

РАСЧЕТ СОСТАВНОГО ГРАДИЕНТНОГО ОПТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА, ФОРМИРУЮЩЕГО ЗАДАННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ

В.В. Котляр, А.С. Мелёхин
Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара
e-mail: ipsi@smr.ru

Аннотация

Рассматриваются аналитические выражения для расчета в рамках геометрической оптики показателя преломления двумерной среды, переводящей заданное амплитудно-фазовое распределение на входе в заданное амплитудно-фазовое распределение на выходе. Приведены примеры расчета составных ГОЭ для формирования некоторых заданных распределений интенсивности.

Введение

Впервые обратная задача в геометрической оптике неоднородных сред была поставлена и частично решена в [1, 2]. В [1] найдено аналитическое решение для двумерного волновода, периодически фокусирующего лучи, исходящие из осевой точки. В [2] по заданному двумерному семейству лучей в ГОЭ построено общее решение для показателя преломления, зависящее от некоторой произвольной функции. Однако это решение не учитывает физические ограничения.

В данной работе общее решение уточнено и обобщено для случая плоского входного фронта и фокусировки лучей в произвольной осевой точке. На основе аналитического решения рассмотрены составные ГОЭ, состоящие из отдельных зон удовлетворяющих полученному решению. Подобные ГОЭ могут быть использованы для формирования заданного распределения интенсивности в выходной плоскости.

1. Аналитическое решение

Запишем уравнение луча [3] в среде с показателем преломления n :

$$\frac{d}{dS} \left(\frac{d\vec{r}}{dS} n \right) = \nabla n. \quad (1)$$

Полагая, $x = x(z)$, $y = y(z)$, $dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ – малое расстояние вдоль луча, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dz} \frac{dn}{dz} - \frac{dn}{dx} \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right] + n \frac{d^2x}{dz^2} = 0 \\ \left(\frac{dy}{dz} \frac{dn}{dz} - \frac{dn}{dy} \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right] + n \frac{d^2y}{dz^2} = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

Рассмотрим среду с непрерывно меняющимся в направлении x показателем преломления $n(x)$. Предполагая среду бесконечно протяженной вдоль оси y , приходим к:

$$n \frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dn}{dx} \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 - \frac{dn}{dx} = 0, \quad (3)$$

или:

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} = \frac{d^2x/dz^2}{1 + (dx/dz)^2} \quad (4)$$

В работе [1] найдено решение для подобного уравнения в виде:

$$n(x) = \frac{n_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2} x\right)} \quad (5)$$

При этом уравнение семейства лучей примет вид:

$$x(z, v) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arsh} \left[\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} v \cdot \sin \frac{\pi}{2} z \right], \quad (6)$$

где v – параметр, определяющий конкретный луч.

Данное решение найдено для случая, когда в точке $z=0$ находится источник цилиндрической волны, при этом в точках $z=2k+1$, где $k \in \mathbb{N}$, все выходящие из источника лучи становятся параллельными, то есть фронт волны становится плоским, а в точках $z=2k$ все лучи вновь собираются в точке $x=0$ (рис. 1).

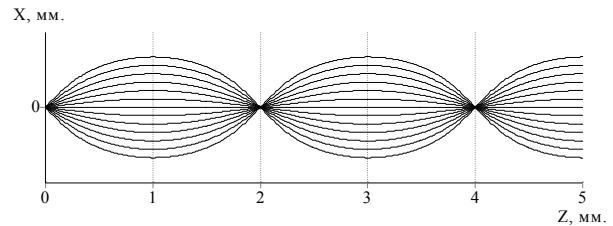


Рис. 1. Цилиндрический фронт. Сходимость в точках $z=2k$, $k \in \mathbb{N}$

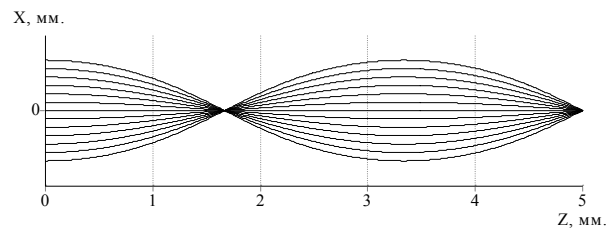


Рис. 2. Плоский фронт. Сходимость в точке $z=d$, $d=1,65$

Модифицируем это решение так, чтобы для случая плоского фронта в точке $z=0$ лучи сходились бы в некоторой точке $z=d$ (рис. 2). Тогда уравнения (5 и 6) следует переписать в виде:

$$n(x) = \frac{n_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2d} x\right)}, \quad (7)$$

$$x(z, v) = \frac{2d}{\pi} \operatorname{Arsh} \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{2d} v \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2d} z \right) \right]. \quad (8)$$

Очевидно, что при возрастании x значение $n(x)$ будет быстро убывать. В результате при некотором определенном значении x мы получим значение $n(x) < 1$, что физически некорректно.

Для устранения некорректности необходимо выражение (7) дополнить условием:

$$n(x) \geq n_{\min}. \quad (9)$$

С учетом последнего условия из выражения (7) можно получить следующее неравенство:

$$x_{\max} \leq \frac{2d}{\pi} \operatorname{Arch} \left[\frac{n_0}{n_{\min}} \right]. \quad (10)$$

Таким образом, мы получили выражение для апертуры реального оптического элемента при заданных величинах d , n_0 и n_{\min} .

2. Численное решение

Для численного решения уравнения (4) перепишем его в виде:

$$\left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right] \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} = \frac{d^2 x}{dz^2}. \quad (11)$$

Заметим, что для сходимости лучей на оси требуется, чтобы: $\frac{dn}{dx} < 0 \Rightarrow \frac{d^2 x}{dz^2} < 0$ – то есть все лучи сходятся к оси “выпукло” (рис. 1, 2).

Зададим сетку с узлами в точках $(x, z) = (kh, l\tau)$, где $h = \frac{x_{\max}}{N}$, $\tau = \frac{d}{M}$ – шаги сетки, $k = \overline{0, N}$, $l = \overline{0, M}$.

Запишем разностную схему:

$$\left[1 + \left(\frac{x_k^{l+1} - x_k^l}{\tau} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{n_k^l} \frac{n_k^l - n_{k-1}^l}{h} = \frac{x_k^{l-1} - 2x_k^l + x_k^{l+1}}{\tau^2}, \quad (12)$$

$$x_k^0 = x_k^1,$$

$$n_0^l = n_0(kh).$$

Для удобства записи переобозначим:

$$\frac{1}{n_k^l} \frac{n_k^l - n_{k-1}^l}{h} \equiv A_k, \quad (13)$$

Заметим, что $A_k < 0$, так как $n_k^l > n_{k-1}^l$, для сходимости лучей на оси $x=0$. Тогда:

$$A_k \cdot (x_k^{l+1})^2 - (2A_k x_k^l + 1) \cdot x_k^{l+1} + \left(A_k \tau^2 + A_k (x_k^l)^2 + 2x_k^l - x_k^{l-1} \right) = 0. \quad (14)$$

Введем обозначения:

$$a \equiv A_k,$$

$$b \equiv 2A_k x_k^l + 1, \quad (15)$$

$$c \equiv A_k \tau^2 + A_k (x_k^l)^2 + 2x_k^l - x_k^{l-1}.$$

Тогда:

$$a \cdot (x_k^{l+1})^2 - b \cdot x_k^{l+1} + c = 0. \quad (16)$$

При этом необходимо выполнение условия:

$$D \equiv b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0. \quad (17)$$

Проведя несложные преобразования, учитывая, что величина $A_k < 0$, а также выбирая единственный корень из соображений направления луча, можно получить:

$$x_k^{l+1} = x_k^l - \frac{1}{2|A_k|} + \frac{\sqrt{1 - 4A_k^2 \tau^2 - 4|A_k|(x_k^{l-1} - x_k^l)}}{2|A_k|}, \quad (18)$$

и

$$4A_k^2 \tau^2 + 4|A_k|(x_k^{l-1} - x_k^l) < 1. \quad (19)$$

Из уравнения (18) следует, что при начальном условии $x_k^0 = x_k^1$ (плоский фронт волны на входе): $x_k^2 < x_k^1$. И далее следует, что при $\forall l$ будет выполняться неравенство:

$$0 < x_k^{l+1} < x_k^l \quad (20)$$

Следует заметить, что величину A_k с учетом выражения (7) можно определить и в аналитическом виде, а именно:

$$A_k(x) = -\frac{\pi}{2d} \operatorname{th} \left[\frac{\pi}{2d} x \right]. \quad (21)$$

3. Численное моделирование

Для исследования хода лучей внутри рассматриваемой среды было разработано программное обеспечение, реализующее численное решение (18). На рис. 3 показан ход лучей с различными начальными координатами на входе (соответственно 1, 2 и 3 мм). Параметры расчета: ширина элемента $x_{\max} = 3$ мм, расстояние до точки схождения лучей $d = 3,1$ мм, минимальный и максимальный коэффициенты преломления соответственно $n_{\min} = 1$ и $n_0 = 2,5$; количество отсчетов: по вертикали – 100, по горизонтали – 1000.

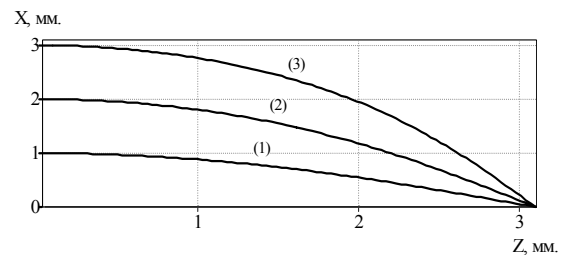


Рис. 3. Рассчитанный ход для лучей с координатами на входе: 1 мм (1); 2 мм (2); 3 мм (3).

Для экспериментального подтверждения сходимости численного решения (18) были проведены различные исследования поведения ошибки ε . На рис. 4 для соответствующих лучей показаны зависимости СКО от изменения количества отсчетов по горизонтальной оси z (то есть от измельчения шага τ) при фиксированном количестве отсчетов по оси x . Данная ошибка показывает отклонение хода лучей рассчитанных по численной схеме (18) от аналитического решения (8). На рис. 5 показаны зависимости СКО при одновременном изменении количества отсчетов по осям x и z , при этом

сохраняется соотношение: $\chi \equiv \tau/h = \text{const}$. Приведенные графики демонстрируют хорошую устойчивость полученного решения.

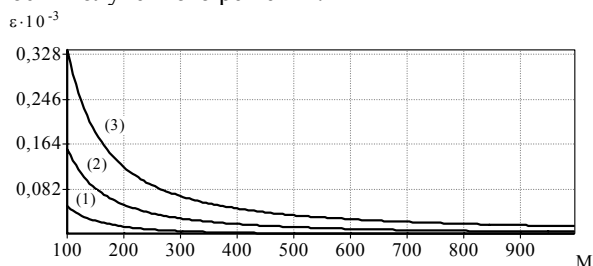


Рис. 4. Исследование зависимости ошибки от количества разбиений по оси z для лучей с координатами на входе: 1 мм (1); 2 мм (2); 3 мм (3).

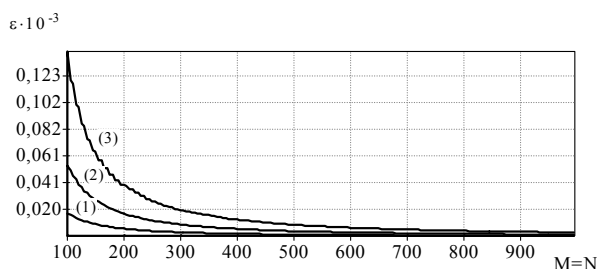


Рис. 5. Исследование зависимости ошибки от количества разбиений по осям x и z , при $\chi \equiv \tau/h = \text{const}$ для лучей с координатами на входе: 1 мм (1); 2 мм (2); 3 мм (3).

Также было проведено исследование распределения интенсивности по вертикальной оси x на различных расстояния от входной плоскости $z=0$. На рис. 5 показаны профили интенсивности в точках $z = 2,9$ мм (1); $z = 3,0$ мм (2); $z = 3,05$ мм (3). Параметры расчета совпадают с параметрами предыдущих экспериментов (то есть общее число лучей во входной плоскости равно 100).

Кол-во лучей

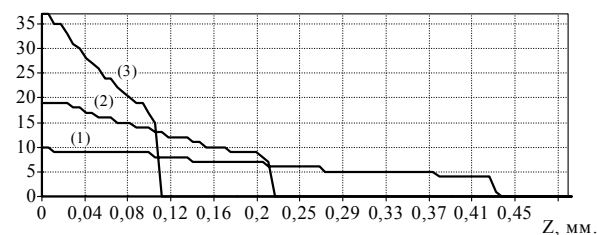


Рис. 6. Исследование профиля интенсивности в точках: $z = 2,9$ мм (1); 3,0 мм (2); 3,05 мм (3).

4. Расчет ГОЭ для фокусировки в заданное распределение интенсивности

Для расчета ГОЭ, фокусирующего лучи в заданное распределение интенсивности в выходной плоскости, можно разбить элемент на зоны, число которых будет соответствовать количеству отсчетов в выходной плоскости. Внутри каждой такой зоны (рис. 7) лучи будут идти в соответствии с уравнением (8). В подобном составном ГОЭ коэффициент преломления n уже будет зависеть от переменных x и z , то есть $n \equiv n(x, z)$, но внутри зон он будет удовлетворять выражению (7).

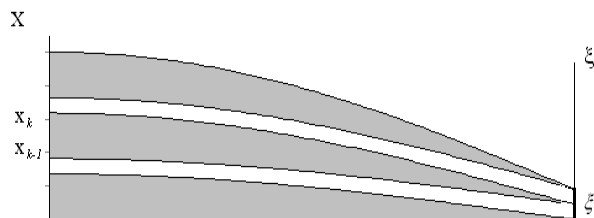


Рис. 7. Разбиение составного ГОЭ на зоны.

Число лучей $N_1 - N_M$, где M – количество отсчетов на входе, которые должны придти в конкретный отсчет выходной плоскости (“ширина” зоны), можно итеративно определить в соответствии с заданным распределением интенсивности $I_B(\xi)$ на выходе по следующим формулам:

$$I_B(\xi_p) \cong \sum_{k=N_{p-1}+1}^{N_p} I_0(x_k), \quad p = \overline{1, M}, \quad N_0 = 0, \quad (22)$$

где x_k, ξ_p – координаты точек во входной и выходной плоскостях, $N_p - N_{p-1}$ – число лучей пришедших в точку (отсчет) ξ_p , $\sum_{p=1}^M N_p = N$ – общее число лучей.

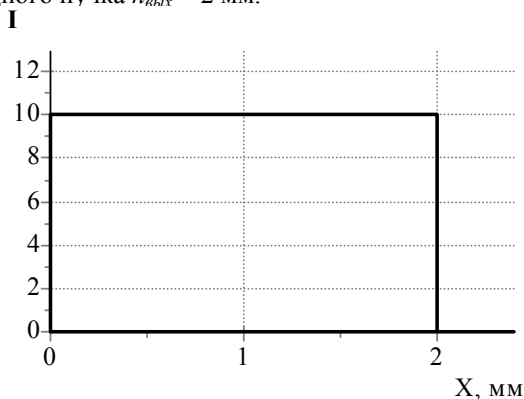
Очевидно, что в результате дискретизации в некоторых отсчетах суммарная интенсивность окажется несколько больше требуемого значения, в других – меньше, однако необходимым является выполнение равенства:

$$\sum_{k=1}^M I_B(\xi_k) = \sum_{k=1}^N I_0(x_k), \quad (23)$$

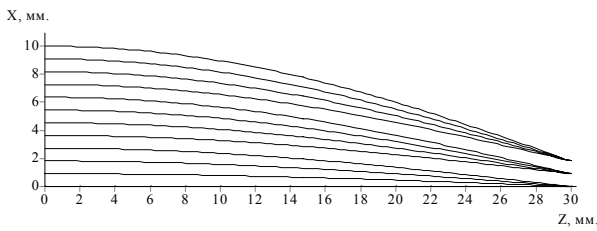
Здесь и далее предполагаем, что $\Delta x = \Delta \xi$ – шаг сетки на входе и выходе одинаковы.

Для иллюстрации метода на рис. 8-10 приведены примеры расчета ГОЭ формирующих различные распределения интенсивности в выходной плоскости. На рис. 8а, 8б, 8с показаны профили интенсивности формируемые элементами; на рис. 9а, 9б, 9с показан ход лучей в зонах соответствующих элементов; на рис. 10а, 10б, 10с показан коэффициент преломления элементов на расстоянии $l=10$ мм от входной плоскости.

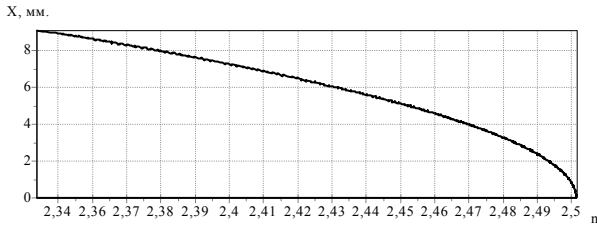
Параметры расчета: ширина элемента $H_{ex} = 10$ мм, длина элемента $L = 30$ мм, ширина выходного пучка $h_{вых} = 2$ мм.



а)



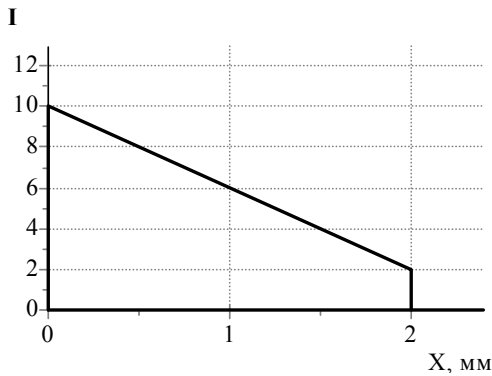
б)



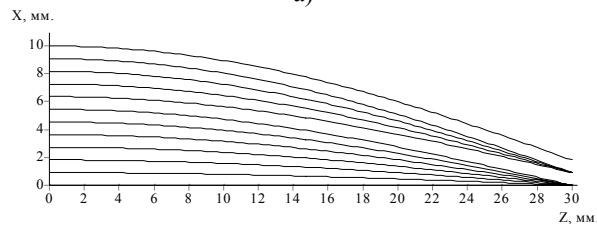
в)

Рис. 8. Исследование составного ГОЭ, формирующего равномерное распределение интенсивности:

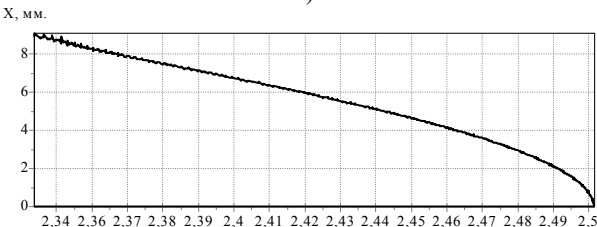
- а) распределение интенсивности в выходной плоскости; б) ход лучей в зонах (всего 12 лучей); в) показатель преломления n на расстоянии $l=10$ мм от входной плоскости.



а)



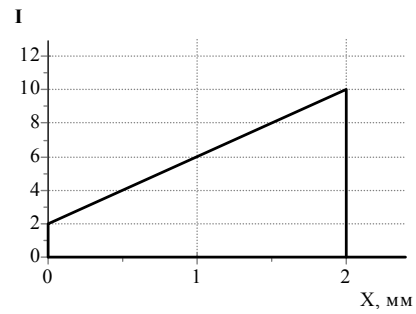
б)



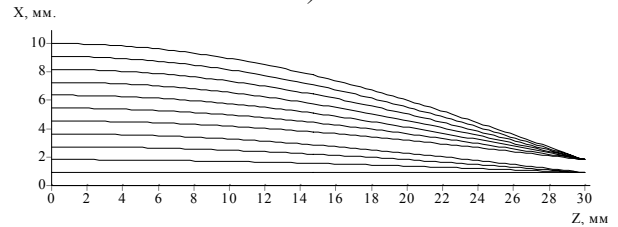
в)

Рис. 9. Исследование составного ГО, формирующего линейно убывающее к краю элемента распределение интенсивности:

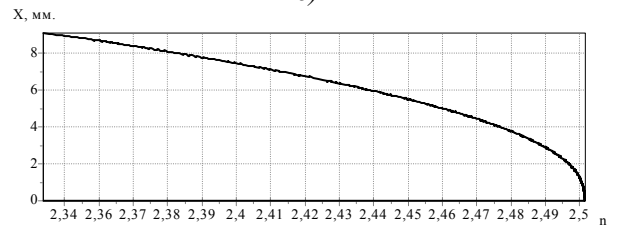
- а) распределение интенсивности в выходной плоскости; б) ход лучей в зонах (всего 12 лучей); в) показатель преломления n на расстоянии $l=10$ мм от входной плоскости.



а)



б)



в)

- Рис. 10. Исследование составного ГОЭ, формирующего линейно возрастающее к краю элемента распределение интенсивности: а) распределение интенсивности в выходной плоскости; б) ход лучей в зонах (всего 12 лучей); в) показатель преломления n на расстоянии $l=10$ мм от входной плоскости.

Заключение

Получены следующие результаты:

- получено ограничение на апертуру ГОЭ, фокусирующего плоский пучок в точку;
- обобщено решение для случая плоского входного фронта и фокусировки лучей в произвольной осевой точке;
- проведено численное моделирование и исследована зависимость СКО от изменения параметров разностной схемы, для расчета лучей в ГОЭ, показатель преломления которого зависит от одной поперечной переменной;
- предложен метод расчета составных ГОЭ, формирующих заданное распределение интенсивности в выходной плоскости.

Литература

1. Микаэлян А.Л. Прямые среды для фокусирования волн // Доклады академии наук СССР. 1951. Том LXXXI. С. 569–571.
2. Микаэлян А.Л. Общий метод определения параметров неоднородных сред по заданным траекториям лучей // Доклады академии наук СССР. 1952. Том LXXXIII. С. 219–220.
3. G.I. Greishuk, S.T. Bobrov, S.A. Stepanov Optics of diffractive and gradient-index elements and systems // SPIE Press, Bellington. 1997.