

# СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ФАЗЫ РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ДОЭ

В.С. Павельев

Институт систем обработки изображений РАН

## Аннотация

С ростом производительности вычислительной техники широкое распространение приобрел итерационный расчет дифракционных оптических элементов (ДОЭ). Хорошо известные процедуры поиска (процедуры типа Фьенапа и градиентные процедуры) принципиально не обладают сходимостью к глобальному экстремуму. Если решение прямой задачи не требует больших вычислительных затрат (например, в случае радиально-симметричного ДОЭ) целесообразно применение стохастических алгоритмов для глобальной оптимизации фазы ДОЭ. В данной работе рассматривается применение известной генетической процедуры нахождения экстремума функции многих переменных к расчету бинарных ДОЭ, обладающих радиальной симметрией. Радиально-симметричный характер фазы ДОЭ позволил эффективно проводить расчет на обычном персональном компьютере. Приведены результаты численных и натуральных экспериментов.

## 1. Введение

Появление компьютерного проектирования ДОЭ и современных микролитрографических технологий открыло новые широкие возможности для расчета и изготовления оптических элементов, обладающих возможностями, недостижимыми в рамках классической оптики. Каждое конкретное приложение оптических элементов налагает собственные специфические ограничения на решение задачи синтеза ДОЭ. С ростом производительности вычислительной техники широкое распространение приобрел итерационный расчет фазовых ДОЭ. Хорошо известные процедуры «детерминированного» поиска (процедуры типа Фьенапа [1,2] и градиентные процедуры [3]) не позволяют полностью избавиться от погрешности восстановления, вызванной заменой амплитудного распределения спектра восстанавливаемого изображения на амплитудное распределение в сечении освещающего пучка. Как правило, итерационная процедура хорошо уменьшает ошибку восстановления лишь на начальном этапе, затем наступает фаза стагнации, когда увеличение числа итераций не приводит к ощутимому улучшению качественных характеристик восстановления изображения. Это объясняется как отсутствием точного решения обратной задачи теории дифракции в большинстве случаев, так и принципиальным отсутствием сходимости указанных процедур. Если решение прямой задачи не требует больших вычислительных затрат (например, если формируемое распределение и освещающий пучок обладают радиальной симметрией), или в случае наличия высокопроизводительной вычислительной техники целесообразно применение стохастических алгоритмов для глобальной оптимизации фазы ДОЭ. Другим существенным достоинством стохастического подхода к расчету ДОЭ является то, что поиск фазовой функции ДОЭ может осуществляться непосредственно над множеством технологически реализуемых функций, что дает возможность избежать погрешностей, связанных с технологической реализацией рассчитанных ДОЭ или, как минимум, минимизировать их влияние. К систематическим технологическим погрешностям можно отнести погрешность

квантования фазы при изготовлении элемента ступенным литографическим травлением [4], что как показано в [4], приводит к погрешностям формирования изображения, особенно в случае малого числа уровней квантования фазовой функции.

Отметим, что если в случае использования методов поиска [1,3] расчет квантованных ДОЭ с малым числом уровней квантования требует дополнительных усложненных модификаций процедуры расчета [3], то для стохастического расчета организация поиска решения среди функций с заданным малым числом уровней квантования значительно уменьшает мощность множества допустимых решений, а следовательно, снижает вычислительные затраты. В предлагаемой статье рассматривается стохастическая оптимизация радиально-симметричного бинарного ДОЭ, основанная на известной генетической процедуре нахождения экстремума функции многих переменных, описанной, например, в [5].

## 2. Оптимизация фазы радиально-симметричного ДОЭ с помощью генетического алгоритма

В работах [5,6] рассматривается применение различных стохастических процедур к расчету ДОЭ. В частности, рассматривается применение генетических алгоритмов оптимизации функции многих переменных.

Генетический алгоритм (ГА) – это итерационный стохастический процесс, который работает с набором “индивидов” (популяцией). Каждый индивид представляет собой потенциальное решение задачи. В случае расчета ДОЭ в качестве отдельного индивида может выступать фазовая функция ДОЭ  $\varphi(r) \in [0, 2\pi]$ , такого вида, что соответствующий микрорельеф

$$h(r) = \varphi(r)\lambda / (2\pi(n-1)), \quad (1)$$

где  $n$  - показатель преломления материала,  $\lambda$  - длина волны излучения, реализуем с помощью имеющихся в наличии исследователя технологических возможностей. Например, в случае наличия технологии изготовления бинарных (двухуровневых) элементов в качестве индивидов целесообразно рассматривать

фазовые функции, принимающие в каждой точке одно из двух значений – 0 или  $\pi$ .

Перед началом работы алгоритма популяция генерируется случайным образом. Затем каждому индивиду присваивается, при помощи некоторой “оценивающей” (целевой) функции, мера ценности индивида в отношении рассматриваемой задачи. Это значение – количественная информация, которую алгоритм использует для направления поиска. Конкретный вид целевой функции в нашем случае определяется приложением ДОЭ. На каждой итерации алгоритма численность популяции искусственно увеличивается за счет определенным образом вводимой операции “скрещивания” индивидов исходной популяции. Отобранные лучшие индивиды (в смысле введенной меры ценности) используются в качестве исходной популяции для следующей итерации алгоритма. Было показано [5], что при условии постоянного сохранения лучшего индивида, полученного на предыдущей итерации, и наличии “мутаций”, т.е. стохастических изменений значений отсчетов с некоторой заданной вероятностью, такая процедура обладает сходимостью к глобальному экстремуму целевой функции  $f(\varphi(r))$ . Оптимизация двумерного многоуровневого ДОЭ с реальным числом отсчетов фазовой функции (от 512\*512 и более) с помощью генетического алгоритма в общем случае может потребовать чересчур много затрат машинного времени и не может быть эффективно решена без применения высокопроизводительной вычислительной техники. Кроме того, многие практические задачи требуют эффективного расчета ДОЭ с малым числом уровней квантования, причем решение прямой задачи во многих случаях не требует вычисления двумерного интегрального оператора. К таким задачам относится, например, задача расчета радиально-симметричных ДОЭ, нашедших широкое применение для решения различных научно-технических задач.

Отметим, что в радиально-симметричном случае решение прямой задачи теории дифракции значительно упрощается. В самом деле, интеграл Фре-

неля-Кирхгофа в радиально-симметричном случае сводится к преобразованию Ганкеля, которое может быть вычислено с помощью вычисления трех одномерных преобразований Фурье [7], а в случае нулевого значения интенсивности в центре формируемого изображения – с помощью всего одного одномерного преобразования Фурье [8]. Кроме того, вид целевой функции определяется конкретным приложением и ее вычисление вовсе не обязательно требует решения прямой задачи теории дифракции. К примеру, если требуется рассчитать элемент, формирующий пучок с заданным модовым распределением, вычисление оценивающей функции потребует разложения светового поля по модам в плоскости непосредственно за оптическим элементом. Рассмотрим подробнее построение генетической процедуры для расчета радиально-симметричного бинарного ДОЭ. Так как предполагается, что ДОЭ должен иметь бинарную фазу, следовательно, будет использоваться обычное бинарное кодирование, состоящее в том, что отсчет, фаза которого равна  $\pi$ , будем обозначать единицей, а отсчет, фаза которого равна 0 – нулем. Таким образом, начальная популяция представляла собой набор  $N_{gen}$  сгенерированных случайным образом бинарных одномерных массивов  $\{\varphi_j\}_{j=0}^{N_r-1}$ , где в качестве  $N_r$  выбиралась некоторая степень числа 2. Каждый массив соответствует одной реализации фазы элемента  $\varphi(r)$ , взятой вдоль его радиуса:

$$\varphi_j = \varphi(j\Delta r)/\pi \in \{0,1\},$$

$$\Delta r = R_{ap} / (N_r - 1),$$

где  $R_{ap}$  – радиус ДОЭ.

Упрощенная схема итерационного процесса представлена на рис. 1.

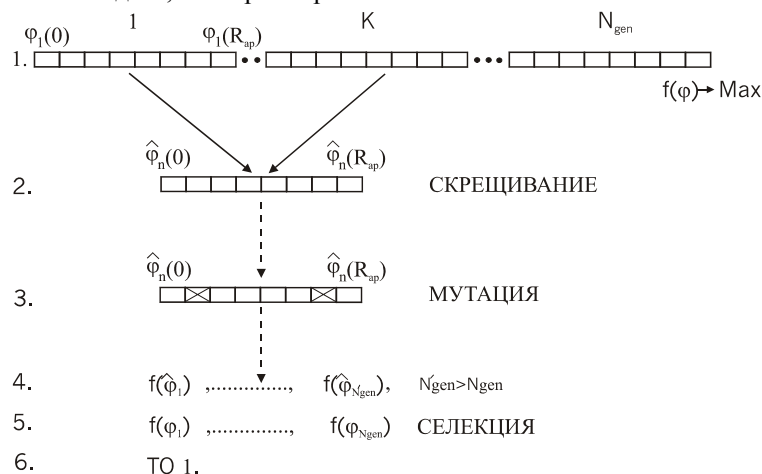


Рис. 1. Схема работы генетического алгоритма оптимизации радиально-симметричного ДОЭ

После генерации начальной популяции (популяции “родителей”) организуется цикл, в теле которого последовательно выполняются следующие операции:

-*скрещивание* – формирование  $N'_{gen} - N_{gen}$  дополнительных новых индивидов-массивов, значение каждого отсчета которых выбирается как значение соответствующего отсчета случайно выбранного массива-“родителя”;

-*мутация* – стохастическое изменение значений случайно выбранных отсчетов получившихся новых массивов. Выбор вероятности мутации определяет скорость сходимости алгоритма;

-*селекция* – определение следующей популяции “родителей” путем выбора  $N_{gen}$  лучших (в смысле решаемой задачи) индивидов с помощью вычисления целевых функций для всех  $N'_{gen}$  индивидов.

В общем случае, оптимизация ДОЭ требует вычисления оценивающей функции  $N'_{gen}$  раз на одной итерации.

В качестве модельного примера, призванного продемонстрировать способность построенной процедуры находить глобальный экстремум заданной целевой функции, максимизировалась целевая функция вида

$$f[\varphi(r)] = \sum_{j=0}^{Nr-2} \Phi(\varphi_j, \varphi_{j+1}), \quad (2)$$

$$\text{где } \Phi(\varphi_j, \varphi_{j+1}) = -\frac{(-1)^{j+1} - 1}{2} \cdot \delta(0, \varphi_j) \delta(1, \varphi_{j+1}), \quad (3)$$

$$\text{где } \delta(p, l) = \begin{cases} 1, & p = l \\ 0, & p \neq l \end{cases}$$

Количество отсчетов радиальной фазы выбиралось  $Nr=512$ . Очевидно, максимально возможное значение целевой функции (2) при  $Nr=512$   $Max f[\varphi(r)] = 255$ . Этому значению соответствует фаза бинарного аксикона. График зависимости значения целевой функции (2) от номера итерации приведен на Рис. 2.

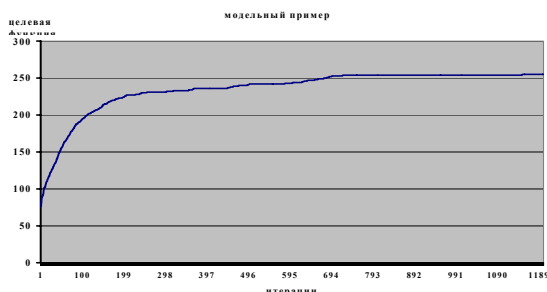


Рис. 2. График зависимости значения целевой функции (2) от номера итерации

Глобальный максимум целевой функции был достигнут в нашем примере за 1100 итераций алго-

ритма. Рассмотрим оптимизацию ДОЭ, формирующего радиально-симметричную моду Гаусса-Лагерра (1,0) из Гауссова освещающего пучка. В силу ортогональности модового базиса [9] энергетический вклад моды  $\psi_{pl}(x,y)$  в пучке с комплексно-значным распределением в сечении  $w(x,y)$  может быть определен как квадрат коэффициента при этой моде в соответствующем разложении  $|C_{pl}|^2$ :

$$w(x, y) = \sum_{p,l=(0,0)}^{\infty} C_{pl} \psi_{pl}(x, y), \quad (4)$$

$$C_{pl} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) \psi_{pl}^*(x, y) dx dy, \quad (5)$$

где \* - знак комплексного сопряжения.

Таким образом, в качестве максимизируемой целевой функции можно выбрать содержание формируемой моды Гаусса-Лагерра  $\psi_{10}$  в пучке с гауссовым распределением интенсивности  $\exp(-2r^2/\sigma^2)$  после прохождения его через оптический элемент с фазовой функцией  $\varphi(r)$ :

$$f[\varphi(r)] = \left[ 2\pi \int_0^{R_{ap}} \exp(-r^2/\sigma^2) \cdot \exp(i\varphi(r)) \psi_{10}^*(r) r dr \right]^2 \cong \left[ 2\pi \sum_{j=0}^{Nr-1} \exp(-j\Delta r^2/\sigma^2) \cdot \exp(i\varphi_j; \pi) \psi_{10}^*(j\Delta r) j\Delta r^2 \right]^2 \rightarrow Max, \quad (6)$$

предполагая, что амплитуда модовой функции быстро падает на апертуре ДОЭ и  $\psi_{10}(R_{ap}) \cong 0$ .

В данной работе выбирались следующие параметры: радиус Гауссова освещающего пучка  $\sigma=0.8$  mm, радиус формируемой моды Гаусса-Лагерра (1,0)  $\sigma_1=0.4$  mm, радиус апертуры  $R_{ap}=1.6$  mm. Значение целевой функции (6) для данных параметров составляло 0.79.

### 3. Технологическая реализация бинарных радиально-симметричных ДОЭ

Под технологически реализуемой фазовой функцией будем понимать такую функцию  $\varphi(r)$ , что соответствующий микрорельеф (1) имеющаяся в распоряжении исследователя технология позволяет изготовить без погрешностей, приводящих к существенным искажениям формируемого изображения.

В данной работе рассчитанные ДОЭ изготавливались путем лазерной записи на резисте ПММА, нанесенном на пластину из кварцевого стекла, с помощью системы прямой лазерной записи Laserwriter DWL 66 производства компании Heidelberg Instruments Inc. Данная система использует для записи излучение He-Cd лазера с длиной волны  $\lambda_{\sigma}=441.6$

нм. Разрешение системы определяется длиной волны и, таким образом, бинарный радиально-симметричный ДОО с минимальной шириной зоны в несколько микрон может быть реализован с приемлемым качеством.

Для изготовления ДОО по рассчитанному массиву отсчетов радиальной фазы формировались файлы в векторном формате GDS. В данном формате многоуровневая поверхность представляется в виде набора полигонов, задаваемых координатами граничных точек, и номером слоя (в нашем случае использовался единственный слой, соответствующий реализации значения  $\pi$  фазовой функции элемента  $\varphi(r)$ ). Конкретная версия формата накладывает ограничение на количество граничных точек для реализации одного полигона, в то время как количество точек на единицу длины границы полигона определяет точность реализации рельефа элемента. Для записи рассчитанных аксиальных бинарных элементов в формате GDS2 использовался следующий алгоритм: по рассчитанному бинарному массиву  $\{\varphi_j\}_{j=0}^{N_r-1}$  определялись внутренний  $R_{in}^i$  и внешний  $R_{out}^i$  радиусы  $i$ -ой радиальной области, на которой фазовая функция элемента принимает значение  $\pi$ . Первая четверть плоскости разбивалась на  $N_s$  секторов и каждый из  $N_s$  полигонов, получившихся пересечением окружностей с радиусами  $R_{in}^i$  и  $R_{out}^i$  с лучами, образующими сектора, записывался с использованием координат  $N_i = 2M_i + 4$  граничных точек (рис. 3) (так как запись полигона в формате GDS требует совпадения координат начальной и конечной точек, записывались координаты  $N_i = 2M_i + 5$  точек, т.е. начальная точка записывалась дважды). Соответствующей сменой знаков координат граничных точек получались координаты граничных точек  $3N_s$  полигонов в остальных трех четвертях плоскости элемента.

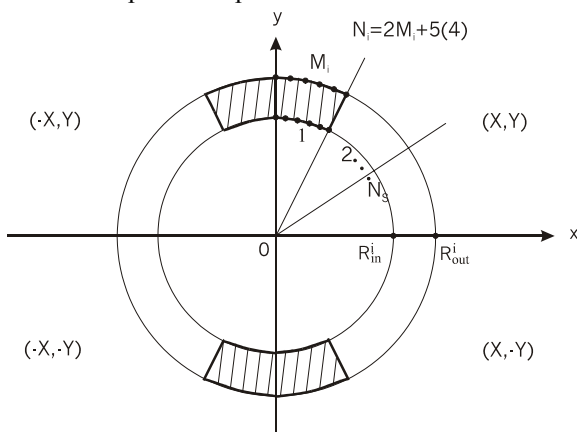


Рис. 3. Представление аксиальной зоны ДОО в виде набора полигонов

Количество граничных точек для реализации одного полигона  $i$ -ой зоны  $N_i = 2M_i + 4$  выбиралось в зависимости от внешней длины окружности  $2\pi R_{out}^i$

и требований к точности реализации микрорельефа (рис. 4).

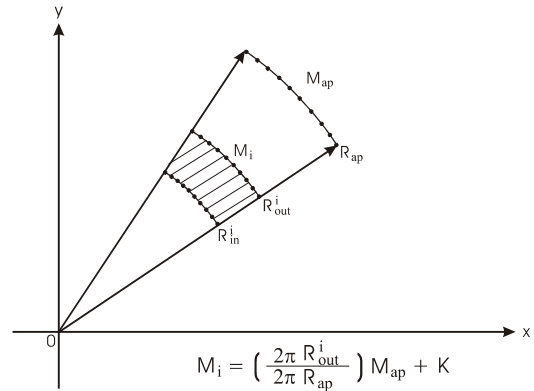


Рис. 4. Выбор числа точек для представления полигона.  $N_{ap} = 2M_{ap} + 4$  – количество граничных точек полигона для представления аксиальной зоны с внешним радиусом, равным  $R_{ap}$ ,  $K$  – некоторая постоянная.

#### 4. Результаты натурального эксперимента

В качестве теста разработанной процедуры расчета, записи и изготовления радиально-симметричных ДОО был изготовлен бинарный аксикон, фаза которого была найдена с помощью генетической процедуры, оптимизирующей целевую функцию вида (2). Аксикон был рассчитан для использования с линзой с фокусным расстоянием 10 мм и был предназначен для формирования окружности радиусом 1.5 мм. Результат натурального исследования элемента приведен на рис. 5.

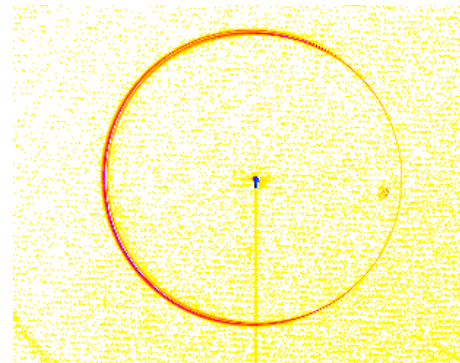
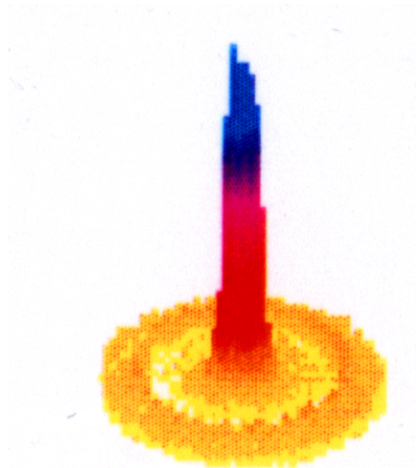


Рис. 5. Двумерное распределение интенсивности, сформированное аксиконом, изготовленным для тестирования технологии и расчета изготовления бинарных радиально-симметричных ДОО.

Затем был изготовлен элемент, предназначенный для формирования заданного одномодового распределения Гаусса-Лагерра (1,0), для чего использовалась генетическая процедура, оптимизирующая целевую функцию вида (6).

На рис.6 представлено распределение интенсивности, сформированное изготовленным элементом, предназначенным для формирования заданного одномодового распределения.



**Рис. 6** Трехмерное распределение интенсивности, сформированное изготовленным элементом, предназначенным для формирования заданного одномодового распределения Гаусса-Лагерра (1,0).

### Заключение

В данной работе рассмотрено применение генетических оптимизационных алгоритмов к расчету бинарных радиально-симметричных ДОЭ. Приведены результаты вычислительных и натуральных экспериментов.

Применение стохастических итерационных процедур к расчету ДОЭ представляется перспективным в силу следующих причин:

*а) решение прямой задачи для многих актуальных приложений ДОЭ не требует вычисления двумерного интегрального оператора (например в рассмотренном случае радиально-симметричного ДОЭ);*

*б) стохастические процедуры (генетический алгоритм, алгоритм моделирования отжига) обладают сходимостью к глобальному оптимуму в то время как широко применяемые для расчета ДОЭ алгоритмы “детерминированного поиска” (такие как алгоритмы типа Герчберга-Секстона, градиентные алгоритмы) не являются сходящимися;*

*с) применение стохастических алгоритмов позволяет организовать поиск непосредственно над множеством технологически реализуемых фазовых функций;*

*д) построение стохастических итерационных процедур расчета ДОЭ не требует вычисления обратного оператора, что исключает появление “практической расходимости”, связанной с накоплением вычислительной погрешности.*

### Благодарности

Автор выражает благодарности R. Poelman и T. Glaeser (Институт физических высоких технологий, Йена, Германия) за помощь в изготовлении ДОЭ и в постановке натурального эксперимента.

### Литература

1. F. Wyrowski, O. Bryngdahl “Digital holography as part of diffractive optics” *Report on Progress in Physics*, **54**, N 12, P. 1481-1571, (1991).
2. J.R. Fienup “Iterative method applied to image reconstruction and to computer-generated holograms” *Optical Engineering*, **19**, P.297-303, (1980).
3. V.A. Soifer, V.V. Kotlyar, L.L. Doskolovich “Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation”, "Taylor & Francis Ltd.", (1997).
4. А.В. Волков, Н.Л. Казанский, В.А. Сойфер, Г.В. Успенев, Глава 4 “Технология создания ДОЭ” в книге “Методы компьютерной оптики” под ред. В.А. Сойфера, М. “Физматлит”, 2000.
5. C.Y. Lu, H.Z. Liao, C.K. Lee, J.S. Wang “Energy control by linking individual patterns to self-repeating diffractive optical elements”, *Applied Optics*, **36**, N. 20, P 4702-4712, (1997).
6. Guoguang Yang “The performance analysis of the genetic algorithm for the optimum design of diffractive optical elements and its comparison to the simulated annealing”, *Optik*, V. **111**, N 3, P. 133-137, (2000).
7. S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer “Fast Hankel transform for focusator synthesis” *Optik*, **88**, N.4, P. 182-184, (1991).
8. V.A. Soifer, L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, V.S. Pavelyev, “A hybrid method for calculating DOEs focusing into radial focal domain”, *Proceedings SPIE*, **2426**, P. 358-365, (1995).
9. V.A. Soifer, M.A. Golub, “Laser Beam Mode Selection by Computer Generated Holograms”, CRC Press, 1994.