# БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ МНОГОМЕРНОГО ДПФ ВЕЩЕСТВЕННОГО СИГНАЛА С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ДАННЫХ В КОММУТАТИВНО-АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

*М.В. Алиев*
*Самарский государственный аэрокосмический университет,*
*Институт систем обработки изображений РАН*

### *Введение*

Целью настоящей работы является разработка быстрых алгоритмов вычисления так называемых «гиперкомплексных» дискретных преобразований Фурье (ДПФ) и анализ их вычислительных характеристик.

Интерес к многомерному преобразованию

$$F(m_1,\dots,m_d)=\sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{N-1} f(n_1,\dots,n_n)W^{\langle \mathbf{m},\mathbf{n}\rangle} \qquad (1)$$

– аналогу классического ДПФ, где

$$W^{\langle m,n\rangle}=\prod_{k=1}^{d} w_k^{m_k n_k},\ w_k^N=1,$$

$$\langle \mathbf{m},\mathbf{n}\rangle = m_1 n_1+\ldots+m_d n_d,$$

а корни $w_k$ $N$-й степени лежат в различных подалгебрах, изоморфных $\mathbb{C}$, некоторой многомерной алгебры, наметился в последнее десятилетие.

Впервые такие преобразования в алгебре кватернионов были введены в [1], [2], как вспомогательные преобразования, способствующие снижению вычислительной сложности некоторых алгоритмов двумерного ДПФ. Различные версии алгоритмов этого класса рассмотрены в [3], [4].

Как самостоятельное преобразование, полезное при решении «анизотропных» задач обработки изображений, преобразование (1) для $d=2$ рассматривалось в [5].

К настоящему времени различным теоретическим аспектам гиперкомплексных ДПФ и их практическим приложениям посвящено значительное число работ [6]-[15].

Настоящая работа посвящена, в основном, оптимизации выбора гиперкомплексной алгебры и структуры алгоритмов с точки зрения минимизации их мультипликативной сложности.

### *1. Коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные алгебры*

Так как коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные алгебры не относятся к часто используемым в информатике алгебраическим структурам, то в настоящем разделе работы рассмотрим их основные свойства.

Пусть $\mathbf{V}$ есть $d$-мерное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots\varepsilon_d$.

**Определение 1.** Коммутативно-ассоциативной алгеброй $\mathbb{B}_d$ будем называть $2^d$-мерную алгебру над $\mathbb{R}$ с базисом:

$$\Lambda=\left\{\prod_{i\in I}\varepsilon_i^{\alpha_i},\ \ \alpha_i=0,1\ ;\ I=\{1,\ldots,d\}\ \right\}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_i^0=1$, $\varepsilon_i^1=\varepsilon_i$. Определим умножения базисных элементов пространства $\mathbf{V}$:

$$\varepsilon_i\varepsilon_j=\varepsilon_j\varepsilon_i,\quad \varepsilon_i^2=\beta_i,\quad i,j\in I. \qquad (3)$$

Связывая с двоичными наборами индексов $(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$ целые числа $t\in T$, где $T=\{0,1,\ldots,2^d-1\}$

$$t=\alpha_1+\alpha_2 2+\ldots+\alpha_d 2^{d-1},\ \alpha_j\in\{0,1\} \qquad (4)$$

можем занумеровать элементы множества $\Lambda$:

$$E_t=\varepsilon_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_d^{\alpha_d}. \qquad (5)$$

Произвольный элемент $g\in\mathbb{B}_d$ записывается в виде

$$g=\xi_0E_0+\ldots+\xi_{2^d-1}E_{2^d-1}=\sum_{t\in T}\xi_tE_t. \qquad (6)$$

Операция сложения в алгебре $\mathbb{B}_d$ осуществляется покомпонетно. Пусть

$$g=\sum_{t\in T}\xi_tE_t,\quad h=\sum_{t\in T}\eta_tE_t,\ g,h\in B_d, \qquad (7)$$

тогда

$$(g+h)=\sum_{t\in T}(\xi_t+\eta_t)E_t. \qquad (8)$$

Нетрудно проверить, что алгебра $\mathbb{B}_d$ является коммутативной группой относительно операции сложения.

Операция умножения элементов $\mathbb{B}_d$, представленных в форме (6), определяется правилом умножения базисных элементов пространства $\mathbf{V}$. Утверждение следующей леммы позволяет указать явную связь между номерами (4) сомножителей и номером элемента, являющегося произведением

**Лемма 1.** Пусть $\oplus$ – поразрядное сложение по модулю 2:

$$\oplus: T\times \mathrm{T}\to \mathrm{T}, t\oplus\tau=\sum_{i\in I}\left(\left(\alpha_i+\alpha_i'\right)\operatorname{mod}2\right)2^{i-1}, \qquad (9)$$

где

$$t=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d),\ \tau=(\alpha_1',\ldots,\alpha_d');$$
$$t,\tau\in T;\ \alpha_i,\alpha_i'=0,1;\ i\in I, \qquad (10)$$

функция $h_i: T\times T\to\{0,1\}$ (битовая конъюнкция) определена равенством:

$$h_i(t,\tau)=\alpha_i\cdot\alpha_i';\ i\in I, \qquad (11)$$

а функция $\Psi: T\times T\to\{-1,1\}$ равенством:

$$\Psi(t,\tau)=\prod_{i\in I}\beta_i^{h_i(t,\tau)},\beta_i=\{-1,1\}\,. \tag{12}$$

Тогда правила умножения базисных элементов $\Lambda$ можно записать в следующем виде:

$$E_t E_\tau = \Psi(t,\tau)E_{t\oplus\tau}, \quad \forall t,\tau\in T\,. \tag{13}$$

*Доказательство.* Пусть, согласно (4),

$$E_t=\prod_{i\in I}\varepsilon_i^{\alpha_i}\ ,\ E_\tau=\prod_{i\in I}\varepsilon_i^{\alpha_i'}\ ,$$

тогда

$$E_t\cdot E_\tau=\prod_{i\in I}\varepsilon_i^{\alpha_i}\prod_{i\in I}\varepsilon_i^{\alpha_i'}=\prod_{i\in I}\varepsilon_i^{\alpha_i+\alpha_i'\pm 2h_i(\alpha_i,\alpha_i')}\,.$$

Учитывая, что $\alpha_i+a_i'-2h_i(\alpha_i,\alpha')_i\equiv\alpha_i+a_i' \bmod 2$, получаем

$$\prod_{i\in I}\varepsilon_i^{2\cdot h_i(\alpha_i,\alpha_i')}E_{t\oplus\tau}=\Psi(t,\tau)E_{t\oplus\tau}\,.$$

Таким образом, умножение произвольных элементов $g,h\in\mathbb{B}_d$ можно записать в виде матричного произведения:

$$h\cdot g=\mathbf{H}\cdot\mathbf{G}\,, \tag{14}$$

где **З** – матрица размера $2^d\times 2^d$

$$\mathbf{H}=\left\|\eta_{i\oplus t}\Psi(t,t\oplus i)\right\|_{2^d\times 2^d}\,,$$

а $\mathbf{G}$ – вектор-столбец

$$\mathbf{G}=\left(\xi_0,\dots,\xi_{2^d-1}\right)^T.$$

Так как $\Psi(t,t\oplus i)=\pm 1$, то умножения на $\Psi(t,t\oplus i)$ можно не учитывать. Поэтому вычисление произведения (14) требует не более $2^{2d}$ вещественных умножений и $2^d\left(2^d-1\right)$ вещественных сложений.

Из определения 1 непосредственно не следует единственность алгебры $\mathbb{B}_d$, с базисом $\Lambda$ и умножением, порожденным соотношением (3).

**Лемма 2.** Если для некоторого $l\in I$ справедливо равенство $\beta_l=-1$, то $\sum\limits_{t\in T}E_t^2=0$.

*Доказательство.* Разобьем сумму $\sum\limits_{t\in T}E_t^2$ на две суммы, таким образом, что в одну будут входить элемент $\varepsilon_l^2$, а в другую нет, тогда получим:

$$\sum_{t\in T}E_t^2=\sum_{\substack{t\in T\\ h_l(t,l)\neq 0}}E_t^2+\sum_{\substack{t\in T\\ h_l(t,l)=0}}E_t^2=(1+\beta_l)\sum_{\substack{t\in T\\ h_l(t,l)=0}}E_t^2=0\,.$$

**Следствие 1**. Если существует $t\in T$ такое, что $E_t^2=-1$, тогда в алгебре $\mathbb{B}_d$ содержится ровно $2^{d-1}$ элементов, квадрат которых равен $(-1)$.

Коммутативно-ассоциативную алгебру $\mathbb{B}_d$, в которой $\beta_i=1$ для каждого $i\in I$, будем обозначать $\mathbb{B}_d^+$.

Покажем, что на самом деле структура гиперкомплексной алгебры зависит не от количества базисных элементов, квадраты которых равны $(-1)$, а только от существования таких элементов.

**Теорема 1.** Для любого $d\geq 1$ существует только две неизоморфных $2^d$-мерных алгебры с операциями, определенными соотношениями (8), (13):

$$\mathbb{B}_d^+\cong\underbrace{\mathbb{R}\dotplus\mathbb{R}\dotplus\ldots\dotplus\mathbb{R}}_{2d}, \tag{15}$$

$$\mathbb{B}_d^-\cong\underbrace{\mathbb{C}\dotplus\mathbb{C}\dotplus\ldots\dotplus\mathbb{C}}_{d}, \tag{16}$$

где знак $\dotplus$ означает прямую сумму алгебр.

*Доказательство.* Из Леммы 2 следует, что существует, по крайней мере, один базисный элемент $\varepsilon_l^2=-1$, где $l\in I$, пространства $\mathbf{V}$ (без ограничения общности можно считать, что $l=1$). В базисе $\Lambda$ ему соответствует элемент $E_1$. Выберем еще один элемент $E_t$, такой что $E_t^2=1$ и $h_1(t,1)=0$. Такой элемент существует, т.к. либо существует $\beta_l=1$, либо можно взять комбинацию $\varepsilon_l\varepsilon_k=E_{l\oplus k}$, где $\beta_l=-1,\beta_k=-1$, $l\neq 1,k\neq 1$. Пусть $h_k(t,k)=1$, тогда любой элемент $h\in\mathbb{B}_d^-$ можно представить в следующем виде:

$$h=\sum_{i\in T}\eta_iE_i=\sum_{\substack{i\in T\\ h_i(i,k)\neq 0}}\eta_iE_i+$$

$$+\left(\sum_{\substack{i\in T\\ h_i(i,k)=0}}\Psi(t,i)\eta_iE_iE_t\right)E_t=a+bE_t\,,$$

где $a,b\in\mathbb{B}_{d-1}$.

Таким образом, непосредственно проверяется, что отображение $\Theta:\mathbb{B}_d\to\mathbb{B}_{d-1}\dotplus(\mathbb{R}\dotplus\mathbb{R})$, задаваемое следующим правилом

$$h=\alpha+\gamma E_t\mapsto\left(\alpha+\gamma,\alpha+\Psi(t,t)\gamma\right)\in\mathbb{B}_{d-1}\dotplus(\mathbb{R}\dotplus\mathbb{R}),$$

является изоморфизмом. Применяя последовательно $\Theta$ к $\mathbb{B}_{d-1}^-$ и так далее, несложной индукцией получаем

$$\mathbb{B}_d^+\cong\mathbb{B}_1^-+\underbrace{\mathbb{R}\dotplus\mathbb{R}\dotplus\ldots\dotplus\mathbb{R}}_{2(d-1)},$$

а так как

$$\mathbb{B}_1^-\cong\mathbb{C}\,,$$

то, следовательно:

$$\mathbb{B}_d^-\cong\underbrace{\mathbb{C}\dotplus\mathbb{C}\dotplus\ldots\dotplus\mathbb{C}}_{d}.$$

Соотношение (15) доказывается аналогично. Таким образом, утверждения теоремы доказаны.

Поэтому везде далее под алгеброй $\mathbb{B}_d^-$ будем понимать алгебру со следующим соотношением для умножений базисных элементов $\mathbf{V}$ :

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i, \quad \varepsilon_1^2 = -1, \ \varepsilon_i^2 = 1 \ \ i = \overline{2,d}. \qquad (17)$$

Легко проверить, что для произвольного номера $l$, где $l \in T$, и операция $\oplus$ есть поразрядное сложение по модулю 2, верны равенства:

$$0 \oplus 0 = l \oplus l,\ l \oplus 0 = 0 \oplus l, \qquad (18)$$

а для функции $\Psi$ и произвольного номера $l \in T$, справедливы равенства:

$$\Psi(0,0) = \Psi(0,l) = \Psi(l,0) = \beta_l \Psi(l,l), \qquad (19)$$

и

$$\begin{aligned} &\Psi(0,0\oplus 0) = \beta_l \Psi(l,l\oplus 0) = \\ &= \Psi(0,l\oplus 0) = \Psi(l,0\oplus 0). \end{aligned} \qquad (20)$$

**Лемма 3.** Пусть $\mathbb{B}$ есть одномерная подалгебра алгебры $\mathbb{B}_d$, порожденная подпространством $\mathbf{V}_1 \subseteq \mathbf{V}$, с базисом $\{\varepsilon_l\}$ для любого $l \in I$, тогда матрица умножения элементов $g,h \in \mathbb{B}$ примет следующий вид:

$$h \cdot g = \begin{pmatrix} \xi_0(\eta_0 - \eta_1) + \eta_1(\xi_0 + \beta_l \xi_1) \\ \xi_0(\eta_1 - \eta_0) + \eta_0(\xi_0 + \xi_1) \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

*Доказательство.* С учетом соотношения (20) матрица умножения элементов $g,h$ примет следующий вид:

$$h \cdot g = \begin{pmatrix} \eta_0 & \beta_l \eta_1 \\ \eta_1 & \eta_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix};$$

после очевидных преобразований получим:

$$h \cdot g = \begin{pmatrix} \xi_0(\eta_0 - \eta_1) + \eta_1(\xi_0 + \beta_l \xi_1) \\ \xi_0(\eta_1 - \eta_0) + \eta_0(\xi_0 + \xi_1) \end{pmatrix}.$$

Из соотношений (18),(19),(20) и Леммы 3 следует теорема.

**Теорема 2.** Пусть

$$g = \xi_0 + \xi_1 E_1,\ h = \eta_0 + \eta_1 E_1,\ g,h \in \mathbb{B},$$

где

$$\xi_0, \xi_1, \eta_0, \eta_1 \in \mathbb{B}_{d-1},$$

тогда операцию умножения $h \cdot g$ можно осуществить за 3 умножения и 3 сложения матриц размерности $2^{d-1}$, если считать, что $(\xi_0 + \xi_1)$ и $(\xi_0 + \beta_l \xi_1)$ выполнены заранее.

**Следствие 2.** Пусть $g,h \in \mathbb{B}_d$, $g = \xi_0 + \xi_1 E_1$, $h = \eta_0 + \eta_1 E_1$, где $\xi_0, \xi_1, \eta_0, \eta_1 \in \mathbb{B}_{d-1}$ и $E_1^2 = 1$, тогда операцию умножение элементов $h$ и $g$

$$h \cdot g = \begin{pmatrix} (\xi_0 + \xi_1)(\eta_0 + \eta_1) + (\eta_1 - \eta_0)(\xi_0 - \xi_1) \\ (\xi_0 + \xi_1)(\eta_0 + \eta_1) - (\eta_1 - \eta_0)(\xi_0 - \xi_1) \end{pmatrix}$$

можно осуществить за 2 умножения и за 4 сложения матриц размерности $2^{d-1}$, если считать, что $(\xi_0 + \xi_1)$ и $(\xi_0 - \xi_1)$ выполнены заранее.

**Следствие 3.** Умножение в алгебре $\mathbb{B}_d^+$ можно реализовать за $2^d$ вещественных умножений и $4^d$ вещественных сложений.

**Следствие 4.** Умножение в алгебре $\mathbb{B}_d^-$ можно реализовать за $3 \cdot 2^{d-1}$ вещественных умножений и $3 \cdot 4^{d-1}$ вещественных сложений.

**Следствие 5.** Пусть $g \in \mathbb{B}_k^-$, $h \in \mathbb{B}_d^-$ $k < d$. Тогда умножение элементов $g$ и $h$ реализуется за $3 \cdot 2^{d-1}$ вещественных умножений и $3 \cdot 4^{d-1}$ вещественных сложений.

**Следствие 6.** Пусть $g \in \mathbb{B}_k^-$, $h \in \mathbb{B}_d^-$ $k < d$. Тогда умножение элементов $g$ и $h$ реализуется за $2^d$ вещественных умножений и $3 \cdot 4^{d-1}$ вещественных сложений.

**Теорема 3.** Пусть $\psi : T \times T \to \{-1,1\}$ :

$$\psi(j,t) = \prod_{i \in T} (-1)^{h_i(j,t)}, \qquad (22)$$

тогда множество из $2^d$ отображений $\sigma_j$ :

$$\sigma_j : \mathbb{B}_d \to \mathbb{B}_d,$$

таких, что

$$\sigma_j(\chi) = \sum_{i \in T} c_i \psi(j,i) E_i, \qquad (23)$$

где $\chi \in \mathbb{B}_d$, $c_i \in \mathbb{R}$, $j \in T$, является множеством автоморфизмов алгебры $\mathbb{B}_d$.

*Доказательство.* Для доказательства изоморфности необходимо проверить, что отображение биективно и сохраняет операции сложения и умножения.

Базисные элементы $\Lambda$ не являются делителями нуля, и отображения $\sigma_j$ – линейно. Таким образом, отображения $\sigma_j$ является биекцией.

Проверим, сохраняют ли отображения $\sigma_j$ операции сложения и умножение. Пусть $g,h \in \mathbb{B}$ представлены в форме (6), тогда должно выполняться:

$$\sigma_j(g+h) = \sigma_j(g) + \sigma_j(h), \qquad (24)$$

$$\sigma_j(gh) = \sigma_j(g) \cdot \sigma_j(h). \qquad (25)$$

Справедливость соотношения (24) очевидна:

$$\sigma_j(g+h) = \sum_{i \in T} (\xi_i + \eta_i) \psi(j,i) E_i =$$

$$= \sum_{i \in T} \xi_i \psi(j,i) E_i + \sum_{i \in T} \eta_i \psi(j,i) E_i = \sigma_j(g) + \sigma_j(h).$$

Для доказательства соотношения (25) преобразуем правую часть этого равенства:

$$\sigma_j(gh)=\sum_{i\in T}\sum_{t\in T}\Psi(t,t\oplus i)\xi_{i\oplus t}\eta_t\psi(j,i)E_i=$$

$$\sum_{t\in T}\eta_t\sum_{i\in T}\Psi(t,t\oplus i)\xi_{i\oplus t}\psi(j,i)E_i\ .$$

Далее, используя соотношения (13), (18) и учитывая что $i=t\oplus i\oplus t$, получим:

$$\sum_{t\in T}\eta_t\psi(j,t)\Psi(t,t)E_t\sum_{i\in T}\xi_{i\oplus t}\psi(j,i\oplus t)\Psi(t,t\oplus i)E_{i\oplus t}$$

.

Так как $i$ принимает все значения множества $T$, то и $i\oplus t$ принимает все значения множества $T$. Поэтому, полагая $\tau=t\oplus i$, получаем:

$$\sum_{t\in T}\eta_t\psi(j,t)E_t\sum_{\tau\in T}\xi_\tau\psi(j,\tau)E_\tau=\sigma_j(g)\cdot\sigma_j(h).$$

Предположим $\sigma_j(\chi)=\sigma_p(\chi)$ для $j\neq p$, тогда последовательно получаем цепочку равенств:

$$\sigma_j(\chi)=\sigma_p(\chi)\ ,$$

$$\prod_{i\in T}(-1)^{h_i(j,l)}=\prod_{i\in T}(-1)^{h_i(p,l)},\ l=\overline{0,2^d-1},$$

$$\sum_{i\in T}h_i(j,l)=\sum_{i\in T}h_i(p,l),\ l=\overline{0,2^d-1},$$

которая приводит к противоречию: $j=p$. Из этого следует, что если $j\neq p$, тогда и $\sigma_j(\chi)\neq\sigma_p(\chi)$. Так как $card\,T=2^d$, то и различных автоморфизмов будет $2^d$.

**Лемма 4.** Пусть $\Omega$ множество автоморфизмов (23) алгебры $\mathbb{B}_d$. Пусть далее элемент $\chi$ определен равенством (4). Тогда система уравнений относительно $c_t$:

$$\sigma_j(\chi)=\eta_j,\quad \sigma_j\in\Omega, \tag{26}$$

имеет единственное решение при любых $h=(\eta_0,\dots,\eta_{2^d-1})\in\mathbb{B}_d$.

*Доказательство.* Рассмотрим матрицу

$$A=\|\psi(j,i)\|_{2^d\times 2^d}\ .$$

Заметим, что $\psi(j,i)=\Psi(j,i)$ при $\beta_i=-1$, для любого $i\in I$. Используя соотношение (19) матрицу $A$ можно преобразовать к следующему виду:

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_1\\ A_1 & -A_1\end{pmatrix},$$

где

$$A_1=\|\psi(j,i)\|_{2^{d-1}\times 2^{d-1}}\ .$$

Поэтому

$$\det\|\psi(j,i)\|_{2^d\times 2^d}=-2\cdot\det\|\psi(j,i)\|_{2^{d-1}\times 2^{d-1}}\ .$$

Применяя аналогичные рассуждения далее, получим

$$\det\|\psi(j,i)\|_{2^d\times 2^d}=(-1)^d\,2^d\neq 0\ .$$

Отсюда следует существование и единственность решения.

Решение в общем виде выглядит следующим образом:

$$2^d c_t E_t=\sum_{i\in T}\psi(t,i)\sigma_i(h),\ t\in T\ .$$

## *2. Алгоритм $2^d$-мерного ГДПФ в алгебре $\mathbb{B}_d$ с декомпозицией по основанию 2*

Пусть $\mathbf{н}=(n_1,\dots,n_d)$, $\mathbf{м}=(m_1,\dots,m_d)$, $\mathbf{c}=(r_1,\dots,r_d)$, $F(\nu)$ – гиперкомплексное ДПФ:

$$\tilde F(\mathbf{м})=\sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{N-1}f(\mathbf{н})W(\mathbf{м},\mathbf{н}), \tag{27}$$

где

$$W(\mathbf{м},\mathbf{н})=\prod_{i\in I}\omega^{m_in_i},\ \omega_i=e^{2\pi\varepsilon_i/N}\ .$$

Тогда

$$\tilde F(\mathbf{м})=\sum_{r_1,\dots,r_d=0}^{1}\tilde F_{\mathbf{c}}(\mathbf{м})W(\mathbf{м},\mathbf{c})=$$

$$=\sum_{r_1,\dots,r_d=0}^{1}W(\mathbf{м},\mathbf{c})\sum_{n_1,\dots n_d=0}^{N/2-1}f(\mathbf{н}+\mathbf{c})W(\mathbf{м},2\mathbf{н}), \tag{28}$$

где

$$\tilde F_{\mathbf{c}}(\mathbf{м})=\sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{N/2-1}f(\mathbf{н}+\mathbf{c})W(\mathbf{м},2\mathbf{н}),$$

$$0\le m_1,\dots,m_d\le\frac{N}{2}-1\ .$$

Вычисление спектра для остальных значений вектора $\mathbf{м}$ производится без дополнительных умножений, а именно:

$$\tilde F(\mathbf{м}+N/2\,\mathbf{ф})=\sum_{r_1,\dots,r_d=0}^{1}\Psi(\mathbf{c},\mathbf{ф})\tilde F_{\mathbf{c}}(\mathbf{м})W(\mathbf{м},\mathbf{c}), \tag{29}$$

где

$$\mathbf{ф}=(t_1,\dots,t_d),\ \ 0\le t_1,\dots,t_d\le 1\ .$$

Кроме того, умножения на фазовые множители $W(\mathbf{м},\mathbf{c})$ достаточно выполнять только для фундаментальной области

$$\Omega_0=\{0\le m_1,\dots,m_d<N/4\},$$

остальные значения определяются с использованием автоморфизмов алгебры $\mathbb{B}_d$ без дополнительных умножений. Действительно, пусть вычислены значения

$$W(\mathbf{м},\mathbf{c})\tilde F_{\mathbf{c}}(\mathbf{м}),\ \text{для}\ \mathbf{м}\in\Omega_0\ \text{и}\ \mathbf{м_1}=N/2\,\mathbf{ф}-\mathbf{м},$$

тогда

$$W(\mathbf{м_1},\mathbf{c})\tilde F_{\mathbf{c}}(\mathbf{м_1})=\Psi(\mathbf{c},\mathbf{ф})\sigma_{\mathbf{ф}}\big(W(\mathbf{м},\mathbf{c})\tilde F_{\mathbf{c}}(\mathbf{м})\big). \tag{30}$$

Таким образом, вычисление значений полного спектра в алгебре $\mathbb{B}_d$ производится в следующем порядке.

**Шаг 1.** Находятся значения суммы в (29) для $\mathbf{м} \in \Omega_0$.

**Шаг 2.** По формуле (30) вычисляются элементы спектра в областях, отличающихся от $\Omega_0$ сдвигом на $N/2$ по каждой из координат.

**Шаг 3.** Остальные области заполняются на основании следующих свойств ДПФ вещественного сигнала в алгебре $\mathbb{B}_d$:

$$\tilde{F}\left(N-\mathbf{фм}\right)=\sigma_{\mathbf{ф}}\left(\tilde{F}\left(N-\mathbf{фм}\right)\right). \qquad (31)$$

Из сказанного выше с учётом сложности умножения (теорема 2 и следствия 3-6) следует, что для оценки мультипликативной сложности ГДПФ по модулю 2 в алгебре $\mathbb{B}_d^-$ справедливо соотношение:

$$M\left(N^d\right)=2^d M\left(\left(N/2\right)^d\right)+\left(\sum_{i=1}^{d}3\cdot 2^{d-1}C_d^i\right)\frac{N^d}{2^{2d}}.$$

Упрощая, получаем

$$M\left(N^d\right)=2^d M\left(\left(N/2\right)^d\right)+\frac{3}{2^{d+1}}\cdot\left(2^d-1\right)N^d. \qquad (32)$$

Суммируя, получаем

$$M\left(N^d\right)=\frac{3\cdot\left(2^d-1\right)}{2^{d+1}}N^d\log_2 N+O\left(N^d\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2^d}\right)N^d\log_2 N+O\left(N^d\right). \qquad (33)$$

### *3. Алгоритм $2^d$-мерного ГДПФ в алгебре $\mathbb{B}_d$ с декомпозицией по основанию 4*

Пусть, как и выше,

$\mathbf{н}=\left(n_1,\ldots,n_d\right)$, $\mathbf{м}=\left(m_1,\ldots,m_d\right)$, $\mathbf{c}=\left(r_1,\ldots,r_d\right)$,

$\tilde{F}\left(\nu\right)$ – гиперкомплексное ДПФ (27). Тогда

$$\tilde{F}\left(\mathbf{м}\right)=\sum_{r_1,\ldots,r_d=0}^{3}\tilde{F}_{\mathbf{c}}\left(\mathbf{м}\right)W\left(\mathbf{м},\mathbf{c}\right)=$$

$$=\sum_{r_1,\ldots,r_d=0}^{3}W\left(\mathbf{м},\mathbf{c}\right)\sum_{n_1,\ldots n_d=0}^{N/4-1}f\left(\mathbf{н}+\mathbf{c}\right)W\left(\mathbf{м},4\mathbf{н}\right),$$

где

$$\tilde{F}_{\mathbf{c}}\left(\mathbf{м}\right)=\sum_{n_1,\ldots,n_d=0}^{N/4-1}f\left(\mathbf{н}+\mathbf{c}\right)W\left(\mathbf{м},4\mathbf{н}\right), \qquad (34)$$

$$0\le m_1,\ldots,m_d\le\frac{N}{4}-1.$$

Вычисление спектра для остальных значений вектора **м** производится без дополнительных умножений, а именно:

$$\tilde{F}\left(\mathbf{м}+N/4\,\mathbf{ф}\right)=\sum_{r_1,\ldots,r_d=0}^{3}\prod_{i\in I}\varepsilon_i^{r_i}\cdot\tilde{F}_{\mathbf{c}}\left(\mathbf{м}\right)W\left(\mathbf{м},\mathbf{c}\right), \qquad (35)$$

где

$$\mathbf{ф}=\left(t_1,\ldots,t_d\right),\ 0\le t_1,\ldots,t_d\le\frac{N}{4}.$$

Кроме того, умножения на фазовые множители $W\left(\mathbf{м},\mathbf{c}\right)$ достаточно выполнять только для фундаментальной области

$$\Omega_1=\left\{0\le m_1,\ldots,m_d<N/8\right\},$$

остальные значения определяются с использованием автоморфизмов алгебры $\mathbb{B}_d$ без дополнительных умножений. Действительно, пусть вычислены значения

$$W\left(\mathbf{м},\mathbf{c}\right)\tilde{F}_{\mathbf{c}}\left(\mathbf{м}\right),\ \text{для}\ \mathbf{м}\in\Omega_1\ \text{и}\ \mathbf{м_1}=N/4\,\mathbf{ф}-\mathbf{м},$$

тогда

$$W\left(\mathbf{м_1},\mathbf{c}\right)\tilde{F}_{\mathbf{c}}\left(\mathbf{м_1}\right)=\prod_{i\in I}\varepsilon_i^{r_i}\cdot\sigma_{\mathbf{ф}}\left(W\left(\mathbf{м},\mathbf{c}\right)\tilde{F}\left(\mathbf{м}\right)\right). \qquad (36)$$

Окончательное вычисление значений спектра в алгебре $\mathbb{B}_d$ производится в следующем порядке.

**Шаг 1.** Находятся значения суммы в (35) для $\mathbf{м}\in\Omega_1$.

**Шаг 2.** По формуле (36) вычисляются элементы спектра в областях, отличающихся от $\Omega_1$ сдвигом на $N/4$ по каждой из координат.

**Шаг 3.** Остальные области заполняются на основании свойств (31) ГДПФ вещественного сигнала в алгебре $\mathbb{B}_d$.

Из выше сказанного с учётом сложности умножение (теорема 2 и следствия 3-6) следует, что для оценки мультипликативной сложности ГДПФ по модулю 4 в алгебре $\mathbb{B}_d^-$ справедливо соотношение:

$$M\left(N^d\right)=4^d M\left(\left(N/4\right)^d\right)+3\cdot 2^{d-1}\left(2^{2d}-1\right)\frac{N^d}{2^{3d}}.$$

Упрощая, получаем

$$M\left(N^d\right)=4^d M\left(\left(N/4\right)^d\right)+\frac{3}{2^{2d+1}}\cdot\left(2^{2d}-1\right)N^d. \qquad (37)$$

Суммируя, получаем

$$M\left(N^d\right)=\frac{3\left(4^d-1\right)}{4^{d+1}}N^d\log_2 N+O\left(N^d\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{4^d}\right)N^d\log_2 N+O\left(N^d\right). \qquad (38)$$

### *Заключение*

Рассмотренные в работе быстрые алгоритмы гиперкомплексных ДПФ обладают уменьшенной вычислительной сложностью по сравнению с описанными в [9], [11], [12]. Снижение вычислительной сложности обеспечивается одновременным применением двух взаимосвязанных идей:

- использования принципа совмещенного вычисления частей спектра, что, в свою очередь, представляет собой одну из форм учета «избыточности» представления вещественного числа как элемента $2^d$–мерной гиперкомплексной алгебры.
- выбора в качестве гиперкомплексной алгебры той коммутативно-ассоциативной алгебры, в которой операция умножения реализуется посредством минимального числа вещественных умножений.

***Литература***


1. Chernov V.M. Discrete orthogonal transforms with data representation in composition algebras // Proc.of the 9th Scandinavian Conference on Image Analysis (SCIA'95). - Uppsala, Sweden, 1995. V. 1. P.357-364.
2. Chernov V.M. Arithmetic method in the theory of discrete orthogonal transforms // Proc. SPIE, 1995. V. 2363. P.134-141.
3. Chichyeva M.A., Pershina M.V. On various schemes of 2D-DFT decomposition with data representation in the quaternion algebra // Image Processing and Communications, Institute of Telecommunications Bydgoszcz, Poland, 1996. Vol. 2. No 1. P. 13-20.
4. Чернов В.М. Алгоритмы дискретных ортогональных преобразований, реализуемые в кодах Гамильтона-Эйзенштейна // Проблемы передачи информации, 1995. Т.31 N 3. С.38-46.
5. Bülow Th. and Sommer G. Multi-Dimensional Signal Processing Using an Algebraically Extended Signal Representation // Algebraic Frames of Perception-Action Cycle, AFPAC'97, Kiel, Germany, 1997. P. 148-163.
6. Bülow Th. and Sommer G. Hypercomplex Signals - A Novel Extension of the Analytic Signal to the Multidimensional Case // IEEE Transactions On Signal Processing, 2001. Vol. 49. No. 11. P. 2844-2852.
7. Bülow Th., Felsberg M. and Sommer G. Non-communtative Hypercomplex Fourier Transforms of Multidimensional Signals // G. Sommer (Ed.), Geometric Computing with Clifford Algebra, Springer Series in Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
8. Felsberg M., Bülow Th. and Sommer G. Commutative Hypercomplex Fourier Transforms of Multidimensional Signals // G. Sommer (Ed.), Geometric Computing with Clifford Algebra, Springer Series in Information Sciences, Springer-Verlag Berlin, 2001.
9. Felsberg M., Bülow Th., Sommer G. and Vladimir M. Chernov. Fast Algorithms of Hypercomplex Fourier Transforms // G. Sommer (Ed.), Geometric Computing with Clifford Algebra, Springer Series in Information Sciences, Springer-Verlag Berlin, 2001.
10. Bülow Th. and Sommer G. Local Hypercomplex Signalrepresentations and Applications // G. Sommer (Ed.), Geometric Computing with Clifford Algebra, Springer Series in Information Sciences, Springer-Verlag Berlin, 2001. Part I , Part II.
11. Felsberg M. and Sommer G. Optimized Fast Algorithms for the Quaternionic Fourier Transform // CAIP'99, Ljubljana, Slovenia, 1999. p. 25-32
12. Felsberg M. and Sommer G. Fast Algorithms for the Hypercomplex Fourier Transforms // WTFB'99, Brandenburg, 1999.
13. Chernov V.M., Bülow Th. and Felsberg M. Synthesis of fast algorithms for discrete Fourier-Clifford transform // Pattern Recognition and Image Analysis, January 1998.
14. Bülow Th. und Sommer G. Das Konzept einer zweidimensionalen Phase unter Verwendung einer algebraisch erweiterten Signalrepräsentation // 19. DAGM Symposium Mustererkennung, Braunschweig, 1997. p. 351-358.
15. Bülow Th. and Sommer G. Algebraically Extended Representations of Multi-Dimensional Signals // Proc. of the 10th Scandinavian Conference on Image alysis, SCIA'97, Lappeenranta, 1997. p. 559-566.