

РАСЧЕТ ДВУХМЕРНОЙ БИНАРНОЙ РЕШЕТКИ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ ЗАДАННОГО НАБОРА ДИФРАКЦИОННЫХ ПОРЯДКОВ

П.А. Глотов, В.В. Котляр*

* Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара
Самарский государственный аэрокосмический университет

Введение

Дифракционные решетки применяются сегодня во многих областях науки и техники. Их главными характеристиками являются: эффективность – процент энергии, попавший в заданную область, и ошибка – отличие полученного распределения интенсивности от заданного. Различаются амплитудные и фазовые решетки, причем фазовые значительно выигрывают в эффективности. Их теоретическая эффективность – около 97% для одномерных и 94% – для двухмерных [1]. В амплитудных – эффективность всего около 50% или меньше. Фазовые решетки в свою очередь различаются по сложности рельефа. В нашем случае это бинарная решетка, самая простая для изготовления. Ее рельеф получается за один цикл травления подложки. Бинарные решетки позволяют сформировать только симметричные распределения интенсивности дифракционных порядков.

Расчету многопорядковых дифракционных решеток в скалярном приближении посвящено большое число работ. Из всех методов проектирования решеток наиболее эффективными являются: итерационный метод Ньютона [2-5], итерационный метод Герцберга-Секстона [6, 7] и градиентный метод [1, 8-9]. Для расчета двухмерных бинарных решеток отметим градиентный метод с аналитически подсчитанного начального приближения [8]. Его применение осложнено выбором начального приближения для каждого нового распределения интенсивностей порядков. Лишенный указанного недостатка метод Ньютона находит фазовую решетку с невысокой эффективностью [5]. Одним из методов получения двухмерной решетки является перемножение фазовых функций двух одномерных решеток. Эффективность такой решетки зависит от эффективности исходных фазовых решеток, а на распределение интенсивностей налагаются ограничения.

В работе [10] производился расчет четной симметричной одномерной бинарной решетки комбинированным методом: сначала расчет велся градиентным методом, а затем методом Ньютона. При этом была жесткая связь между количеством скачков решетки и количеством дифракционных порядков. Скачки решетки были заданы симметрично относительно нуля. Это приводило к неполному использованию свободных параметров и невысокой эффективности решетки – 50-60%. Хотя метод давал нулевую ошибку в распределении заданных порядков.

Дальше мы рассчитали четные несимметричные решетки [11]. Для расчета применялся метод

Ньютона в связке с градиентным методом для линейных алгебраических систем, что позволило снять жесткую связь между числом скачков и числом порядков. Были получены решетки с эффективностью

78-82% и ошибкой 1-5%. Начальное приближение нулей выбиралось случайно. Затем скачок фазы был рассмотрен как свободный параметр. Дифракционная эффективность при этом возросла на 2-5% и достигла 78-84%, а ошибка уменьшилась до 1-3%.

В этой работе исследованы одномерные фазовые решетки с помощью численного эксперимента. Для этого формировалась бинарная решетка из 4 периодов фазовой функции. Число периодов взято из экспериментов. При увеличении этого числа резко возрастает ошибка дискретизации, так как период решетки представляется меньшим числом точек. При уменьшении числа периодов, функции дифракционных порядков расплываются, налагаясь друг на друга. На решетку подавалась плоская волна, после чего находилось Фурье-преобразование. В полученном распределении измерялась эффективность и отношение шума к сигналу. Так же получены двухмерные решетки из двух одномерных. Для этого функции бинарных решеток перемножались. Рассчитаны некоторые двухмерные фазовые решетки по аналогии с расчетами одномерных [11]. В качестве неизвестных выбирались координаты областей бинарной решетки со скачком фазы на π . Дифракционная эффективность полученных фазовых решеток составила 60-65%, а ошибка 1-5 %.

1. Описание двухмерной бинарной решетки

1.1 Фазовая функция двухмерной бинарной решетки

В двухмерном случае фазовая функция решетки $P(u, v)$ периодична в двух направлениях. Соотношение одного периода $\tilde{P}(u, v)$ с функцией решетки можно представить в виде [12]:

$$P(u, v) = \tilde{P}(u, v) * \text{comb}(u, v). \quad (1)$$

Отклик решетки, обратное преобразование Фурье, запишется как

$$p(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{p}(n, m) \delta(x - n, y - m), \quad (2a)$$

где

$$\tilde{p}(n, m) = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \tilde{P}(u, v) e^{j2\pi(nu + mv)} dudv. \quad (2б)$$

Переход от одномерных решеток к двумерным бинарным решеткам сильно осложнен трудностью описания двухмерных областей со скачком фазы. Так в этой статье области выбирались в виде прямоугольников (рис.1).

Так же фазовую функцию двухмерной решетки можно представить как:

$$\tilde{P}(u, v) = \tilde{P}_1(u) \tilde{P}_2(v) \quad (3)$$

где $\tilde{P}_1(u)$ и $\tilde{P}_2(v)$ - произвольные фазовые функции одномерных решеток.

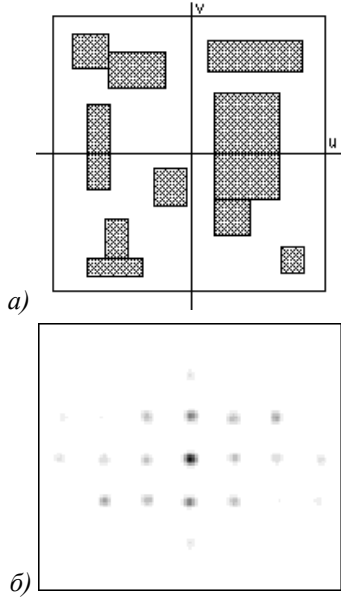


Рис. 1. а) Один период двумерной бинарной решетки. б) Отклик от произвольной бинарной решетки, описанный выражениями (4) и (5).

В разделе 3.2 приводятся примеры таких бинарных решеток, которые имеют меньшее число свободных параметров, так как в них области со скачком фазы представлены в виде полосы через весь период решетки. Соответственно и максимум дифракционной решетки, который можно достичь, оказывается ниже, чем у фазовой решетки с областями в виде прямоугольников, расположенных в произвольных местах. Общий случай функции одного периода такой бинарной решетки представляется в виде:

$$\tilde{P}(u, v) = e^{j\varphi_2} \text{rec}(u, v) + [e^{j\varphi_1} - e^{j\varphi_2}] * \sum_{k=1}^K \text{rec} \left[\frac{u - (u_{k,2} + u_{k,1})/2}{u_{k,2} - u_{k,1}}, \frac{v - (v_{k,2} + v_{k,1})/2}{v_{k,2} - v_{k,1}} \right] \quad (4)$$

где K это число прямоугольных областей со скачком фазы, а координаты $(u_{k,1}, v_{k,1})$, $(u_{k,1}, v_{k,2})$, $(u_{k,2}, v_{k,1})$ и $(u_{k,2}, v_{k,2})$ представляют углы k -ой области. Как показано на рис. 1, области могут стыковаться, образуя углы, но не могут пересекаться.

Упростим задачу, приняв $\varphi_1 = 0$, а $\varphi_2 = \pi$. Отклик решетки получим в виде:

$$\tilde{p}(n, m) = -\text{sinc}(n, m) + \frac{2}{\pi^2 nm} * \sum_{k=1}^K \sin[(u_{k,2} - u_{k,1})n\pi] \sin[(v_{k,2} - v_{k,1})m\pi] * \exp\{j\pi[(u_{k,2} + u_{k,1})n + (v_{k,2} + v_{k,1})m]\}. \quad (5)$$

Так как фазы решетки являются дополненными $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$, то функция отклика $\tilde{p}(n, m)$ является функцией Эрмита $\tilde{p}(n, m) = \tilde{p}^*(-n, -m)$.

1.2 Расчет фазовой функции

Для расчета расширим метод, использованный нами в статье [11] (раздел 2), на двумерный случай. Тогда связь отклика $|\tilde{p}(n, m)|^2$ с интенсивностью порядков $|q(n, m)|^2$:

$$|\tilde{p}(n, m)|^2 = |q(n, m)|^2 \alpha \quad (6)$$

Дифракционная эффективность будет представлена в виде:

$$\eta = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M |\tilde{p}(n, m)|^2. \quad (7)$$

Введём также среднеквадратичную относительную (СКО) ошибку выравнивания интенсивности порядков, как это сделано в [8], но для двумерного случая:

$$\delta = \frac{1}{\bar{I}} \left(\frac{1}{L} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M (I_{n,m} - \bar{I})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8a)$$

где

$$\bar{I} = \frac{1}{L} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M I_{n,m}, \quad L = (2N+1)(2M+1). \quad (8b)$$

Метод расчета основан на решении нелинейной системы алгебраических уравнений (5)+(6), связывающих координаты областей скачков фазы решетки и интенсивности порядков дифракции, которые задаются, а фазы получаются произвольными. Здесь неизвестными являются координаты областей решетки и масштабный коэффициент α . Число уравнений мы можем выбрать произвольным, но для удобства примем вид:

$$f(n, m) = p^2(n, m) - \alpha * q^2(n, m) = 0, \quad (9)$$

где $(n, m) \in \Omega$,

$$\Omega = \begin{cases} n = [-N, N], m = [1, N] \\ n = [0, N], m = 0 \end{cases}$$

Применим метод Ньютона [13] к нелинейной системе (9). В результате получим линейную систему:

$$S(\bar{u}^{i+1}, \bar{v}^{i+1}) = S(\bar{u}^i, \bar{v}^i) - f_n(\bar{v}^i, \bar{u}^i, \alpha^i) \quad (10)$$

где

$$S(\bar{u}^i, \bar{v}^i, i) = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{l=1}^2 \frac{\partial f_{n,m}}{\partial u_{k,l}} u_{k,l}^i + \sum_{l=1}^2 \frac{\partial f_{n,m}}{\partial v_{k,l}} v_{k,l}^i \right) + \frac{\partial f_{n,m}}{\partial \alpha} \alpha^i, \quad (11)$$

$$(n, m) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -q^2(n, m),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_{k,1}} &= -4(v_{k,2} - v_{k,1})\text{sinc}[(v_{k,2} - v_{k,1})m](p\text{recos}\{\tau[2u_{k,1}n + \\ &+ (v_{k,2} + v_{k,1})m]\} + p\text{imsin}\{\tau[2u_{k,1}n + (v_{k,2} + v_{k,1})m]\}) \\ \frac{\partial f}{\partial u_{k,2}} &= 4(v_{k,2} - v_{k,1})\text{sinc}[(v_{k,2} - v_{k,1})m](p\text{recos}\{\tau[2u_{k,2}n + \\ &+ (v_{k,2} + v_{k,1})m]\} + p\text{imsin}\{\tau[2u_{k,2}n + (v_{k,2} + v_{k,1})m]\}) \\ \frac{\partial f}{\partial v_{k,1}} &= -4(u_{k,2} - u_{k,1})\text{sinc}[(u_{k,2} - u_{k,1})n](p\text{recos}\{\tau[(u_{k,2} + \\ &+ u_{k,1})n + 2v_{k,1}m]\} + p\text{imsin}\{\tau[(u_{k,2} + u_{k,1})n + 2v_{k,1}m]\}) \\ \frac{\partial f}{\partial v_{k,2}} &= 4(u_{k,2} - u_{k,1})\text{sinc}[(u_{k,2} - u_{k,1})n](p\text{recos}\{\tau[(u_{k,2} + \\ &+ u_{k,1})n + 2v_{k,2}m]\} + p\text{imsin}\{\tau[(u_{k,2} + u_{k,1})n + 2v_{k,2}m]\}) \end{aligned}$$

Для решения линейной системы использовался гибридный градиентного метода градиента в варианте Флетчера-Ривза [14] и метода итерационного уточнения корней. Это позволяет снять зависимость числа уравнений от числа неизвестных. При решении методом Гаусса эти числа равны.

2. Численные результаты

2.1 Одномерные решетки

В работе были исследованы одномерные бинарные решетки, полученные в результате расчетов в предыдущей статье [11]. Для этого был проведен численный эксперимент. На 4 периода фазовой функции одного периода решетки подавалась единичная плоская волна, после чего бралось преобразование Фурье. Исходный массив выбирался размером 256×256 точек. Далее, чтобы обеспечить аперриодичность свертки и лучше рассмотреть дифракционные порядки, массив увеличивался в четыре раза добавлением нулей вокруг решетки. После преобразования Фурье в центре полученного распределения вырезался квадрат размером 256×256 точек. Ожидалось уменьшение дифракционной эффективности и увеличения СКО. Это должно было произойти вследствие добавления ошибки дискретизации при расчетах. Реальная фазовая решетка состоит из бесконечного числа периодов. В наших экспериментах брались только четыре периода, что также влияет на ошибку и эффективность. Теоретически от периодической бинарной решетки с бесконечным числом периодов в Фурье-плоскости должны получаться дельта-функции с заданной интенсивностью. Если брать конечное число периодов, дельта-функции вырождаются в синки, которые могут налагаться.

На рис. 2а приведен пример бинарной решетки для генерации три одинаковых дифракционных порядков. Серыми областями обозначаются области, на которых плоская волна испытывает скачок фазы на π . Распределение порядков после распределения

Фурье представлено на рис. 2б. Здесь видны три одинаковых порядка и два паразитных порядка меньшей интенсивности. Между дифракционными порядками заметны вторые и третьи максимумы синков. На рис. 2в показано теоретическое распределение интенсивности в дифракционных порядках. Два паразитных порядка появились ещё при расчете бинарной решетки. На полученном распределении найдены эффективность бинарной решетки и ошибка формирования порядков. Для расчета эффективности в каждом порядке выбиралась область, в которой сконцентрирована энергия порядка. Сумма энергии в области бралась за интенсивность порядка. Для расчета ошибки в каждом порядке выбиралась только точка максимум. Настоящий физический максимум мог и не попасть в эту точку, поэтому ошибка должна еще больше увеличиться. Практическая дифракционная эффективность оказалась меньше теоретической на 7% и появилась ошибка равная 0,93%.

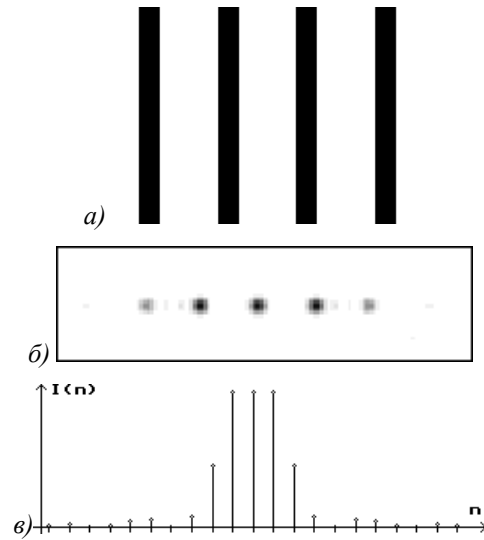
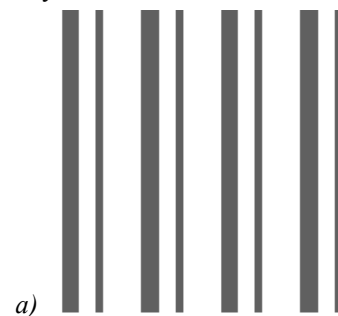


Рис. 2. а) Фазовый профиль 3-й порядковой бинарной решетки с двумя скачками на период, эффективность 66,42%, нулевая ошибка.

б) Распределение в Фурье плоскости, эффективность 59,37%, СКО 0,93%.

в) Теоретическое распределение интенсивности по дифракционным порядкам.

Аналогично была исследована фазовая решетка для 7 порядков рис. 3. Практическая дифракционная эффективность оказалась меньше теоретической на 4%, а ошибка увеличилась на 3%.



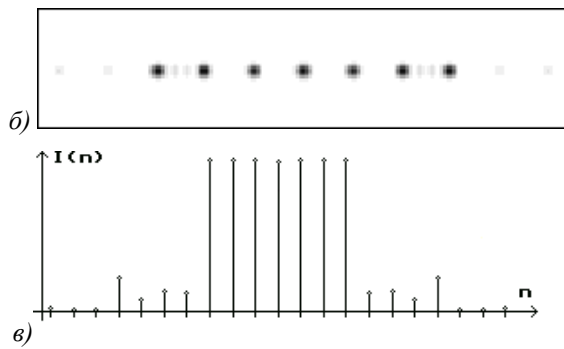


Рис. 3. а) Фазовый профиль семи порядковой бинарной решетки с четырьмя скачками на период, эффективность - 78,59%, СКО - 0,43%.
 б) Распределение в Фурье плоскости, эффективность - 74,18%, СКО - 4,18%.
 в) Теоретическое распределение интенсивности по дифракционным порядкам.

3.2 Двухмерные решетки на основе одномерных

Двухмерные фазовые решетки могут быть легко получены из одномерных. Для этого нужно перемножить фазовые функции двух одномерных решеток. При этом накладывается ряд ограничений на фазовую функцию двумерной решетки. Из двух одномерных бинарных решеток получается двумерная бинарная решетка. У такой решетки падает эффективность и возрастает ошибка. Так если взять одномерную решетку с эффективностью 66,42%, то у полученной двумерной решетки эффективность не может быть больше чем 44,12%.

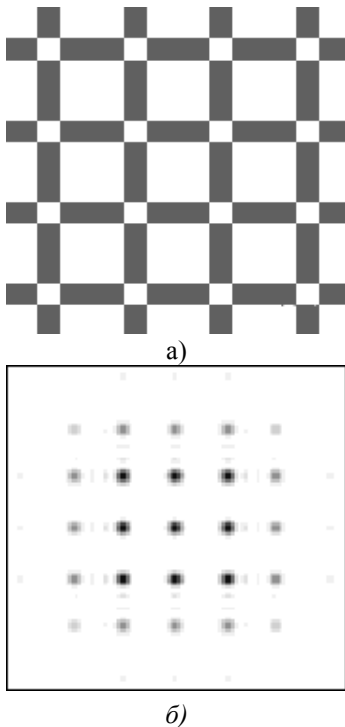


Рис. 4. а) Фазовый профиль двумерной девяти порядковой бинарной решетки.
 б) Распределение в Фурье плоскости, эффективность - 41,25%, СКО - 1,42%.

На рис. 4а приведен пример двумерной ре-

шетки, генерирующей девять одинаковых порядков. Она была получена из двух одинаковых одномерных фазовых решеток, поэтому получилась симметричная. Из-за этого она генерирует симметричное распределение интенсивностей. Этим методом можно получить различные фазовые решетки. Они могут генерировать различные двумерные распределения в зависимости от исходных решеток.

После преобразования Фурье рис. 4б была измерена эффективность - 41,25% и СКО - 1,42%, что и следовало ожидать. Теоретических значений мы не имеем. Аналогично была исследована фазовая решетка для сорока девяти порядков (рис. 5). Дифракционная эффективность оказалась - 54,33%, а ошибка - 5,94%.

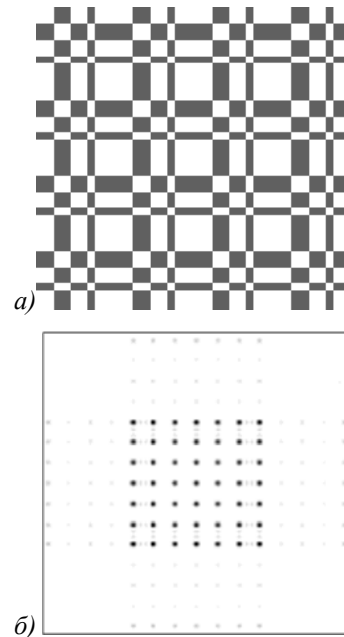


Рис. 5. а) Фазовый профиль двумерной сорока девяти порядковой бинарной решетки. б) Распределение в Фурье плоскости, эффективность - 54,33%, СКО - 5,94%.

2.3 Двухмерные решетки

Для расчета двумерных решеток применялся метод из [11], распространенный на двумерный случай. Начальное приближение выбиралось случайно. Двухмерные бинарные решетки имеют симметричное распределение интенсивностей дифракционных порядков.

Система нелинейных уравнений выбиралась соответственно. Если необходимо получить N порядков, используется только $(N-1)/2+1$ уравнение. Так для девяти порядков было взято пять уравнений. При решении выяснилось, что двух областей достаточно для формирования девяти одинаковых порядков. На рис. 6а представлено четыре периода полученной фазовой функции. Получается, что мы имеем $4*2+1=9$ неизвестных для пяти уравнений. Необходимо отметить, что на указанные неизвестные наложены ограничения, о которых говорилось выше.

При решении уравнений есть доля случайности. Выбор начального приближения случаен, а весь

итерационный процесс сильно зависит от него. После каждой итерации производилась проверка на физичность полученной решетки. Области фазовой функции одного периода решетки не могут пересекаться друг с другом и выходить за границу периода. Координаты области должны быть в порядке возрастания, то есть $u_{1,k} < u_{2,k}$, а $v_{1,k} < v_{2,k}$. Если одно из этих условий нарушается, итерационный шаг уменьшается. Если это не помогало, некоторые области выбирались случайно или разъединялись.

В предыдущих работах для одномерных решеток в систему уравнений так же включались уравнения для обнуления ненужных порядков. В двухмерном случае указанное действие отрицательно влияло на сходимость итерационного процесса.

В табл.1 приводятся координаты областей двухмерной решетки рис. 6а для генерации девяти одинаковых порядков. Теоретическая эффективность - 60,04%, а СКО - 0,02%. Практическая эффективность распределения в Фурье-плоскости - 57,39%, а СКО - 0,45%. Сравним эту двухмерную решетку с решеткой из раздела 3.2. Эффективность больше на 16%, а ошибка меньше на 1%. При этом она проще в изготовлении. На одном периоде здесь две области, не имеющие точек соприкосновения. На фазовой решетке (из раздела 3.2) четыре области, и они соприкасаются друг с другом углами областей, что характерно для этого метода получения двухмерной фазовой решетки.

Таблица 1. Координаты областей двухмерной фазовой бинарной решетки, генерирующей девяти одинаковых дифракционных порядков.

k	$u_{1,k}$	$u_{2,k}$	$v_{1,k}$	$v_{2,k}$
1	0,1073	0,3926	0,0198	0,0198
2	-0,4854	-0,0145	-0,4674	0,1544

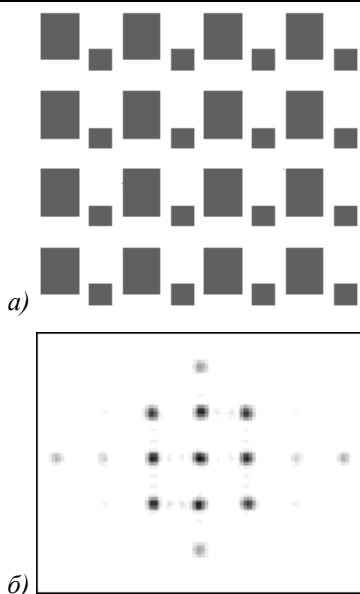


Рис. 6. а) Фазовый профиль двухмерной 9 порядковой бинарной решетки, эффективность 60,04%, СКО 0,02%. б) Распределение в Фурье плоскости, эффективность - 57,39%, 0,45 - СКО%.

В табл.2 приводятся координаты областей двухмерной решетки рис. 7а для генерации двадцати пяти одинаковых порядков. Теоретическая эффективность полученной фазовой решетки - 63,82%, а СКО - 5,43%. Практическая эффективность распределения в Фурье-плоскости - 60,12%, а СКО - 6,67%. Как и в предыдущем примере, на одном периоде здесь меньше областей, места соприкосновений здесь имеют некоторую протяженность. На фазовой решетке (из раздела 3.2) области соприкасаются в одной точке.

Таким образом, двухмерные фазовые решетки, рассчитанные данным методом, значительно выигрывают при изготовлении от решеток, сформированных из одномерных.

Таблица 2. Координаты областей двухмерной фазовой бинарной решетки, генерирующей двадцать пять одинаковых дифракционных порядков.

k	$u_{1,k}$	k_1	$v_{1,k}$	$v_{2,k}$
1	0,1963	0,5	-0,0926	0,1262
2	-0,5	-0,2264	-0,3397	-0,0331
3	-0,3420	-0,0204	0,0420	0,2694
4	-0,0136	0,2544	0,1344	0,4738
5	-0,0881	0,2416	-0,4397	-0,1359

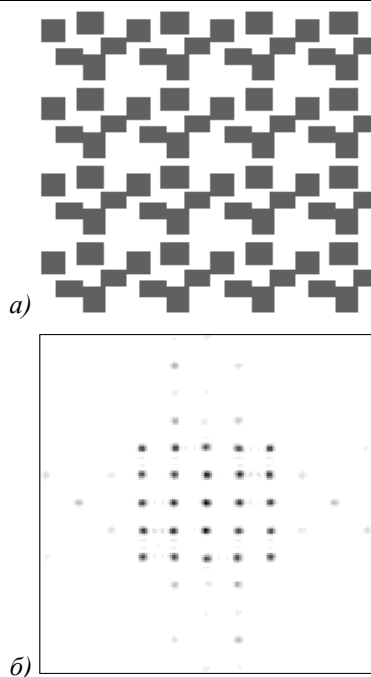


Рис. 7. а) Фазовый профиль двухмерной двадцати пяти порядковой бинарной решетки, эффективность - 63,82%, СКО - 5,43%, б) Распределение в Фурье-плоскости, эффективность - 60,12 %, СКО - 6,67%.

Заключение

Получение двухмерной бинарной решетки из одномерных решеток представляет собой простую задачу. Рассчитать одномерные решетки проще, чем двухмерные. При этом заранее накладываются ограничения, как на саму решетку, так и на распределение интенсивностей дифракционных порядков. Так-

же дифракционная эффективность такой фазовой решетки не может быть больше, чем произведение эффективностей исходных одномерных решеток. Таким образом, только прямым расчетом двухмерной бинарной решетки можно добиться высокой эффективности и получить сложное распределение интенсивностей порядков.

Благодарность

Работа частично финансировалась Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 99-01-39012, 00-15-96114, 00-01-00031).

Литература

1. Krackhardt U., Mait J.N., Streibl N. Upper bound on the diffraction efficiency of phase-only fanout elements // *Appl.Opt.*. 1992. V. 31, N 1. P. 27-37.
2. Feldman M.R., Guest C.C. High efficiency hologram encoding for generation of spot arrays // *Opt.Lett.*. 1989. V. 14, N 10. P. 479-481.
3. Бобров С.Е., Туркевич Ю.Г. Многопорядковые дифракционные решетки с несимметричным профилем периода // *Компьютерная оптика, М., МЦНТИ*, 1989. В. 4. С. 38-45.
4. Krackhardt U., Streibl N. Design of Dammann-gratings for array generation // *Opt. Commun.*. 1989. V. 74. P. 31-34.
5. Mait J.N. Design of binary-phase and multiphase Fourier gratings for array generation // *J.Opt.Soc. Am. A*, 1990. V. 7, N 8. P. 1514-1528.
6. Березный А.Е., Комаров С.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Фазовые дифракционные решетки с заданными параметрами. Об одной обратной задаче оптики // *Доклады АН СССР*. 1986. Т. 287, N 3. С. 623-627.
7. Досколович Л.Л., Котляр В.В., Сойфер В.А. Фазовые дифракционные решетки с заданным распределением интенсивности по порядкам // *Письма в ЖТФ*. 1991. Т. 17, N 21. С. 54-57.
8. Doskolovich L.L., Soifer V.A., Alessandretti G., Perlo P., Repetto M. Analytical initial approximation for multiover binary gratings design // *Pure and Appl.Opt.*, 1994, v.3, p.921-930
9. Zhou C., Linen L. Numerical study of Dammann array illuminators // *Appl. Opt.*. 1995. V. 34, N 26. P. 5961-5969.
10. Глотов П.А., Котляр В.В. Расчет четной симметричной бинарной решетки для генерации заданного набора дифракционных порядков // *Компьютерная оптика, Самара-Москва*. 1999. № 19. С. 74-79.
11. Glotov P.A., Kotlyar V.V. Designing a binary grating for the production of a desired set of diffraction orders // *Optical memory & neural networks*. 1999. V. 8, N. 4. P. 243-254.
12. Dammann H., Gortler K. High-efficiency in-line multiple imaging by means of multiple phase holograms // *Opt.Commun.*. 1971. V. 3. P. 312-315.
13. Карманов В.Г. Математическое программирование // *М.. Наука*. 1986.
14. Mait J.N. Array generators // (*Microoptics*, H.-P. Herzig ed., Chapter 12), Taylor & Frenchis, London, 1996.