РАСЧЕТ ХОДА ПСЕВДОЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ЛИНЗЫ, СТРУКТУРА КОТОРЫХ ВЫПОЛНЕНА НА АСФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Г. И. Грейсух[1], Е. Г. Ежов[2]; С. А. Степанов[1]

[1]Государственная архитектурно-строительная академия, г. Пенза

[2]Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

Методика расчета хода псевдолучей через оптические системы, включающие радиально-градиентные и дифракционные линзы, распространена на системы с дифракционными линзами, структура которых выполнена на асферической поверхности.

Введение

В работах [1-3] описана методика и приведены формулы расчета хода псевдолучей лучей (то есть лучей, траектории которых рассчитываются в приближении заданного порядка малости) через вращательно-симметричные оптические системы, содержащие радиально-градиентные элементы и дифракционные линзы (ДЛ), структура которых выполнена на плоской поверхности. В работе [4] указанная методика распространена на случай включения в систему ДЛ, структура которых размещена на сферической поверхности. Данная работа направлена на дальнейшее развитие методики и обобщение ее на оптические системы, содержащие. ДЛ, структура которых выполнена на асферической поверхности.

Расчет хода псевдолуча через такие ДЛ, включает две задачи: прослеживание хода псевдолуча через среду, которая в общем случае может быть ограничена двумя асферическими поверхностями, и определение параметров псевдолуча, дифрагировавшего на структуре ДЛ. Ниже получены формулы расчета, позволяющие решать обе эти задачи.

1. Расчет хода псевдолуча через однородную среду, ограниченную асферическими поверхностями

Ход луча будем описывать в декартовой системе координат, ось Z которой совпадает с оптической осью. Высоту и наклон луча определим с помощью векторов $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$; при этом вектор $\boldsymbol{\rho}$ имеет составляющие $[x(z), y(z), 0]$, а вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ - составляющие $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, 0)$, где ε_x и ε_y - направляющие тангенсы луча, связанные с его направляющими косинусами соотношениями $\varepsilon_x = \alpha_x / \alpha_z$ и $\varepsilon_y = \alpha_y / \alpha_z$.

При распространении луча между k и $(k+1)$ асферическими поверхностями оптической системы луч на входе в среду зададим векторами $\boldsymbol{\rho}_k$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_k$, а на выходе из среды - векторами $\boldsymbol{\rho}_{k+1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}$. Если $z_{k,k+1}$ есть расстояние вдоль оси Z от точки входа луча в однородную среду до точки его выхода, то очевидно, что векторы $\boldsymbol{\rho}_k$, $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ и $\boldsymbol{\rho}_{k+1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}$ связаны между собой уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{k+1} &= \boldsymbol{\rho}_k + z_{k,k+1}\boldsymbol{\varepsilon}_k \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_k \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Пусть d_k - расстояние между вершинами k и $(k+1)$ поверхностей. Тогда

$$z_{k,k+1} = d_k + z_{k+1} - z_k \ , \qquad (2)$$

где z_k - координата точки пересечения луча с k поверхностью в системе координат, связанной с вершиной этой поверхности и, аналогично, z_{k+1} - координата точки пересечения луча с $(k+1)$ поверхностью в системе координат, связанной с вершиной $(k+1)$ поверхности.

Уравнение асферической поверхности в системе координат с началом в вершине этой поверхности запишем в виде

$$F(\rho, z) = cz - 1 + \sqrt{1-(c\rho)^2} - \frac{1}{8}\sigma_3 (c\rho)^4 - \\ - \frac{1}{16}\sigma_5 (c\rho)^6 - ... = 0 \ , \qquad (3)$$

где c - кривизна поверхности в ее вершине, σ_3, σ_5, … - коэффициенты асферической деформации поверхности.

Тогда координаты z_k и z_{k+1} можно определить из выражений

$$\left.\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{c_k}\Big[1 - \sqrt{1-(c_k\rho_k)^2} + \\ &+ \frac{1}{8}\sigma_{3,k}(c_k\rho_k)^4 + \\ &+ \frac{1}{16}\sigma_{5,k}(c_k\rho_k)^6 + ...\Big] \\ z_{k+1} &= \frac{1}{c_{k+1}}\Big[1 - \sqrt{1-(c_{k+1}\rho_{k+1})^2} + \\ &+ \frac{1}{8}\sigma_{3,k+1}(c_{k+1}\rho_{k+1})^4 + \\ &+ \frac{1}{16}\sigma_{5,k+1}(c_{k+1}\rho_{k+1})^6 + ...\Big] \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Уравнения (1), (2) и (4) являются основой для получения формул расчета хода псевдолуча через однородную среду, ограниченную асферическими поверхностями. При их выводе в качестве первого шага представим векторы $\boldsymbol{\rho}_k$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ в виде сумм слагаемых первого, третьего и пятого порядков малости относительно модулей векторов, определяющих высоту и наклон луча во входном зрачке оптической системы:

$$\left.\begin{aligned}\rho_k &= \rho_k^{(1)} + \rho_k^{(3)} + \rho_k^{(5)} + \dots\\ \varepsilon_k &= \varepsilon_k^{(1)} + \varepsilon_k^{(3)} + \varepsilon_k^{(5)} + \dots\end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где $\rho_k^{(1)}$, $\rho_k^{(3)}$ и $\rho_k^{(5)}$ - составляющие первого, третьего и пятого порядков малости вектора, определяющего положение луча. Обозначения $\varepsilon_k^{(1)} - \varepsilon_k^{(5)}$ имеют аналогичный смысл для вектора, определяющего наклон луча.

Из (2), (4) и (5) нетрудно видеть, что расстояние $z_{k,k+1}$ можно представить в виде суммы членов нулевого и четных порядков малости:

$$z_{k,k+1} = z_{k,k+1}^{(0)} + z_{k,k+1}^{(2)} + z_{k,k+1}^{(4)} + \dots \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в первое из уравнений (1), получим, что на выходе из среды

$$\rho_{k+1} = \rho_{k+1}^{(1)} + \rho_{k+1}^{(3)} + \rho_{k+1}^{(5)} + \dots , \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\rho_{k+1}^{(1)} &= \rho_k^{(1)} + z_{k,k+1}^{(0)}\varepsilon_k^{(1)}\\ \rho_{k+1}^{(3)} &= \rho_k^{(3)} + z_{k,k+1}^{(0)}\varepsilon_k^{(3)} + z_{k,k+1}^{(2)}\varepsilon_k^{(1)}\\ \rho_{k+1}^{(5)} &= \rho_k^{(5)} + z_{k,k+1}^{(0)}\varepsilon_k^{(5)} + z_{k,k+1}^{(2)}\varepsilon_k^{(3)} +\\ &\quad + z_{k,k+1}^{(4)}\varepsilon_k^{(1)}\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Для того чтобы найти слагаемые различных порядков малости расстояния $z_{k,k+1}$, разложим уравнения (4) в степенные ряды, а результат разложения подставим в (2). При этом воспользуемся уравнениями (7) и (8), введем три инварианта вращения

$$e_1 = \varepsilon_k^2,\ e_2 = \varepsilon_k \cdot \rho_k,\ e_3 = \rho_k^2 \tag{9}$$

и, используя соотношения (5), представим эти инварианты в виде

$$\left.\begin{aligned}e_1 &= e_1^{(2)} + e_1^{(4)} + \dots\\ e_2 &= e_2^{(2)} + e_2^{(4)} + \dots\\ e_3 &= e_3^{(2)} + e_3^{(4)} + \dots\end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&e_1^{(2)} = \left[\varepsilon_k^{(1)}\right]^2, \quad e_1^{(4)} = 2\varepsilon_k^{(1)} \cdot \varepsilon_k^{(3)}\\ &e_2^{(2)} = \rho_k^{(1)} \cdot \varepsilon_k^{(1)},\\ &\qquad e_2^{(4)} = \rho_k^{(3)} \cdot \varepsilon_k^{(1)} + \rho_k^{(1)} \cdot \varepsilon_k^{(3)}\\ &e_3^{(2)} = \left[\rho_k^{(1)}\right]^2, \quad e_3^{(4)} = 2\rho_k^{(1)} \cdot \rho_k^{(3)}\end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

В результате получим

$$z_{k,k+1}^{(0)} = d_k , \tag{12}$$

$$\begin{aligned}z_{k,k+1}^{(2)} &= \frac{1}{2}\left(c_{k+1} - c_k\right) e_3^{(2)} +\\ &+ c_{k+1} d_k \left(e_2^{(2)} + \frac{1}{2} d_k e_1^{(2)}\right) ,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}z_{k,k+1}^{(4)} &= \frac{1}{2}\left(c_{k+1} - c_k\right) e_3^{(4)} +\\ &+ \frac{1}{8}\Big[\left(1 + \sigma_{3,k+1}\right) c_{k+1}^3 -\\ &- \left(1 + \sigma_{3,k}\right) c_k^3\Big]\left[e_3^{(2)}\right]^2 +\\ &+ c_{k+1}\left[d_k\left(e_2^{(4)} + \frac{1}{2} d_k e_1^{(4)}\right) +\right.\\ &\left.+ z_{k,k+1}^{(2)}\left(e_2^{(2)} + d_k e_1^{(2)}\right)\right] +\\ &+ \frac{1}{2}\left(1 + \sigma_{3,k+1}\right) d_k c_{k+1}^3 \left\{d_k \left[e_2^{(2)}\right]^2 +\right.\\ &+ \frac{1}{4} d_k^3 \left[e_1^{(2)}\right]^2 + \frac{1}{2} e_2^{(2)} e_3^{(2)} +\\ &\left.+ \frac{1}{2} d_k e_1^{(2)} e_3^{(2)} + e_1^{(2)} d_k^2 e_2^{(2)}\right\}.\end{aligned} \tag{14}$$

Уравнения (8), (11) и (12-14) позволяют по известным составляющим первого, третьего и пятого порядков малости параметров луча на входе в однородную среду вычислить соответствующие составляющие параметров луча на выходе из нее, то есть эти уравнения позволяют рассчитать ход псевдолуча пятого порядка через однородную среду, ограниченную двумя асферическими поверхностями оптической системы. При этом каждая из этих поверхностей может представлять собой как поверхность оптического элемента, так и любую другую поверхность, например поверхность предмета или изображения.

2. Расчет хода псевдолуча через дифракционные структуры, выполненные на асферической поверхности

Как уже отмечалось во введении, в работе [4] получены формулы расчета хода псевдолуча через ДЛ, структура которой выполнена на сферической поверхности. Распространение этих формул на асферическую поверхность требует лишь получения выражений для величин различных порядков малости единичного вектора нормали $\tilde{\mathbf{k}}$ к этой поверхности в точке падения луча, определяемой вектором ρ.

Единичный вектор нормали к асферической поверхности можно найти, воспользовавшись выражением [5]:

$$\tilde{\mathbf{k}} = \nabla F \Big/ \sqrt{(\nabla F)^2} . \tag{15}$$

Подставив (3) в (15), получим, что составляющие вектора $\tilde{\mathbf{k}}$ описываются соотношениями

$$\left.\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\tilde{k}_x\\ \tilde{k}_y\end{pmatrix} = -\Xi c \tilde{k}_z \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ &\tilde{k}_z = \left[1 + (\Xi c \rho)^2\right]^{-1/2}\end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

где

$$\Xi = \left[1-(c\rho)^2\right]^{-1/2} + \frac{1}{2}\sigma_3(c\rho)^2 + \\ + \frac{3}{8}\sigma_5(c\rho)^4 + \ldots \quad . \tag{17}$$

Для того чтобы представить составляющие k_x, k_y и k_z в виде сумм величин различных порядков малости, вновь используем один из трех инвариантов вращения

$$e_3 = \rho^2 = e_3^{(2)} + e_3^{(4)} + \ldots \ , \tag{18}$$

где

$$e_3^{(2)} = \left[\rho^{(1)}\right]^2, \quad e_3^{(4)} = 2\rho^{(1)} \cdot \rho^{(3)}. \tag{19}$$

Подставляя (18) в (16) и (17), а затем, раскладывая радикалы в ряд, получим

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{k}_x \\ \tilde{k}_y \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{k}_x^{(1)} \\ \tilde{k}_y^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{k}_x^{(3)} \\ \tilde{k}_y^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{k}_x^{(5)} \\ \tilde{k}_y^{(5)} \end{bmatrix} + \ldots \\ \tilde{k}_z &= 1 + \tilde{k}_z^{(2)} + \tilde{k}_z^{(4)} + \ldots \end{aligned}\right\}, \tag{20}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x^{(1)} \\ \tilde{k}_y^{(1)} \end{bmatrix} &= -c\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{k}_x^{(3)} \\ \tilde{k}_y^{(3)} \end{bmatrix} &= -c\left\{\begin{bmatrix} x^{(3)} \\ y^{(3)} \end{bmatrix} + \left(\Xi^{(2)} + \tilde{k}_z^{(2)}\right)\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix}\right\} \\ \begin{bmatrix} \tilde{k}_x^{(5)} \\ \tilde{k}_y^{(5)} \end{bmatrix} &= -c\left\{\begin{bmatrix} x^{(5)} \\ y^{(5)} \end{bmatrix} + \left(\Xi^{(2)} + \tilde{k}_z^{(2)}\right)\begin{bmatrix} x^{(3)} \\ y^{(3)} \end{bmatrix} + \right. \\ &\left. + \left(\Xi^{(4)} + \Xi^{(2)}\tilde{k}_z^{(2)} + \tilde{k}_z^{(4)}\right)\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix}\right\} \end{aligned}\right\}, \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{k}_z^{(2)} &= -\frac{1}{2}c^2 e_3^{(2)} \\ \tilde{k}_z^{(4)} &= -\frac{1}{2}c^2\left[e_3^{(4)} + 2\Xi^{(2)}e_3^{(2)}\right] + \frac{3}{8}c^4\left[e_3^{(2)}\right]^2 \end{aligned}\right\}, \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} \Xi^{(2)} &= \frac{1}{2}(1+\sigma_3)c^2 e_3^{(2)} \\ \Xi^{(4)} &= \frac{1}{2}(1+\sigma_3)c^2 e_3^{(4)} + \\ &+ \frac{3}{8}(1+\sigma_3)c^4\left[e_3^{(2)}\right]^2 \end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Соотношения (21-23) совместно с соответствующими формулами работы [4] позволяют произвести расчет хода псевдолуча через ДЛ, структура которой размещена на асферической подложке.

Литература

1. Степанов С.А., Грейсух Г.И. Расчет хода псевдолучей через оптические системы, включающие градиентные и дифракционные линзы // Опт. и спектр. 1996. Т.81, № 4. С. 698-701.
2. Степанов С.А., Грейсух Г.И. Компьютерный расчет оптических систем, в области аберраций высших порядков // Компьютерная оптика. М., МЦНТИ. 1996. В.16. С. 9-12.
3. G.I. Greisukh, S.T. Bobrov, S.A. Stepanov Optics of Diffractive and Gradient-Index Elements and Systems // Bellingham, WA: SPIE Press, 1997. 414 p.
4. Ежов Е.Г., Степанов С.А. Расчет хода псевдолучей через дифракционные структуры, выполненные на сферической поверхности // Компьютерная оптика. М., МЦНТИ. 2000. В. 20. С. 25-28.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике // М., Наука. 1977. 832 с.