

ФОРМИРОВАНИЕ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ С ПОМОЩЬЮ ВИНТОВЫХ ФАЗОВЫХ ДОЭ

Хонина С.Н., Алмазов А.А.*

Институт систем обработки изображений РАН;

* Самарский государственный аэрокосмический университет.

Аннотация

Данная работа посвящена расчёту энергетически эффективных винтовых фазовых дифракционных оптических элементов (ДОЭ) вида $\exp(im\varphi)$ для формирования мод Гаусса-Лагерра, $\Psi_{lm}(r, \varphi)$, $|m| \leq M$. ДОЭ рассчитываются по модифицированному методу Лезема. Для элементов, работающих с плоской освещающей волной, осуществляется расчёт оптимального радиуса апертуры. В случае освещения гауссовым пучком проводится расчёт оптимального эффективного радиуса гауссова пучка. Хотя, в данном случае, основным критерием оценки качества синтезированных ДОЭ является энергетическая эффективность (т.е. максимизация содержания заданных мод Гаусса-Лагерра в формируемых световых полях), достигаемые значения среднеквадратичной и геометрической погрешности весьма низкие. Также приведены результаты экспериментального формирования одновременно 24-х пучков с различными винтовыми составляющими в различных дифракционных порядках.

Введение

Световые пучки с винтовыми фазовыми особенностями, т.е. содержащие угловые гармоники вида $\exp(im\varphi)$, привлекают повышенный интерес исследователей в самых различных областях. Например, захват и манипуляция с микрочастицами, в частности, вращение [1,2] с помощью орбитального углового момента, который несут в себе такие световые пучки. Передача информации по оптическим волокнам [3-5], когда моды Гаусса-Лагерра (ГЛ) с различными винтовыми составляющими используются для увеличения числа информационных каналов. Винтовые фазовые особенности играют ключевую роль в теории спеклов, возникающих при формировании световых полей и изображений [6,7], а также при оптических координатных преобразованиях [8].

Существуют различные методы формирования мод ГЛ высоких порядков. Возможно напрямую получать моды из лазера, но в связи со сложностью это практикуется редко. Чаще используется техника генерации высших мод Гаусса-Эрмита с помощью установленных внутри резонатора проволок с последующей конвертацией их в моды ГЛ. В качестве модового конвертора при этом используется две цилиндрические линзы, вносящие соответствующий фазовый сдвиг [9,10]. Более просты в применении голограммы, на которых записана интерференционная картина желаемой моды с опорным, чаще плоским пучком. Для мод ГЛ такая голограмма имеет вид решетки с вилкообразной особенностью [11,12]. Однако, такие голограммы позволяют получить дифракционную эффективность в первом (полезном) порядке не более 40%.

В настоящей работе решается задача расчёта энергетически эффективных винтовых фазовых дифракционных оптических элементов для формирования высших мод ГЛ на основе модифицированного метода Лезема [13]. Модификация метода состоит в учете и выборе оптимальных параметров, связанных с освещающим пучком. При этом удается достигнуть наилучшего сочетания двух конкурирующих

характеристик качества синтезированных ДОЭ – энергетической эффективности и точности формирования заданной моды.

1. ДОЭ для генерации гауссовых пучков с винтовыми особенностями

Как правило, для генерации пучков с винтовыми особенностями используются энергетически малоэффективные амплитудные голограммы [11,12] или сложные оптические устройства - лазерные резонаторы, дополненные астигматической оптикой [9,10]. Для генерации заданных мод ГЛ целесообразно использовать ДОЭ. Теоретически, наиболее простым решением является амплитудно-фазовый (АФ) оптический элемент, повторяющий амплитуду и фазу соответствующих мод. При освещении его плоской волной будет происходить генерация заданной моды. Однако, АФ элементы весьма сложны в изготовлении и имеют весьма низкую энергетическую эффективность и поэтому почти не используются на практике.

Обычно вместо них используют чисто фазовые ДОЭ. Существует множество алгоритмов их расчёта. Наиболее простым из них является метод Лезема [13], предложенный для киноформов. В этом случае информация об амплитуде игнорируется (принимается постоянной), а учитывается только фаза. Однако, такие фазовые элементы имеют очень большие погрешности формирования заданного светового поля, что делает это решение неудовлетворительным. Погрешность в данном случае возникает из-за того, что уравнивается энергетический вклад в изображение участков с большой и малой амплитудой. Таким образом, участки, на которые должно приходиться от 1 до 10% энергии (они составляют 30–70% площади изображения), получают энергетический вклад, пропорциональный своей площади, что сильно искажает итоговую картину. Ясно, что для повышения качества фазовых ДОЭ необходимо «отсечь» эти участки. В [14] разработан метод знаковой функции с оптимизацией апертуры, который, в отличие от метода Лезема, позволяет часть информации об амплитуде сохранить и учесть ее в параметрах

апертуры. В силу радиальной симметрии мод ГЛ, до 99% энергии сосредоточено в круге с радиусом, равным радиусу наибольшего из колец мод. Поэтому имеет смысл «обрезать» ДОЭ апертурой этого радиуса. Оптимальный радиус апертуры точно находится путём минимизации среднеквадратичного отклонения Фурье-изображения от эталонной моды.

Кроме использования ДОЭ с апертурой нужного радиуса можно использовать другие способы «гашения» лишней энергии, например освещение ДОЭ не плоской волной, а пучком с Гауссовским распределением амплитуды $F(r, \varphi) = \exp(-r^2/2\sigma^2)$, где σ – радиус гауссова пучка. Оптимальный радиус σ находится путём минимизации среднеквадратичного отклонения Фурье-изображения от эталонной моды.

Используя эти методы, можно рассчитывать ДОЭ, позволяющие генерировать моды ГЛ со среднеквадратичной погрешностью порядка 30-45% и геометрической погрешностью около 10% [15]. Столь большие значения погрешностей, как правило, делают подобные решения малопригодными для практического использования. Однако существует путь существенного уменьшения этих погрешностей. При использовании круговой апертуры возникает эффект уширения результирующего изображения за счёт «обрезки» входящего пучка. При этом на выходе мы получаем моды ГЛ с несколько большим

(по сравнению с использованием эталонных амплитудно-фазовых ДОЭ) эффективным радиусом σ . Естественно, это не может не влиять на значения погрешностей. Для компенсации этого нежелательного эффекта имеет смысл применить масштабирование эталонного изображения с коэффициентом, равным отношению эффективных радиусов

$$t = \frac{\sigma_{\Phi}}{\sigma_{A\Phi}}, \quad (1)$$

где σ_{Φ} – эффективный радиус моды ГЛ, формируемой фазовым ДОЭ, $\sigma_{A\Phi}$ – эффективный радиус моды ГЛ, формируемой амплитудно-фазовым ДОЭ (эталон).

Масштабирование изображения можно осуществлять оптическими методами, например, используя каскад из двух линз.

2. Оценка погрешности формирования гауссовых мод с помощью фазовых винтовых ДОЭ

При расчете фазовых ДОЭ с круговой апертурой оптимального радиуса для мод $(0, m)$ были получены результаты, приведенные на рис. 1, 2 и в Табл. 1. Поскольку картины распределения радиально симметричны, на рис. 1 показаны сечения, которые дают более полную и наглядную информацию, нежели сами изображения.

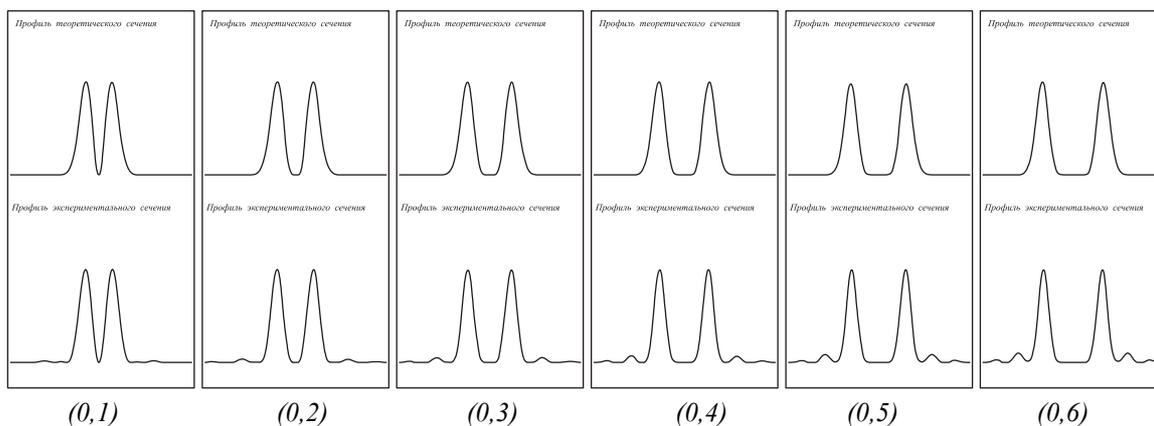


Рис. 1. Поперечные сечения распределений интенсивности мод $(0, m)$, $|m| \leq M$ для первых шести мод. Вверху – распределение при использовании АФ ДОЭ, внизу – фазовых ДОЭ.

Таблица 1

№ моды (0,m)	σ (АФ)	σ (Ф)	Среднеквадратичная погрешность (%)		Геом. погр. (%)
			для АФ	для Ф	
1	0,1630	0,1732	1,185	5,003	2,0203
2	0,1629	0,1739	1,064	4,269	1,4431
3	0,1628	0,1755	0,998	3,154	1,1591
4	0,1627	0,1729	1,250	2,017	1,0248
5	0,1628	0,1707	1,803	2,947	1,8608
6	0,1628	0,1709	2,583	3,610	2,5254
7	0,1628	0,1707	3,640	4,293	2,357
8	0,1627	0,1701	5,627	5,851	2,946
9	0,1626	0,1687	11,103	10,775	2,800
10	0,1617	0,1687	27,682	27,328	3,304

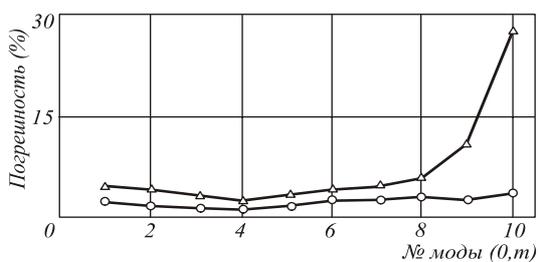


Рис. 2. Среднеквадратичная (▲) и геометрическая (●) погрешности для мод ГЛ, формируемых с помощью фазового ДОЭ с круговой апертурой оптимального радиуса.

Как видно из табл.1 и рис.2, среднеквадратичная погрешность (рассматривается область до первого минимума) не превышает 5% для мод невысоких порядков. С ростом m наблюдается увеличение погрешности, однако, порядок такой же как для АФ ДОЭ. Основное отличие картин, формируемых АФ и фазовым ДОЭ, наблюдается за областью первого минимума.

При расчете фазовых ДОЭ, освещаемых гауссовым пучком оптимального эффективного радиуса, для мод $(0,m)$ были получены результаты, приведенные на рис. 3, 4 и в Табл. 2.

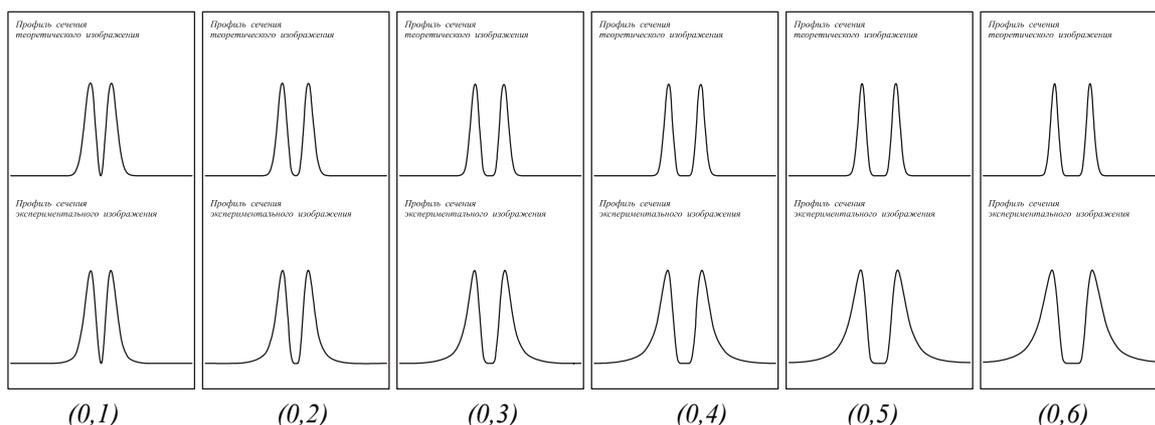


Рис. 3. Поперечные сечения распределений интенсивности мод $(0,m)$, $|m| \leq M$ для первых 6 мод. Вверху – распределение при использовании АФ ДОЭ, внизу – фазовых ДОЭ.

Таблица 2

№ моды $(0,m)$	σ (АФ)	σ (Ф)	Среднеквадратичная погрешность (%)		Геом. погр. (%)
			для АФ	для Ф	для Ф
1	0,1630	0,1442	1,185	4,253	2,4383
2	0,1629	0,1273	1,064	5,905	0,0000
3	0,1628	0,1147	0,998	3,870	3,5355
4	0,1627	0,1108	1,250	4,392	6,4282
5	0,1628	0,1043	1,803	6,821	6,1793
6	0,1628	0,1015	2,583	8,419	9,8995
7	0,1628	0,0964	3,640	9,598	13,1898
8	0,1627	0,0934	5,627	11,882	16,0100
9	0,1626	0,0902	11,103	16,552	19,6419
10	0,1617	0,0864	27,682	30,790	23,1417

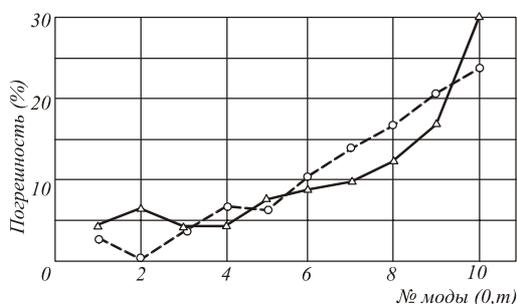


Рис. 4. Среднеквадратичная (▲) и геометрическая (●) погрешности для мод ГЛ, формируемых с помощью фазового ДОЭ, освещаемого гауссовым пучком оптимального эффективного радиуса.

3. Оценка содержания требуемых гауссовых мод в световых пучках, формируемых с помощью фазовых винтовых ДОЭ

Если применять вышеописанные ДОЭ для решения задачи эффективного ввода лазерного излучения в оптические волокна соответствующей конфигурации, встаёт вопрос о процентном содержании требуемой моды ГЛ в световом поле, формируемом посредством ДОЭ. Для полей, формируемых с помощью ДОЭ, согласованных с модой ГЛ $(0,m)$

$$f_{0m}(r, \varphi) = P(r) \exp^{im\varphi}, \quad (2)$$

где

$$P(r) = \begin{cases} \text{circle}\left(\frac{r}{R}\right) \\ \exp(-r^2/2\sigma^2) \end{cases}, \text{circle}\left(\frac{r}{R}\right) = \begin{cases} 1, & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}, \quad (3)$$

содержание различных мод ГЛ можно определить по нормированным интегралам перекрытия.

В частности, содержание моды ГЛ (n, m) в поле $F_{0m}(\rho, \theta)$, которое формируется с помощью ДООЭ (2) в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием f_0 :

$$F_{0m}(\rho, \theta) = \mathfrak{F}\{f_{0m}(r, \varphi)\} = \int_0^R \int_0^{2\pi} f_{0m}(r, \varphi) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda f_0} r \rho \cos(\theta - \varphi)\right] r dr d\varphi \quad (4)$$

считается по формуле:

$$\eta_{nq} = \frac{\left| \int_0^R \int_0^{2\pi} F_{0m}(\rho, \theta) \cdot \Psi_{nq}^*(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \right|^2}{\int_0^R \int_0^{2\pi} |\Psi_{nq}(\rho, \theta)|^2 \rho d\rho d\theta \cdot \int_0^R \int_0^{2\pi} |F_{0m}(\rho, \theta)|^2 \rho d\rho d\theta} \quad (5)$$

Т.к. функции ГЛ инвариантны к преобразованию Фурье:

$$\mathfrak{F}\{\Psi_{nq}(r, \varphi)\} = \lambda_{nq} \Psi_{nq}(\rho, \theta), \quad |\lambda_{nq}|^2 = 1, \quad (6)$$

то модули коэффициентов разложения поля и его Фурье-образа по базису функций ГЛ одинаковы:

$$\mathfrak{F}\{f(r, \varphi)\} = \mathfrak{F}\left\{\sum_{n,q} C_{nq} \Psi_{nq}(r, \varphi)\right\} = \sum_{n,q} C_{nq} \lambda_{nq} \Psi_{nq}(\rho, \theta), \quad (7)$$

где

$$C_{nq} = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \cdot \Psi_{nq}^*(r, \varphi) r dr d\varphi \quad (8)$$

С учетом вышесказанного, а также закона сохранения энергии:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} |F_{0m}(\rho, \theta)|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} |f_{0m}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi \quad (9)$$

Таблица 3. Содержание, η_{nm} , генерируемых мод в поле, создаваемом фазовым ДООЭ при освещении плоской волной.

Порядок винтовой составляющей m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Содержание моды $(0, m)$ в поле ДООЭ	0,865	0,859	0,839	0,818	0,796	0,777	0,758	0,741	0,725	0,711	0,700	0,684
Содержание мод (n, m) , $1 \leq n \leq 24$	0,103	0,113	0,128	0,145	0,165	0,183	0,197	0,209	0,219	0,228	0,237	0,246
Содержание мод (n, m) , $n > 24$	0,032	0,028	0,033	0,037	0,039	0,040	0,045	0,050	0,056	0,061	0,063	0,070

Таблица 4. Содержание, η_{nm} , генерируемых мод в поле, создаваемом фазовым ДООЭ при освещении гауссовым пучком.

Порядок винтовой составляющей m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Содержание моды $(0, m)$ в поле ДООЭ	0,626	0,515	0,520	0,454	0,449	0,392	0,382	0,350	0,327	0,311	0,301	0,296
Содержание мод (n, m) , $1 \leq n \leq 24$	0,369	0,440	0,478	0,540	0,528	0,575	0,572	0,594	0,609	0,619	0,624	0,625
Содержание мод (n, m) , $n > 24$	0,005	0,045	0,002	0,006	0,023	0,033	0,046	0,056	0,064	0,07	0,075	0,079

выражение (5) можно представить в более удобной для расчетов форме:

$$\eta_{nq} = \frac{\left| \int_0^R \int_0^{2\pi} f_{0m}(r, \varphi) \cdot \Psi_{nq}^*(r, \varphi) r dr d\varphi \right|^2}{\int_0^R \int_0^{2\pi} |\Psi_{nq}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi \cdot \int_0^R \int_0^{2\pi} |f_{0m}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi} \quad (10)$$

Как правило, функции ГЛ нормируются по энергии. Тогда, в случае нормированной энергии входного поля, содержание некоторой моды ГЛ в формируемом пучке будет равно квадрату модуля коэффициента разложения:

$$\begin{aligned} \eta_{nq} &= |C_{nq}|^2 = \left| \int_0^R \int_0^{2\pi} f_{0m}(r, \varphi) \cdot \Psi_{nq}^*(r, \varphi) r dr d\varphi \right|^2 = \\ &= \left| \int_0^R \int_0^{2\pi} P(r) \exp(im\varphi) LG_{nq}(r) \exp(-iq\varphi) r dr d\varphi \right|^2 = \\ &= \left| 2\pi \int_0^R P(r) \cdot LG_{nm}(r) r dr \right|^2 = |C_{nm}|^2 = \eta_{nm}, \end{aligned}$$

где

$$LG_{nm}(r) = \frac{\sqrt{n!}}{\sigma \sqrt{\pi(n+|m|)!}} \left(\frac{r}{\sigma}\right)^{|m|} \times \exp\left[-\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right] L_n^{|m|}\left(\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\right). \quad (11)$$

Для ДООЭ с круглой апертурой, освещаемых плоской волной, были вычислены распределения $|C_{nm}|^2$, приведенные на рис. 5 и в табл. 3.

Для фазовых ДООЭ, освещаемых гауссовым пучком, получены распределения $|C_{nm}|^2$, приведенные на рис. 6 и в табл. 4.

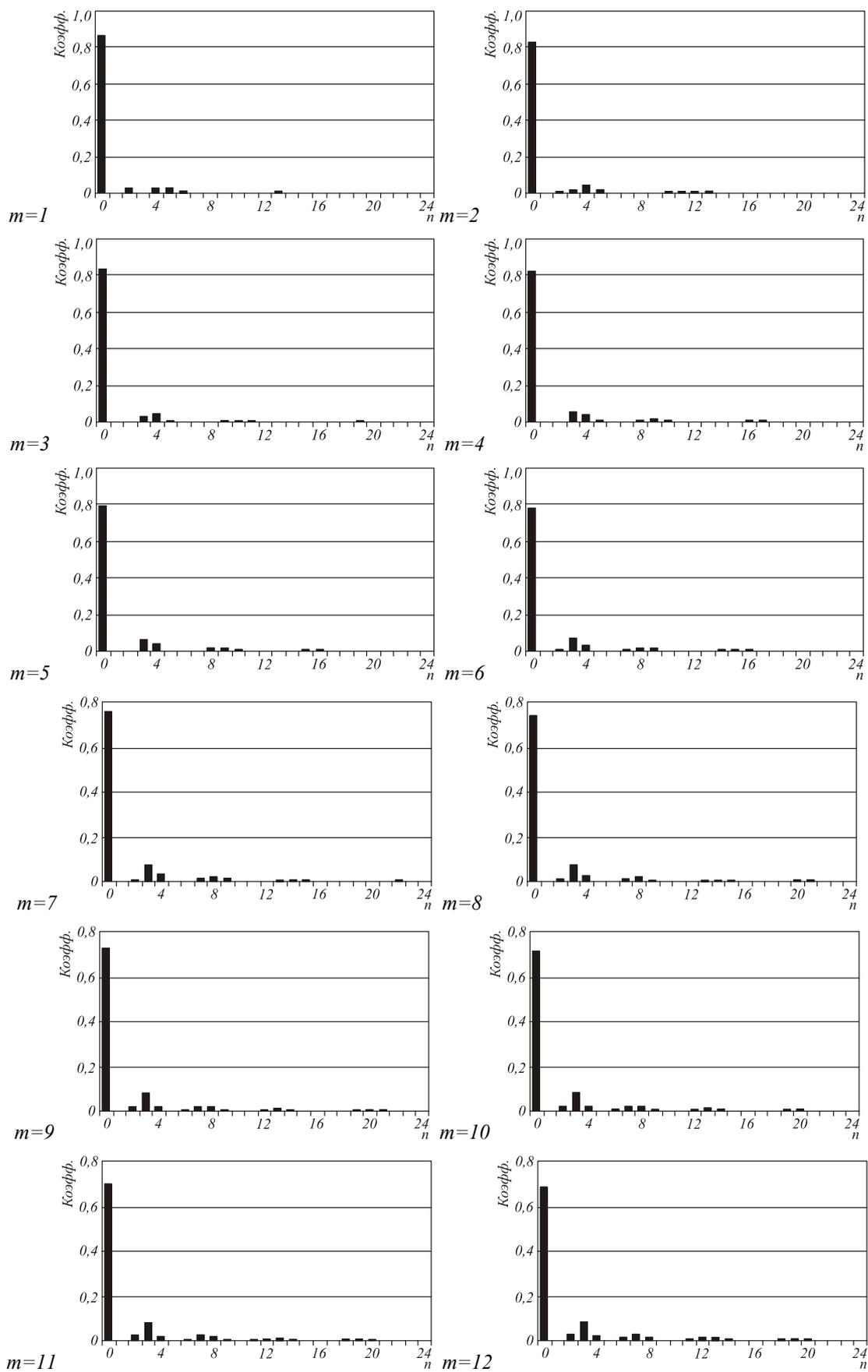


Рис. 5. Диаграмма распределения квадратов модулей коэффициентов разложения $|C_{nm}|^2$ для полей, формируемых фазовыми ДОЭ при освещении плоской волной.

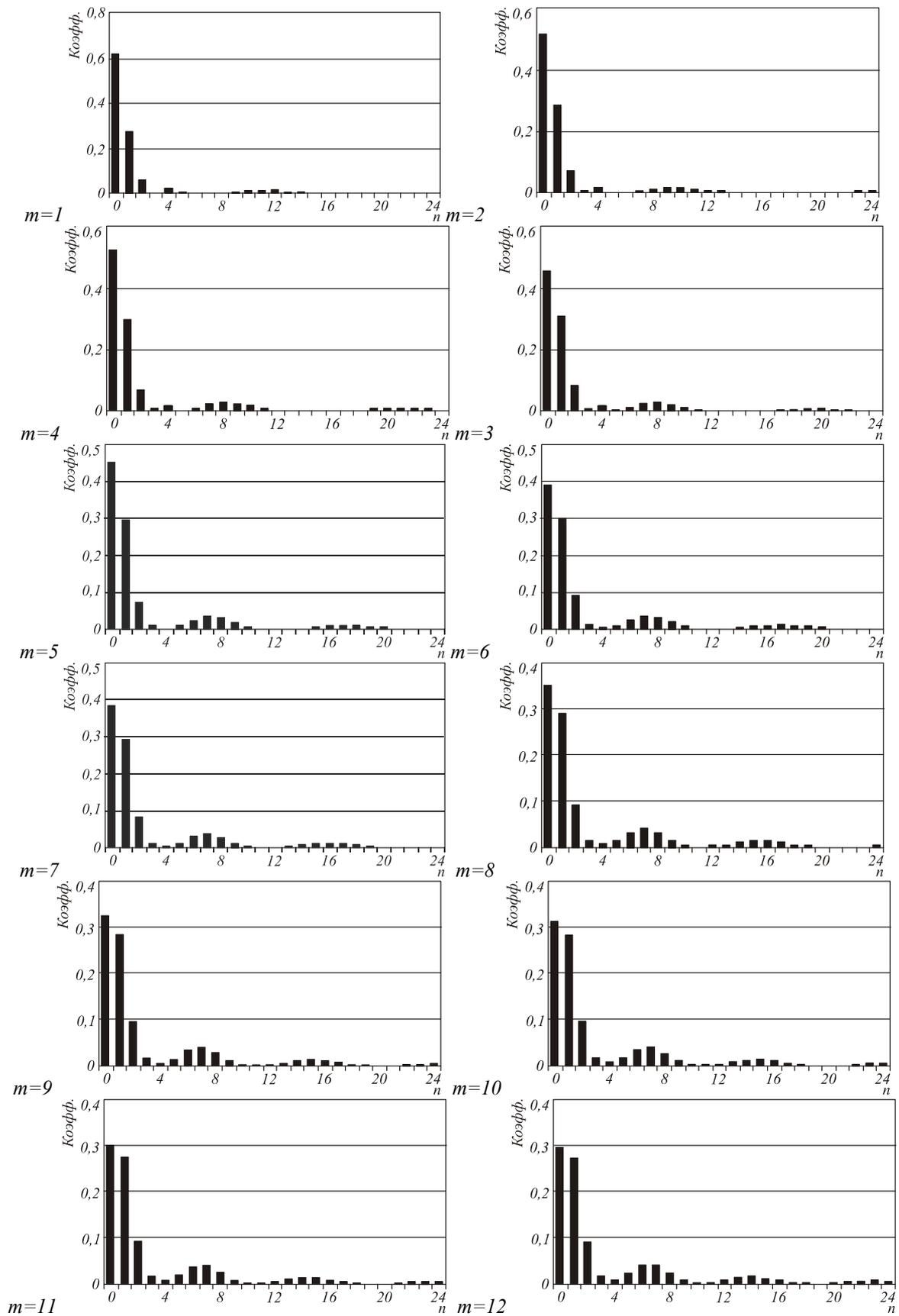


Рис. 6. Диаграмма распределения квадратов модулей коэффициентов разложения $|C_{nm}|^2$ для полей, формируемых фазовыми ДОЭ при освещении гауссовым пучком.

Как видим, ДОЭ с круговой апертурной функцией, т.е. освещаемые плоской волной, позволяют формировать световые поля с более высоким процентным содержанием заданных мод, нежели ДОЭ, освещаемые гауссовым пучком. Это объясняется тем, что у гауссового пучка основная доля энергии сконцентрирована в центральной части, а у мод ГЛ $(0, m)$ в центре имеется провал. На диаграммах также можно видеть хорошо различимые (особенно в случае ДОЭ, освещаемых гауссовым пучком) «всплески» значений коэффициентов $|C_{nm}|^2$ высоких порядков n . Они проявляются для тех мод ГЛ, у которых радиус какого-либо из колец приближается к радиусу ДОЭ.

4. Экспериментальное формирование нескольких винтовых пучков.

Для одновременного формирования нескольких пучков с различными винтовыми составляющими можно использовать многопорядковые ДОЭ с использованием несущих пространственных частот [16]:

$$\tau(r, \varphi) = \sum_{m=-M}^{m=M} C_m \exp \left[-im\varphi + i \frac{2\pi}{\lambda f_0} r \rho_m \cos(\varphi - \theta_m) \right]. \quad (12)$$

Такой ДОЭ формирует сразу несколько винтовых пучков, распространяющихся под различными углами к оптической оси. Угол распространения пропорционален значениям пространственных частот (ρ_m, θ_m) . Такие элементы позволят, например, захватывать сразу несколько частиц в определенных позициях, выстраивая их в желаемые структуры, и управлять каждой частицей по-разному (например, вращать с различной скоростью).

Кроме того, такой ДОЭ можно использовать в качестве пространственного фильтра для обнаружения в анализируемом световом поле соответствующих угловых гармоник. В частности, он может служить для измерения орбитального углового момента световых полей [17] или модовым демультимплексором на выходе телекоммуникационной оптоволоконной системы.

В данной работе был рассчитан и изготовлен фазовый ДОЭ, формирующий одновременно 24 пучка с $\exp(im\varphi)$, $m=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 12$, в различных дифракционных порядках. Пространственные частоты (ρ_m, θ_m) были выбраны так, чтобы получить бинарный микрорельеф – наиболее простой при изготовлении методами электронной литографии. Кроме того, дифракционные порядки располагались так, чтобы достичь максимальной компактности при определенном шаге дискретизации маски элемента (размер шага является критическим параметром при изготовлении).

На рис. 7а показана схема расположения дифракционных порядков $m=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 12$, а на рис. 7б – бинарная фаза ДОЭ. Далее, на рис. 7в и 7г, соответственно, приведены результаты численного моделирования и эксперимента по одновременному формированию винтовых пучков различного порядка в фокальной плоскости линзы.

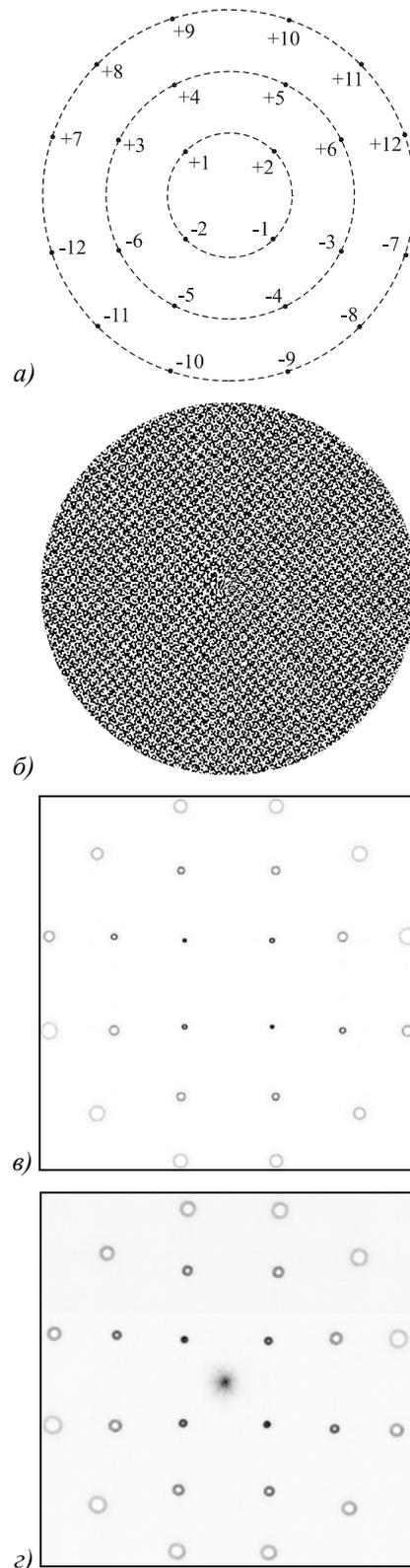


Рис. 7. Схема расположения дифракционных порядков $m=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 12$ (а) и бинарная фаза ДОЭ (б). Результаты моделирования (в) и эксперимента (г) по формированию винтовых пучков различного порядка в фокальной плоскости линзы.

Как видно из рис. 7 результаты моделирования и эксперимента практически совпадают, за исключением центрального паразитного порядка, поя-

вившегося в результате рассогласования размеров ДОЭ и освещающего пучка. Именно из этих соображений центральный дифракционный порядок не использовался при расчете ДОЭ. В дальнейшем планируется провести натурные эксперименты по демультиплексированию световых полей, представляющих собой композицию угловых гармоник, как в свободном пространстве, так и на выходе из оптического волокна. Привлекательность уплотнения каналов именно по угловым гармоникам, а не по определенным модам волокна (гауссовым или бесселевым), состоит в унифицированности (один элемент подходит для различных типов волокон) такого подхода и независимости от размера световых пучков (отпадает необходимость согласования с размером элемента).

Заключение

В данной работе осуществляется расчёт фазовых ДОЭ для энергетически эффективной генерации обобщённых мод Гаусса-Лагерра $\Psi_{0m}(r, \varphi)$, $|m| \leq M$ с помощью винтовых фазовых ДОЭ вида $\exp(im\varphi)$. Установлено высокое энергетическое содержание (около 80%) требуемых мод ГЛ в световом поле, получаемом при помощи таких ДОЭ, освещаемых плоской волной. При использовании в качестве освещающего гауссового пучка результаты оказались хуже (содержание моды около 30-60%). При этом достигаемые значения среднеквадратичной и геометрической погрешности для мод не выше 7-го порядка были не выше 5%, что сравнимо с экспериментальными погрешностями генерации и регистрации. С ростом числа m наблюдается некоторое уменьшение процентного содержания требуемых мод и существенный рост погрешности.

Полученные результаты позволяют говорить о пригодности винтовых ДОЭ для генерации мод ГЛ $\Psi_{0m}(r, \varphi)$, $|m| \leq M$, с высокой энергетической эффективностью и достаточно низкой погрешностью. Это открывает перспективы использования рассмотренных ДОЭ для ввода лазерного излучения в оптические волокна. Привлекательность уплотнения каналов именно по угловым гармоникам, а не по определенным модам волокна (гауссовым или бесселевым), состоит в унифицированности (один элемент подходит для различных типов волокон) такого подхода и независимости от размера световых пучков (отпадает необходимость согласования с размером элемента).

Результаты экспериментальной апробации 24-порядкового ДОЭ, предназначенного для одновременного формирования нескольких пучков с различными винтовыми составляющими, показали полное согласование с результатами моделирования. Такой элемент может служить модовым демультиплексором на выходе телекоммуникационной оптоволоконной системы. Кроме того, винтовые пучки, распространяющиеся под различными углами к оптической оси, можно использовать для захвата сразу несколько частиц в определенных позициях (расположение дифракционных порядков задается при расчете ДОЭ) и управления каждой частицей по-разному (например, скорость вращения частицы зависит от порядка m винтового пучка).

Литература

1. Gahagan K.T., Swartzlander G.A. Jr. Optical vortex trapping of particles // *Optics Letters* **21**(11), 827-829 (1996).
2. Paterson L., MacDonald M.P., Arlt J., Sibbett W., Bryant P.E., Dholakia K. Controlled rotation of optically trapped microscopic particles // *Science* **292**, 912-914 (2001).
3. Shinmura Y., Ezoe H., Yoshikawa M. Observation of mode in graded-index optical fibers with bending and cross talk in MDM // *IEICE Trans. Electron.* **E80-C**(6), 828-830 (1997).
4. Johnson E.G., Stack J., Koehler C. Light coupling by vortex lens into graded index fiber // *J. Light-wave Technology* **19**(5), 753-758 (2001).
5. Chen Y.F., Lan Y.P., Wang S.C. Generation of Laguerre-Gaussian modes in fiber-coupled laser diode end-pumped lasers // *Appl. Phys.* **B 77**, 167-170 (2001).
6. Aagedal H., Schmid M., Beth T., Teiwes S., Wyrowski F. Theory of speckles in diffractive optics and its application to beam shaping // *J. Mod. Optics* **43**(7), 1409-1421 (1996).
7. Walford J.N., Nugent K.A., Roberts A., Scholten R.E. High-resolution phase imaging of phase singularities in the focal region of a lens // *Optics Letters* **27**(5), 345-347 (2002).
8. Roux F.S. Diffractive optical implementation of rotation transform performed by using phase singularities // *Applied Optics* **32**(20), 3715-3719 (1993).
9. Basistiy I.V., Bazhenov V.Yu., Soskin M.S., Vasnetsov M.V. Optics of light beams with screw dislocations // *Opt. Comm.* **103**, 422-428 (1993).
10. Abramochkin E., Losersky N., Volostnikov V. Generation of spiral-type laser beams // *Opt. Comm.* **141**, 59-64 (1997).
11. Szwaykowski P. Self-imaging in polar coordinates // *J. Opt. Soc. Am. A*, **5**(2), 185-191 (1988).
12. Padgett M., Arlt J., Simpson N., Allen L. An experiment to observe the intensity and phase structure of Laguerre-Gaussian laser modes // *Am. J. Phys.* **64**(1), 77-82 (1996).
13. Lesem L.B., Hirsh P.M., Jordan J.A. The kinoform: a new wavefront reconstruction device // *IBM J. Res. Develop.* **13**(3), 150-155 (1969).
14. Kotlyar V.V., Khonina S.N., Melekhin A.S., Soifer V.A. Fractional encoding method for spatial filters computation // *Asian Journal of Physics* **8**(3), 273-286 (1999).
15. Khonina S.N., Almazov A.A. Design of multi-channel phase spatial filter for selection of Gauss-Laguerre laser modes // *Proceedings of SPIE* **4705**, 30-39 (2002).
16. Котляр В.В., Хонина С.Н. Фазовый фильтр для селекции угловых гармоник // *Компьютерная оптика*, **20**, 51-55 (2000).
17. Котляр В.В., Хонина С.Н., Соифер В.А., Ванг Я. Измерение орбитального углового момента светового поля с помощью дифракционного оптического элемента // *Автоматика* **38**(3), 33-44 (2002).