

# ВЛИЯНИЕ ДИФРАКЦИИ НА ИЗОБРАЖЕНИЯ, СОГЛАСОВАННЫЕ С ВЫТЯНУТЫМИ СФЕРОИДАЛЬНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

С.Н. Хонина, В.В. Котляр  
Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

## Аннотация

Рассмотрены свойства вытянутых сфероидальных волновых функций нулевого порядка, важные для дифракционной оптики: инвариантность к преобразованию Фурье, устойчивость к диафрагмированию в оптических системах, самовоспроизведение на некотором расстоянии в свободном пространстве. Исследованы влияние размеров диафрагмы на точность передачи сигнала, согласованного с вытянутыми сфероидальными волновыми функциями линзовыми системами. Проведено сравнение с функциями Гаусса-Эрмита.

## Введение

Вытянутые сфероидальные волновые функции (ВСВФ) известны в оптике, прежде всего, как моды оптических систем с ограниченной апертурой и проходящие через такие оптические системы без искажений [1-4].

ВСВФ представляют собой полный набор функций с ограниченной спектральной полосой, которые ортогональны как на данном конечном интервале, так и на бесконечном интервале [5]. Таким образом, бесконечным рядом по ВСВФ можно представить любое световое поле. Суперпозиция ВСВФ, аппроксимирующая некоторое световое распределение, будет обладать модовым характером при прохождении через оптические линзовые системы с ограниченной апертурой. То есть, изображение будет устойчиво к дифракционным эффектам, связанным с ограниченными размерами апертуры оптической системы.

Заметим, что разложение поля или изображения, сформированного оптической линзовой системой по базису ВСВФ является оптимальной процедурой в смысле минимального количества слагаемых разложения, число которых равно числу степеней свободы оптической системы по Шеннону [6, 7].

В [8] высказано предположение, что обобщенные двумерные ВСВФ [9] обладают также свойством самовоспроизведения при распространении в пространстве, то есть они являются собственными функциями оператора дифракции Френеля от ограниченной апертуры.

В данной работе с помощью численного моделирования исследуется устойчивость одномерных ВСВФ к преобразованию Френеля. Кроме того, исследуются другие свойства ВСВФ, важные для дифракционной оптики: инвариантность к преобразованию Фурье, устойчивость к диафрагмированию в объектной плоскости.

Также проведены численные эксперименты, моделирующие прохождение сигнала, представляющего собой суперпозицию ВСВФ, через линзовую систему с ограниченным зрачком в спектральной плоскости. Исследуется влияние размеров диафрагмы на точность передачи сигнала. Проводится сравнение с функциями Гаусса-Эрмита.

## 1. Свойства ВСВФ, используемые в дифракционной оптике

После разделения трехмерного скалярного волнового уравнения в вытянутых сфероидальных

координатах возникает дифференциальное уравнение [10]:

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d\psi(x)}{dx} + \left(\chi - c^2x^2 - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\psi(x) = 0, \quad (1)$$

которое имеет непрерывное вещественное решение  $\psi(x)$ , ограниченное при любых  $x$ . С точностью до константы решение единственно. Здесь и далее:  $c$  – произвольное положительное число,  $m$  – неотрицательное целое. Для упрощения записи в дальнейшем будем опускать зависимость величин от  $c$ .

Обозначим специальные значения  $\chi$ , при которых существуют непрерывные решения через  $\chi_{m,n}$ ,  $n=m, m+1, \dots$ . Эти собственные значения могут быть так обозначены, поскольку  $0 < \chi_{m,m} < \chi_{m,m+1} < \dots$ . Соответствующие им решения обозначим  $\psi_{m,n}(x)$ . Собственные функции  $\psi_{m,n}(x)$  четные, если  $n-m$  – четное число и нечетные, если  $n-m$  – нечетное число. Также они имеют ровно  $n-m$  нулей на открытом интервале  $|x| < 1$ .

Функции  $\psi_{m,n}(x)$  известны [11, 12] как вытянутые сфероидальные волновые функции порядка  $m$ . Однако особый интерес представляют ВСВФ нулевого порядка. Благодаря ряду замечательных свойств они играют важную роль во многих прикладных задачах.

Функции  $\psi_{0,n}(x)$ , которые далее будем обозначать просто  $\psi_n(x)$ , удовлетворяют интегральному уравнению [10]:

$$\lambda_n \psi_n(y) = \int_{-1}^1 \frac{\sin[c(y-x)]}{\pi(y-x)} \psi_n(x) dx, \quad (2)$$
$$\lambda_n \psi_n(y) = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin\left[\frac{2c}{T}(y-x)\right]}{\pi(y-x)} \psi_n(x) dx,$$

где  $\lambda_n$  – собственные числа,  $1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > 0$ . При этом собственные числа интегрального преобразования определяют количество энергии соответствующей собственной функции, концентрирующейся на данном ограниченном интервале. Собственные числа, близкие к единице, показывают, что данная ВСВФ имеет за пределами данного интервала малую долю энергии. Поведение  $\lambda_n$  как функции от  $n$  таково, что до некоторого  $n_0 = 2c/\pi$  собственные числа имеют значения близкие к единице, а после – резко спадают до нуля.

Используя (2) функция  $\psi_n(x)$  можно продлить на все пространство  $[-\infty, \infty]$ . Рассмотрим преобразо-

вание Фурье аналитического продолжения  $\psi_n(y)$  (при  $\lambda_n \equiv 1$ ):

$$\mathfrak{F}_n(w) = \mathfrak{I}[\psi_n(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(y) \exp(-i2\pi y w) dy. \quad (3)$$

Из (2) получаем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_n(w) &\equiv \mathfrak{I}\left[\frac{2c}{\pi T} \operatorname{sinc}\left(\frac{2c}{\pi T} x\right) * \psi_n(x)\right] = \\ &= \mathfrak{I}\left[\frac{2c}{\pi T} \operatorname{sinc}\left(\frac{2c}{\pi T} x\right)\right] \mathfrak{F}_n(w) = \Pi\left(\frac{\pi T}{2c} w\right) \mathfrak{F}_n(w) \end{aligned}$$

где  $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$ , \*—знак свертки,

$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 0,5 \\ 0, & |x| > 0,5 \end{cases}$ . Таким образом, спектр  $\psi_n(x)$

практически равен нулю вне интервала  $[-w_0, w_0]$ :

$$\mathfrak{F}_n(w) \equiv \Pi\left(\frac{w}{2w_0}\right) \mathfrak{F}_n(w), \quad w_0 = \frac{c}{\pi T}. \quad (4)$$

ВСВФ нулевого порядка являются собственными функциями преобразования Фурье на ограниченном интервале [3, 10, 13]:

$$\alpha_n \psi_n(y) = \int_{-1}^1 \exp(icy) \psi_n(x) dx,$$

$$\lambda_n = \frac{c}{2\pi} |\alpha_n|^2, \quad (5)$$

$$i^n \sqrt{\frac{2\pi\lambda_n}{c}} \psi_n\left(\frac{y}{c}\right) = \int_{-1}^1 \exp(icy) \psi_n(x) dx, \quad (6)$$

с учетом комплексного сопряжения и замены переменных:

$$(-i)^n \sqrt{\frac{2\lambda_n}{T\omega_0}} \psi_n\left(\frac{2\omega}{T\omega_0}\right) = \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-i2\pi x \omega) \psi_n(x) dx. \quad (7)$$

Используя правило нормировки, выбранное в [5]:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{mn} \lambda_n, \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{mn},$$

и свойство (4), получаем выражение для преобразования Фурье на бесконечном интервале:

$$\begin{aligned} i^{-n} \sqrt{\frac{T}{\lambda_n 2w_0}} \psi_n\left(\frac{T w}{2w_0}\right) \Pi\left(\frac{w}{2w_0}\right) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi x w) \psi_n(x) dx \end{aligned} \quad (9)$$

и выражение для sinc-преобразования (2) на бесконечном интервале:

$$\psi_n(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[c(y-x)]}{\pi(y-x)} \psi_n(x) dx. \quad (10)$$

Все перечисленные свойства взаимосвязаны и следуют один из другого. Например, из (2) и (10) следует свойство двойной ортогональности (8):

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \left[ \frac{1}{\lambda_m} \int_{-1}^1 \psi_m(t) \frac{\sin[c(x-t)]}{\pi(x-t)} dt \right] dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_m} \int_{-1}^1 \psi_m(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \frac{\sin[c(x-t)]}{\pi(x-t)} dx \right] dt = \\ &= \frac{1}{\lambda_m} \int_{-1}^1 \psi_m(t) \psi_n(t) dt = \frac{1}{\lambda_m} \lambda_m \delta_{nm} = \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Также из (5), учитывая, что:

$$\alpha_n^* \psi_n(y) = \int_{-1}^1 \exp(-icy) \psi_n(x) dx,$$

$\psi_n(x)$  — действительные, можно получить (2):

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \exp(icy) \psi_n(x) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \exp(icy) \left[ \frac{1}{\alpha_n^*} \int_{-1}^1 \exp(-ict) \psi_n(t) dt \right] dx = \\ &= \frac{1}{\alpha_n^*} \int_{-1}^1 \psi_n(t) \left[ \int_{-1}^1 \exp[icx(y-t)] dx \right] dt = \\ &= \frac{2}{\alpha_n^*} \int_{-1}^1 \psi_n(t) \frac{\sin[c(y-t)]}{c(y-t)} dt = \\ &= \frac{2\pi}{\alpha_n^* c} \int_{-1}^1 \psi_n(t) \frac{\sin[c(y-t)]}{\pi(y-t)} dt = \alpha_n \psi_n(y). \end{aligned}$$

То есть,

$$\int_{-1}^1 \psi_n(t) \frac{\sin[c(y-t)]}{\pi(y-t)} dt = \frac{|\alpha_n|^2 c}{2\pi} \psi_n(y) = \lambda_n \psi_n(y).$$

## 2. Численные результаты

Одним из важнейших свойств ВСВФ нулевого порядка из перечисленных в разделе 1, является инвариантность к преобразованию Фурье на ограниченном отрезке (5)–(7). То есть функция  $\psi_n(x)$  воспроизводится в зоне дифракции Фраунгофера или в фокальной плоскости сферической линзы с точностью до коэффициента, определяемого размерами диафрагмы в объектной плоскости.

Известен ряд функций, инвариантных к преобразованию Фурье в бесконечных пределах. Например, в [14] рассматривается способ синтеза объектов, инвариантных к преобразованию Фурье путем композиции исходной функции и ее Фурье-образа. Однако при введении диафрагмы свойство Фурье-инвариантности таких объектов нарушается. Более удобными для диафрагмирования являются функции Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра, энергия которых как в объектной, так и частотной плоскостях сконцентрирована на ограниченном отрезке. Хотя, строго говоря, эти функции инвариантны к преобразованию Фурье в бесконечных пределах.

В [15] были использованы функции Гаусса-Эрмита (ФГЭ) как начальное приближение в итерационном расчете ВСВФ нулевого порядка:

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad (11)$$

где  $H_n(x)$  - многочлен Эрмита,  $\sigma$  - радиус гауссового пучка,  $\sigma = c^{-1/2}$ .

В данной работе расчет одномерных ВСВФ проводился на основе алгоритма, описанного в работах [16, 17].

На рис. 1, 2 показаны графики ФГЭ и ВСВФ (рис. 1а, 2а) и модулей их Фурье-образов (рис. 1б, 2б), полученных с помощью формулы (5), при различных значениях параметра  $c$ .

Для  $c=20$ ,  $n=3$  вся энергия  $\psi_n(x)$  сконцентрирована на отрезке  $[-1, 1]$  ( $\lambda_n(c) \cong 1,00$ ,  $n_0=12$ ). Энергия  $g_n(x)$  также практически вся включается в этот отрезок. На рис. 1б видно, что обе функции демонстрируют инвариантность к преобразованию Фурье: среднеквадратичное отклонение модуля спектра ФГЭ от модуля самой ФГЭ составило  $\delta=0,12\%$ , а для ВСВФ отклонение определялось лишь ошибкой численного интегрирования и составило  $\delta=0,0001\%$ .

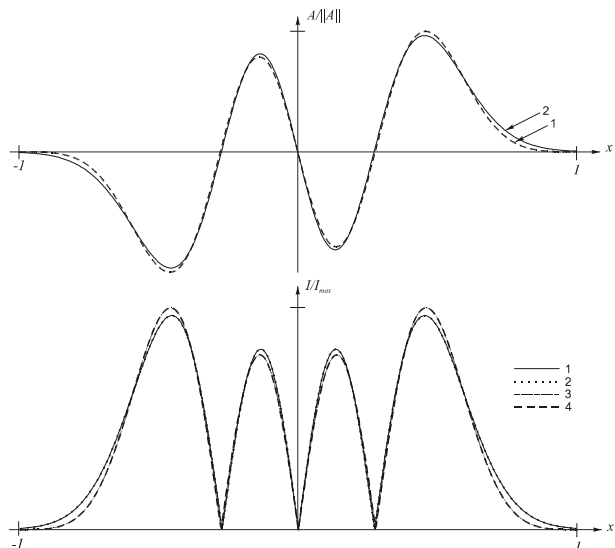


Рис. 1. Сравнение Фурье-спектров для ФГЭ и ВСВФ при  $n=3$ ,  $c=20$ ,  $\lambda_n(c) \cong 1,00$ : (а) ФГЭ (линия 1) и ВСВФ (линия 2); (б) модули ФГЭ (линия 1) и ее Фурье-образа (линия 2), ВСВФ (линия 3) и ее Фурье-образа (линия 4).

Для  $c=10$ ,  $n=5$  за отрезком  $[-1, 1]$  находится менее 18% энергии  $\psi_n(x)$  ( $\lambda_n(c)=0,825$ ,  $n_0=6$ ), аналогично и для  $g_n(x)$ . Однако на рис. 2б видно существенное нарушение свойства Фурье-инвариантности для ФГЭ ( $\delta=28,24\%$ ) и его сохранение для ВСВФ ( $\delta=1,02\%$ ).

Двумерные ВСВФ нулевого порядка могут быть получены как произведение одномерных  $\psi_{nm}(x, y) = \psi_n(x) \cdot \psi_m(y)$ . На рис. 3 показана двумерная ВСВФ (3,5) для  $c=10$  (а) и  $c=7$  (б) и их Фурье-образы (соответственно рис. 3в и 3г).

В [8] было сделано предположение, что ВСВФ обладают также свойством самовоспроизведения при распространении в пространстве. Параксиальное рас-

пространство световых полей в свободном пространстве описывается преобразованием Френеля:

$$F(y) = \sqrt{\frac{k}{z}} \exp(ikz) \times \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \exp\left[\frac{ik}{2z}(y-x)^2\right] dx \quad (12)$$

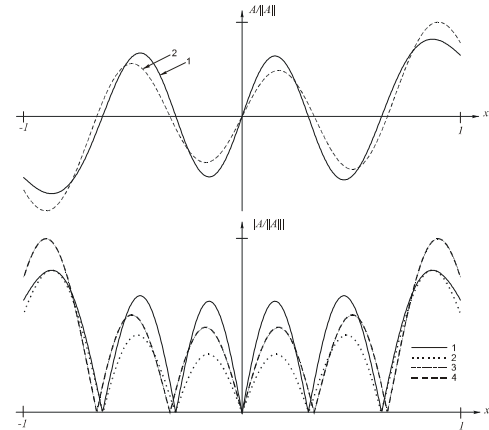


Рис. 2. Сравнение Фурье-спектров для ФГЭ и ВСВФ при  $n=5$ ,  $c=10$ ,  $\lambda_n(c)=0,825$ : (а) ФГЭ (линия 1) и ВСВФ (линия 2); (б) модули ФГЭ (линия 1) и ее Фурье-образа (линия 2), ВСВФ (линия 3) и ее Фурье-образа (линия 4).

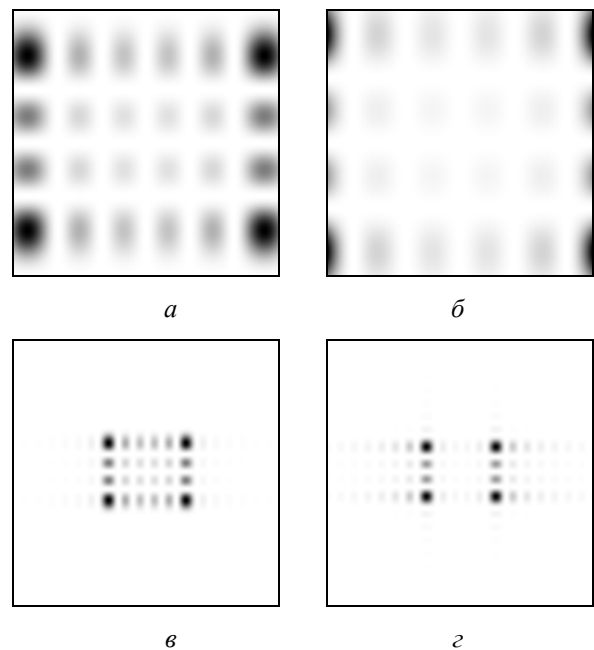


Рис. 3. Двумерная ВСВФ (3,5) для  $c=10$  (а) и  $c=7$  (б) и их Фурье-образы, (в) и (г), соответственно.

На рис. 4, 5 показаны графики ВСВФ и модулей их Френель-образов, полученных с помощью формулы (12), при различных значениях параметра  $c$ . Видно, что  $\psi_n(x)$ , собственные числа  $\lambda_n$  которых практически равны единице (то есть на отрезке  $[-T/2, T/2]$  заключена вся энергия), примерно сохраняет свой вид (с точностью до масштаба) на всей оптической оси (рис. 4). Если же  $\lambda_n < 1$ , то  $\psi_n(x)$  в зоне дифракции Френеля претерпевает значительные изменения, затем с ростом расстояния  $z$  посте-

ленно восстанавливается и самовоспроизводится в зоне дифракции Фраунгофера (рис. 5).

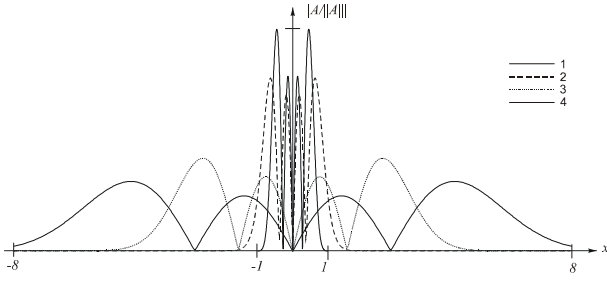


Рис. 4. Распространение ВСВФ при  $n=3$ ,  $c=20$ ,  $\lambda_n(c) \approx 1.00$  в свободном пространстве: модули при  $z=0$  (линия 1),  $z=500$  мм (линия 2),  $z=2750$  мм (линия 3),  $z=5000$  мм (линия 4).

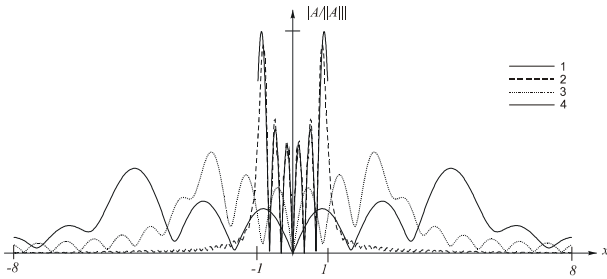


Рис. 5. Распространение ВСВФ при  $n=5$ ,  $c=10$ ,  $\lambda_n(c)=0,825$  в свободном пространстве: модули при  $z=0$  (линия 1),  $z=500$  мм (линия 2),  $z=2750$  мм (линия 3),  $z=5000$  мм (линия 4).

На рис. 6 показаны графики среднеквадратичного отклонения модулей Френель-образов от модулей исходных ВСВФ для различных значений собственных чисел. Видно, что для  $\psi_n(x)$  с  $\lambda_n \approx 1$  отклонения значительно ниже, и самовоспроизведение наступает гораздо раньше, чем для  $\psi_n(x)$  с  $\lambda_n < 1$ .

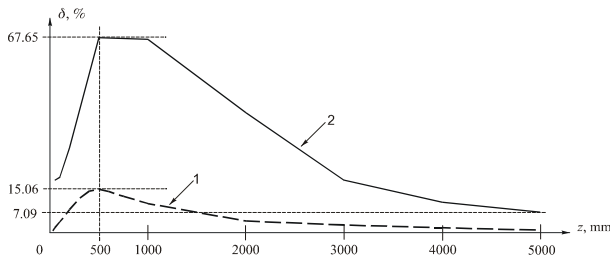


Рис. 6. Среднеквадратичное отклонение при распространении ВСВФ при  $n=3$ ,  $c=20$ ,  $\lambda_n(c) \approx 1,00$  (линия 1) и при  $n=5$ ,  $c=10$ ,  $\lambda_n(c)=0,825$  (линия 2) в свободном пространстве в зависимости от расстояния  $z$ .

Благодаря свойству (7) изображение, согласованное с ВСВФ, будет обладать модовым характером при прохождении через оптические линзовые системы с ограниченной апертурой. То есть, такое изображение будет устойчиво к дифракционным эффектам, связанным с ограниченными размерами апертуры оптической системы.

ВСВФ представляют собой полный набор ортогональных функций с ограниченной спектральной полосой. Таким образом, бесконечным рядом по ВСВФ можно представить любое световое поле:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \psi_n(x), \quad (13)$$

где

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \psi_n(x) dx. \quad (14)$$

В [7] показано, что существенными являются первые  $M \leq n_0$  членов ряда (14). Именно  $n_0 = 2c/\pi = 2Tw_0$  определяет число Шеннона для ВСВФ [3]. Кроме того, при вычислении коэффициентов (14) для  $n > n_0$  будет происходить деление на  $\lambda_n \approx 0$ , что может вносить существенные ошибки. Поэтому будем далее рассматривать некоторую аппроксимацию заданного светового поля:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^M f_n \psi_n(x). \quad (15)$$

Заметим, что выражение (2) можно рассматривать как коэффициенты (14) ряда (13) для функции:

$$\frac{\sin\left[\frac{2c}{T}(y-x)\right]}{\pi(y-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) \psi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \psi_n(y) \psi_n(x). \quad (16)$$

Т. к.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , то

$$\frac{2c}{\pi T} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \psi_n^2(x). \quad (17)$$

и пользуясь свойством ортогональности (8), получаем:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \psi_n^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \int_{-T/2}^{T/2} \psi_n^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 = \frac{2c}{\pi} = n_0. \quad (18)$$

Чтобы повысить точность аппроксимации (15), нужно увеличивать значение параметра  $c$ , так как  $n_0 = 2c/\pi$ . На рис. 7 показаны аппроксимации прямоугольника ВСВФ для различных значений параметра  $c$  и Фурье-спектры этих аппроксимаций. Видно, что ростом параметра  $c$  точность аппроксимации повышается:  $\delta = 14,98\%$  (рис. 7а),  $\delta = 13,46\%$  (рис. 7в),  $\delta = 11,88\%$  (рис. 7д). Однако за это приходится платить расширением спектра (сравни рис. 7б, г, е). Если ряд (15) содержит только  $\psi_n(x)$  с собственными числами, практически равными 1 (то есть  $\lambda_n \approx 1$ ), то спектр изображения  $\tilde{f}(x)$  будет находиться внутри отрезка  $[-w_0, w_0]$ ,  $w_0 = c/T\pi$ . Если же  $\lambda_n < 1$ , то спектр выйдет за этот отрезок. Так как  $\lambda_{12}(20) = 0,588$ ,  $\lambda_{18}(30) = 0,707$ ,  $\lambda_{30}(50) = 0,865$ , то нет гарантии, что спектры полученных аппроксимаций не выйдут за частоту  $w_0$ .

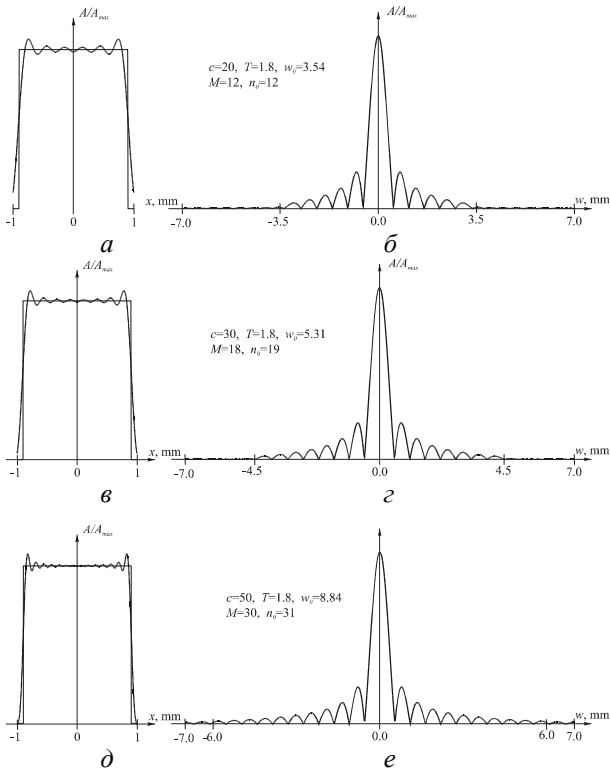


Рис. 7. Аппроксимации прямоугольника ВСВФ для различных значений параметра  $c$  (а, в, д) и соответствующие им модули спектров (б, г, е).

Однако при соблюдении условия  $M \leq n_0$ , количество энергии в спектре за отрезком  $[-w_0, w_0]$  будет немного, и потери информации при таком диафрагмировании будут невелики. На рис. 8 приведены результаты моделирования прохождения сигнала через линзовую систему с ограниченным зрачком.

При моделировании рассматривалась аппроксимация косинусного сигнала  $f(x)$  рядом (15) по ВСВФ и, для сравнения, по ФГЭ. При  $M=16$ ,  $c=30$  среднеквадратичная ошибка аппроксимации составила  $\delta=7,19\%$  для ВСВФ и  $\delta=11,29\%$  для ФГЭ (рис. 8а и 8б соответственно линия 1 – исходный сигнал, линия 2 – аппроксимация). На рис. 8ж показаны графики модулей спектров каждой из аппроксимаций: линия 1 – для ВСВФ, линия 2 – для ФГЭ. Далее спектры подвергались усечению до частоты  $w_c$ .

Учитывая, что  $\lambda_{16}(30)=0,985$ , усечение до частоты  $w_c=5$  ( $w_0=5,31$ ) не должно привести к потере информации в изображении. Действительно, в этом случае среднеквадратичное отклонение интенсивности изображения от интенсивности аппроксимации составило  $\delta=0,02\%$  для ВСВФ (рис. 8в) и  $\delta=0,93\%$  для ФГЭ (рис. 8г). При уменьшении размеров диафрагмы ошибка будет расти. Так, при усечении спектра до частоты  $w_c=1,5$  отклонение составило  $\delta=24,17\%$  для ВСВФ (рис. 8д) и  $\delta=34,67\%$  для ФГЭ (рис. 8е).

На рис. 9 приведены графики среднеквадратичного отклонения интенсивности изображения от интенсивности аппроксимации косинусного сигнала по ВСВФ (линия 1) и по ФГЭ (линия 2) в зависимости от частоты усечения спектра  $w_c$ . Видно, линия 1,

за исключением некоторых точек, лежит ниже линии 2. То есть ВСВФ обеспечивают меньшие искажения для изображающих систем с ограниченным зрачком, чем ФГЭ.

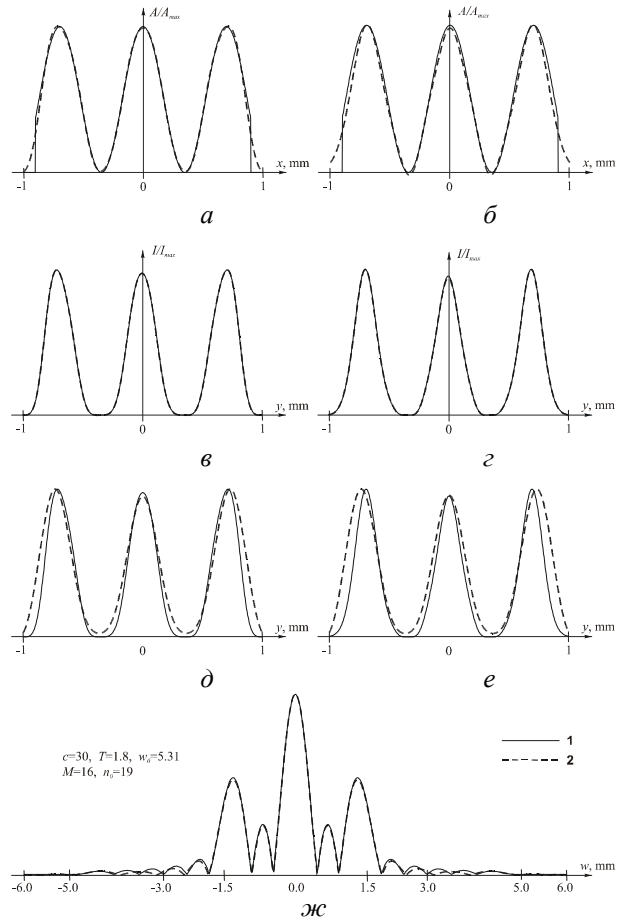


Рис. 8. Аппроксимации косинусной функции рядом (16) по ВСВФ (а) и по ФГЭ (б) при  $M=16$ ,  $c=30$ , и восстановление этих аппроксимаций по спектру (ж), усеченному до частоты  $w_c=5$  (в, г) и  $w_c=1,5$  (д, е).

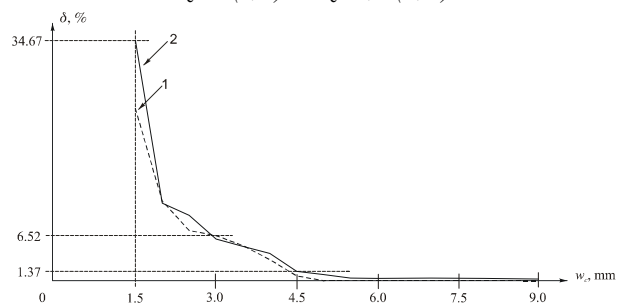


Рис. 9. Ошибка изображения при аппроксимации косинусной функции рядом (15) по ВСВФ (линия 1) и по ФГЭ (линия 2) в зависимости от частоты усечения спектра  $w_c$ .

На рис. 10 приведены графики эффективности, то есть количества энергии, сохранившейся в изображении, при прохождении через линзовую систему аппроксимации косинусного сигнала по ВСВФ (линия 1) и по ФГЭ (линия 2) в зависимости от ширины диафрагмы  $2w_c$  в частотной плоскости. Видно, что линия 1 практически достигает 100% на частоте

$w_c=4,5$  и лежит выше линии 2 вплоть до частоты  $w_c=3,3$ .

Таким образом, на основании рис. 9 и 10 можно говорить, скорее, о выигрыше ВСВФ, по сравнению с ФГЭ в смысле меньших искажений сигнала, чем энергетических потерь.

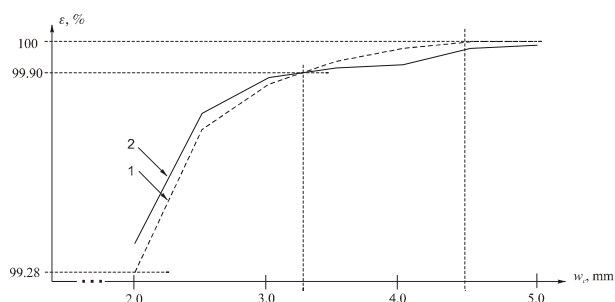


Рис. 10. Эффективность изображения при аппроксимации косинусной функции рядом (15) по ВСВФ (линия 1) и по ФГЭ (линия 2) в зависимости от частоты усечения спектра  $w_c$ .

### Заключение

В данной работе получены следующие результаты.

На численных примерах подтверждена устойчивость дифракционной картины Фраунгофера вытянутых сфероидальных волновых функций нулевого порядка к введению диафрагмы в объектной плоскости. Для сравнения показано, что при экранировании части энергии функций Гаусса-Эрмита их свойство Фурье-инвариантности нарушается.

На численных примерах показано самовоспроизведение сфероидальных функций на некотором расстоянии при распространении в свободном пространстве. При этом, чем собственные числа  $\lambda_n$  ближе к единице, тем раньше наступает самовоспроизведение.

Проведено численное моделирование прохождения сигнала, согласованного со сфероидальными функциями и, для сравнения, с функциями Гаусса-Эрмита, через линзовую систему с ограниченным зрачком. Исследование влияния размеров диафрагмы в спектральной плоскости на точность и эффективность передачи изображения показало, что выигрыш сфероидальных функций, по сравнению с функциями Гаусса-Эрмита достигается, скорее, в смысле меньших искажений сигнала, чем энергетических потерь.

### Благодарность

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 00-15-96114, 00-01-00031).

### Литература

1. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике // М., Физматгиз. 1962.

2. Комаров И.В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции // М., Наука. 1976.
3. M. Bertero, E. R. Pike Resolution in diffraction-limited imaging, a singular value analysis // I. The case of coherent illumination, Optica Acta, 29(6), P. 727-746. (1982).
4. M. Piche, P. Lavigne, F. Martin, P.A. Belanger Modes of resonator with internal apertures // Appl. Opt., 22(13), P. 1999-2006 (1983).
5. D. Slepian, H.O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions. Fourier Analysis and Uncertainty – I, The Bell System Technical Journal, 40, P. 43-46 (1961).
6. H.J. Landau, H.O. Pollak Prolate spheroidal wave functions // Fourier Analysis and Uncertainty – II, The Bell System Technical Journal, 40, P. 65-84 (1961).
7. D. Slepian, H.O. Pollak Prolate spheroidal wave functions // Fourier analysis and uncertainty – III: The dimension of essentially time-and band-limited signals, Bell Syst. Tech. J., 41, P. 1295-1336. (1962).
8. W.D. Montgomery Algebraic formulation of diffraction applied to self-imaging // J. Opt. Soc. Am., 58(8), P. 1112-1124. (1968).
9. D. Slepian Prolate spheroidal wave functions. Fourier Analysis and Uncertainty – IV: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions, The Bell System Technical Journal, 43, P. 3009-3057 (1964).
10. D. Slepian Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions // J. Math. & Phys., 44, P. 99-140. (1965).
11. Фламмер К. Таблицы волновых сфероидальных функций // М., ВЦ АН СССР, (БМТ. В. 17). 1962.
12. Лоуэн А. Сфероидальные волновые функции, в кн // «Справочник по специальным функциям» под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., Наука. 1979. 832 с.
13. P. De Santis, C. Palma Degrees of freedom of aberrated images // Optica Acta, 23(9), 743-752 (1976).
14. A.W. Lohmann, D. Mendlovic Self-Fourier objects and other self-transform objects // J. Opt. Soc. Am. A, 9(11), 2009-2012, (1992).
15. Хонина С.Н., Котляр В.В. Вытянутые сфероидальные функции в дифракционной оптике // Материалы международной молодежной школы по оптике, лазерной физике и биофизике. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. С. 50-51, (2000).
16. Хонина С.Н. Приближение сфероидальных волновых функций конечными рядами // Компьютерная оптика, Самара, ИСОИ РАН, 19, С. 65-70, (1999).
17. Волоотовский С.Г., Казанский Н.Л., Хонина С.Н. Анализ и разработка методов вычисления собственных значений вытянутых сфероидальных функций нулевого порядка // Труды 5-й международной конференции РОАИ-5-2000. Самара. Россия. № 4. С. 697-700, (2000).