстановленный сигнал $f(t)$ вычисляется как обратное преобразование Фурье от $F(w)$. Тогда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathfrak{F}^{-1}[\psi_n(w)]. \quad (16)$$

Используя свойство инвариантности ВСВФ к преобразованию Фурье на ограниченном интервале, восстановленный сигнал находится по формуле [10]:

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4\pi w_0}{T}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{i^n \sqrt{\lambda_n}} \psi_n\left(\frac{2w_0 t}{T}\right), & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим следующий пример. Волновое представление телефонного разговора может быть рассмотрено как полосо-ограниченное. Следуя полученным результатам, можно сделать вывод, что этот разговор можно восстановить, если известно только слово или два в середине. Это, конечно, неверно. Дело в том, что на практике известна часть сигнала, сопровождаемая некоторым шумом. Для определения влияния шума на алгоритм, мы должны исследовать структуру собственных значений.

Известно [1], что для $n \leq \frac{2c}{\pi}$ собственные значения λ_n существенны, затем с ростом n происходит быстрый их спад до нуля. Рассмотрим теперь оценку коэффициентов в (15), когда значения $F_0(w)$ сопровождаются малой степенью неточности. Если n выше порога $\frac{2c}{\pi}$, то деление на $\lambda_n \approx 0$ будет сильно увеличивать ошибку. Таким образом, коэффициенты a_n могут быть вычислены достоверно до этого порога.

3. Численные результаты по восстановлению сигнала

Рассмотрим задачу, состоящую в том, чтобы по имеющимся отсчетам сигнала восстановить значения в точках, лежащих между данными отсчетами. Данную задачу также можно решить методом аналитического продолжения спектра.

Будем использовать априорную информацию о конечной протяженности изображения, то есть все отсчеты $f(t)$ расположены на конечном интервале $[-T/2, T/2]$, вне пределов этого интервала она равна нулю.

Спектр исходного сигнала $f(t)$ с учетом наложенных на нее ограничений, считается по формуле:

$$F(w) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-2\pi i t w) dt \quad (18)$$

Для дискретных сигнала и спектра (18) примет вид:

$$F(mh_w) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} f(nh) \exp(-2\pi i n h m h_w) \quad (19)$$

где h – шаг дискретизации $f(t)$, h_w – шаг дискретизации $F(w)$, N – число отсчетов спектра и сигнала.

С другой стороны дискретный спектр:

$$F(m) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} f(n) \exp\left(-2\pi i \frac{mn}{N}\right). \quad (20)$$

Из сравнения (19) и (20) получаем

$$h h_w = \frac{1}{N} \Rightarrow h_w = \frac{1}{T}. \quad (21)$$

Таким образом, с помощью (20) получается дискретный спектр до частоты не выше

$$w_c = \frac{1}{2} N h_w = \frac{1}{2h}. \quad (22)$$

Уравнение (22) задает связь между полосой пропускания w_c и шагом дискретизации наблюдаемой функции. То есть чем шире полоса пропускания, тем точнее будет известна наблюдаемая функция. Но на практике трудно реализовать прибор с широкой полосой пропускания. Для повышения разрешения функции можно экстраполировать спектр за пределы интервала $[-w_c, w_c]$.

Задачу сверхразрешения можно также решить путем интерполяции сигнала внутри интервала $[-T/2, T/2]$. Далее будут рассмотрены алгоритмы и представлены результаты интерполяции сигнала и экстраполяции спектра, а также проведено сравнение этих методов.

Для численных экспериментов по восстановлению исходный сигнал $f(n)$ прореживаем в несколько раз, прореженный сигнал обозначим $g(n)$. Далее восстанавливаем прореженный сигнал до размерности исходного, получаем $\hat{f}(n)$. На рис. 2 приведены примеры восстанавливаемых сигналов прямоугольной и синусоидальной формы с высокочастотными всплесками.

Среднеквадратичное отклонение считается по формуле

$$\varepsilon^2 = \frac{\sum_{n=-N/2}^{N/2} |f(n) - \hat{f}(n)|^2}{\sum_{n=-N/2}^{N/2} |f(n)|^2}. \quad (23)$$

4. Метод линейной интерполяции

Это самый простой метод интерполяции сигнала. Мы имеем значения исходного сигнала в некоторых точках. Значения функции в точке, расположенной между известными отсчетами, рассчитываются по формуле:

$$f(t) = g[(n-1)h] + \frac{\{g(nh) - g[(n-1)h]\} \cdot [t - (n-1)h]}{h}. \quad (24)$$

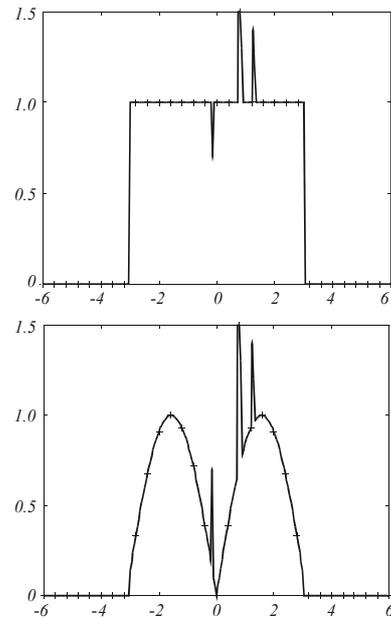


Рис. 2. Исходный (сплошная линия) и прореженный сигналы (отмечены "+").

На рис. 3 представлены исходный сигнал и сигнал, восстановленный из прореженного в 8 раз с помощью линейной интерполяции. Погрешность восстановления для прямоугольника - $\varepsilon^2=0,1919$, для синусоиды - $\varepsilon^2=0,2324$.

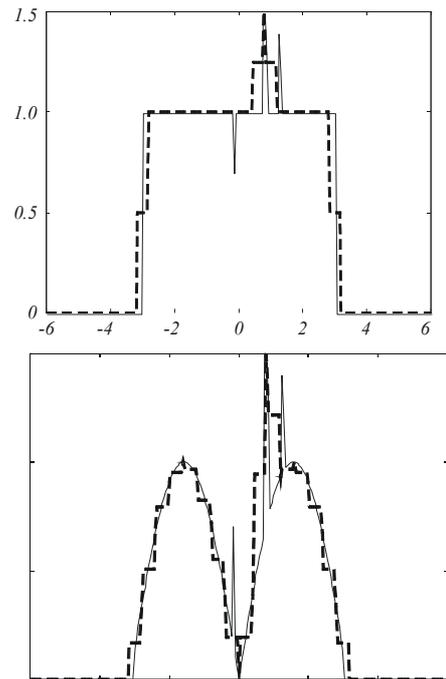


Рис. 3. Линейная интерполяция: исходный сигнал (сплошная линия) и восстановленный из прореженного в 8 раз (пунктирная линия).

5. Метод функций отсчетов

Рассмотрим теперь интерполяцию сигнала при помощи разложения исходной функции в ряд по функциям отсчетов. Согласно теореме Котельникова любую непрерывную функцию можно представить в виде:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nh) \frac{\sin 2\pi w_c(t-nh)}{2\pi w_c(t-nh)}, \quad (25)$$

где $f(nh)$ - дискретная с шагом h функция.

В нашем случае можно восстановить значения функции между отсчетами по формуле:

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} g(nh) \frac{\sin 2\pi w_c(t-nh)}{2\pi w_c(t-nh)} \quad (26)$$

На рис. 4 представлены результаты восстановления сигнала из прореженного в 8 раз с помощью функций отсчетов (26). Погрешность восстановления для прямоугольника - $\varepsilon^2=0,1681$, для синусоиды - $\varepsilon^2=0,2392$.

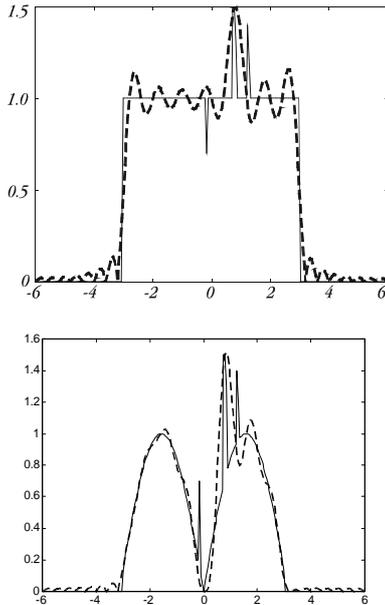


Рис. 4. Восстановление с помощью ряда Котельникова: исходный сигнал (черный цвет) и восстановленный из прореженного в 8 раз (синий цвет).

6. Метод ВСВФ

Этот метод подробно описан в разделе 2. Для экстраполяции спектра была использована формула

$$F(w) = \sum_{n=0}^M a_n \varphi_n(w),$$

где $M = \frac{2c}{\pi} - 2$, $w = n_t h_w$, $n_t = -Nk/2 : Nk/2$, N - число отсчетов прореженного сигнала, k - во сколько раз хотим продлить спектр, h_w - шаг спектра.

Коэффициенты a_n считаются по формуле (15) методом прямоугольников.

На рис. 5 изображена наиболее информативная часть спектра исходного сигнала и экстраполированного методом ВСВФ из усеченного в 8 раз. Погрешность аппроксимации для спектра прямоугольника - $\varepsilon^2=0,103$, для синусоиды - $\varepsilon^2=0,029$. Приведенные результаты получены для $c=20$. Учитывая, что сигнал имеет протяженность $[-3,3]$ (рис. 2, 3), то есть $T=6$, то из формулы (3) $w_c=1,67$. Если повысить c , а следовательно число используемых функций, то можно получить лучшие результаты.

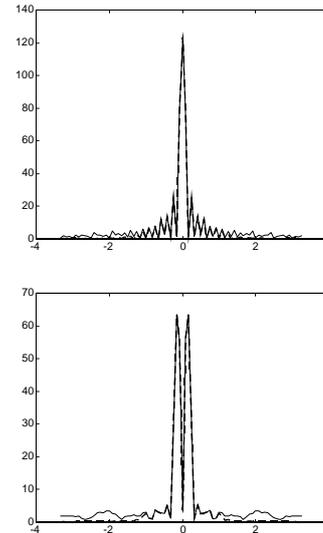


Рис. 5. Экстраполяция усеченного в 8 раз спектра методом ВСВФ: спектр исходного сигнала (черный цвет) и экстраполированный спектр (синий цвет).

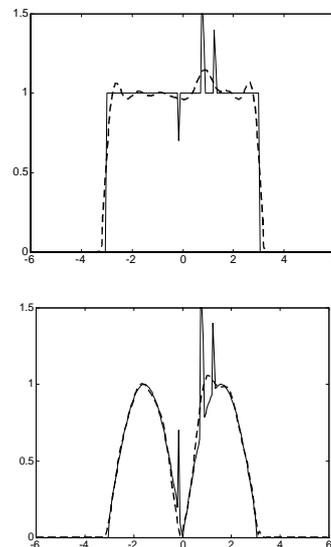


Рис. 6. Восстановление с помощью экстраполяции спектра по ВСВФ: исходный сигнал (черный цвет) и восстановленный из усеченного в 8 раз спектра (синий цвет).

На рис. 6 представлены результаты восстановления сигнала из усеченного в 8 раз спектра с помощью ВСВФ. Погрешность восстановления сигнала для прямоугольника - $\varepsilon^2=0,1274$, для синусоиды - $\varepsilon^2=0,1613$.

В таблице 1 приведены погрешности восстановления перечисленными методами для разной степени прореженности k прямоугольного сигнала, а в таблице 2 - для синусоидального сигнала.

На рис. 7 показаны графики погрешности восстановления перечисленными методами в зависимости от степени прореженности k для прямоугольного (рис. 7а) и синусоидального сигналов (рис. 7б). Из графиков на рис. 7 видно, что выигрыш метода ВСВФ достигается при усечении спектра в 4-6 раз.

Таблица 1. Погрешности восстановления сигнала в зависимости от степени прореженности k для прямоугольного импульса

Степень прореженности, k	Метод линейной интерполяции	Метод функций отсчетов	Метод ВСВФ	Аппроксимация спектра с помощью ВСВФ
2	0,0777	0,0839	0,1198	0,0951
4	0,1297	0,1459	0,1211	0,0956
6	0,1644	0,1902	0,1237	0,0981
8	0,1919	0,1681	0,1274	0,1030
10	0,2074	0,2457	0,1416	0,1208

Таблица 2. Погрешности восстановления сигнала в зависимости от степени прореженности k для синусоидального сигнала

Степень прореженности, k	Метод линейной интерполяции	Метод функций отсчетов	Метод ВСВФ	Аппроксимация спектра с помощью ВСВФ
2	0,1238	0,0918	0,1613	0,0296
4	0,1624	0,1409	0,1614	0,0296
6	0,2079	0,1771	0,1613	0,0296
8	0,2324	0,2392	0,1613	0,0294
10	0,2387	0,1788	0,1620	0,0166

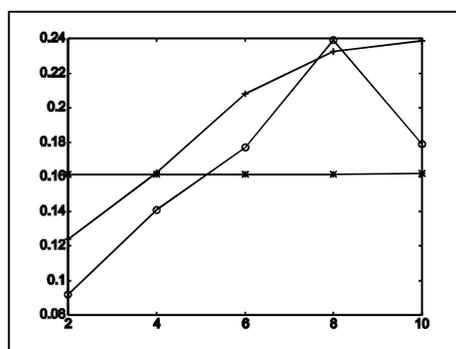
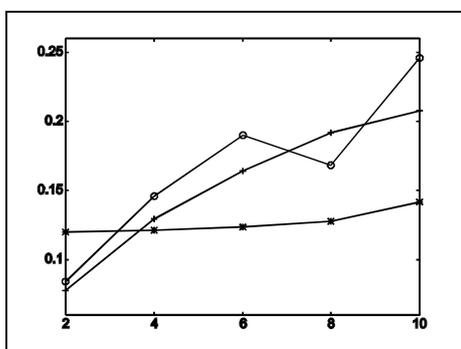


Рис. 7. Графики погрешности восстановления сигнала в зависимости от степени прореженности k линейной интерполяцией (линия с "+"), рядом Котельникова (линия с "o") и метод ВСВФ (линия с "*") для прямоугольного (а) и синусоидального сигналов (б).

Заключение

В данной работе проведено сравнение метода повышения разрешающей способности одномерных сигналов, основанного на использовании вытянутых сфероидальных волновых функций нулевого порядка, с линейной интерполяцией и интерполяцией с помощью функций отсчетов (ряд Котельникова).

Показано, что выигрыш метода ВСВФ восстановления сигнала при прохождении изображающей системы с ограниченным зрачком наступает при усечении спектра в 4-6 раз.

Благодарность

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 00-15-96114, 00-01-00031).

Литература

1. D. Slepian, H.O. Pollak Prolate spheroidal wave functions // Fourier Analysis and Uncertainty – I. Bell Syst. Tech. J. 1961. V. 40. P. 43-46.
2. H.J. Landau, H.O. Pollak Prolate spheroidal wave functions // Fourier Analysis and Uncertainty – II. Bell Syst. Tech. J. 1961. V. 40. P. 65-84.
3. D. Slepian, H.O. Pollak Prolate spheroidal wave functions // Fourier analysis and uncertainty – III.

The dimension of essentially time-and band-limited signals // Bell Syst. Tech. J. 1962. V. 41. P. 1295-1336.

4. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике // М., Физматгиз. 1962.
5. P. De Santis, C. Palma Degrees of freedom of aberrated images // Opt. Acta. 1976. V. 23. № 9. P. 743-752.
6. Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции // М., Наука, 1976.
7. M. Bertero, C. De Mol, G.A Viano Restoration of optical objects using regularization // Opt. Lett. 1978. V. 3. № 2. P. 51-53.
8. M. Bertero, G.A. Viano, C. De Mol Resolution beyond the diffraction limit for regularized object restoration // Opt. Acta. 1980. V. 27. № 3. P. 307-320.
9. M. Bertero, E.R Pike Resolution in diffraction-limited imaging, a singular value analysis. I. The case of coherent illumination // Opt. Acta. 1982. V. 29. № 6. P. 727-746.
10. Василенко Г.И., Тараторкин А.М. Восстановление изображений // М., Радио и связь. 1986.
11. J.W. Goodman Introduction to Fourier optics // San Francisco, McGraw-Hill inc. 1968.