

РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СВЕРТКИ ИЗОБРАЖЕНИЯ С НЕРАЗДЕЛИМЫМ ДВУМЕРНЫМ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ КИХ-ФИЛЬТРОМ

Мясников В.В.

Самарский государственный аэрокосмический университет
Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

В статье рассматривается рекурсивный алгоритм вычисления свертки изображения с двумерным неразделимым полиномиальным КИХ-фильтром. Существенным моментом является отказ от использования декомпозиции 2-D фильтра набором разделимых звеньев. Приведены оценки вычислительной сложности предложенного рекурсивного алгоритма и дано его сравнение с известным алгоритмом, использующим указанную декомпозицию.

Введение

Вычисление свертки – одна из базовых операций в теории сигналов и цифровой обработки изображений. Для двумерного (2-D) случая вычисление свертки изображения $x(n_1, n_2)$ с линейным фильтром, заданным ИХ $h(n_1, n_2)$, может быть представлено в виде:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in D} h(m_1, m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2). \quad (1)$$

Здесь $y(n_1, n_2)$ – выходного изображение, D – область ненулевых значений ИХ фильтра. В дальнейшем предполагается, что область D финитна, то есть рассматриваются фильтры с конечными импульсными характеристиками – КИХ-фильтры. Для определенности положим

$$D = [-M_1^-, M_1^+] \times [-M_2^-, M_2^+].$$

Одним из существующих подходов к быстрому вычислению 1-D и 2-D сверток, помимо быстрых ортогональных преобразований, является их рекурсивная реализация. Существующая теория и результаты в этой области существенным образом ориентированы на 1-D случай [1-3]. В частности, известный метод перехода к двумерным рекурсивным КИХ-фильтрам использует декомпозицию ИХ фильтра с помощью разделимых функций $p_k(m_1)p_l(m_2)$, каждая из которых реализуется рекурсивно [1,3]:

$$h(m_1, m_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \beta_{kl} p_k(m_1) p_l(m_2) \quad (2)$$

Как показано в работах [1,2] удобными для рекурсивной реализации свертки являются полиномиальные функции, в частности, базис МВС. Этот базис позволяет реализовать свертку рекурсивно и с минимальным (для полиномиального базиса общего вида) числом арифметических операций.

В настоящей работе предлагается метод построения 2-D рекурсивного алгоритма вычисления свертки изображения с полиномиальной ИХ. В методе не требуется разложение ИХ на разделимые звенья. Показано, что рекурсивный алгоритм, получаемый при использовании указанного метода, позволяет снизить теоретическую сложность вычисления свертки (1), оцениваемую числом арифметиче-

ских операций, на 20% по сравнению с известным (использует разделимые звенья).

Статья организована следующим образом. В первом разделе описан известный алгоритм рекурсивного вычисления свертки с 2-D полиномиальной ИХ, использующий декомпозицию ИХ набором разделимых звеньев. Также в этом разделе приведены известные результаты по 1-D рекурсивной фильтрации на основе МВС - базисов. Во втором разделе дано построение предлагаемого 2-D рекурсивного алгоритма. В третьем разделе приведен сам алгоритм, представлены оценки его вычислительной сложности и дано сравнение с известным алгоритмом по сложности реализации свертки.

1. Рекурсивное вычисление 2-D свертки на основе декомпозиции КИХ фильтра с помощью разделимых звеньев

Пусть ИХ фильтра представима в виде разложения по 2-D разделимым функциям (2). Тогда выражение (1) расчета свертки можно переписать следующим образом:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \beta_{kl} \mu_{kl}(n_1, n_2), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{kl}(n_1, n_2) &= \\ &= \sum_{m_1=-M_1^-}^{M_1^+} p_k(m_1) \sum_{m_2=-M_2^-}^{M_2^+} p_l(m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \end{aligned} \quad (4)$$

По аналогии с работами [1-3] величины $\mu_{kl}(n_1, n_2)$ назовем *обобщенными моментами*. Очевидно, что в соответствии с выражением (4) вычисление 2-D свертки можно производить в построчно-постолбцовой манере, а именно:

- производится вычисление 1-D сверток вдоль строк (формируем полуспектр одномерных моментов по горизонтали):

$$\tilde{\mu}_l(n_1 - m_1, n_2) = \sum_{m_2=-M_2^-}^{M_2^+} p_l(m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2); \quad (5)$$

- вдоль столбцов полуспектра вычисляются обобщенные моменты:

$$\mu_{kl}(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-M_1^-}^{M_1^+} p_k(m_1) \tilde{\mu}_l(n_1 - m_1, n_2); \quad (6)$$

- рассчитывается скалярное произведение значений обобщенных моментов (6) на коэффициенты разложения ИХ (3).

Сложность вычисления 2- D свертки с использованием такого построчно-постолбцового алгоритма складывается из сложностей каждой из трех указанных групп операций.

При использовании рекурсивного подхода вычисление 1- D сверток (5) и (6) производится рекурсивно. При использовании полиномиального базиса функции $p_k(m_1)$ и $p_l(m_2)$ являются полиномами:

$$p_k(m) = \sum_{i=0}^k a_{ki} m^i, \quad k = \overline{0, K}. \quad (7)$$

В работах [1,3] показано, что коэффициенты $\{a_{ki}\}_{i=0}^k$ ($a_{kk} \neq 0$) могут быть подобраны таким образом, чтобы произвольная 1- D свертка с набором функций (7) выполнялась с минимальной вычислительной сложностью (МВС) для полиномиального базиса общего вида. Рекурсивный алгоритм формирования 1- D моментов и его вычислительная сложность в сложениях $U_+(K)$ и умножениях $U_*(K)$ в пересчете на один отсчет выходного изображения составляют [1,3]:

$$\begin{cases} \mu_0(n) = \mu_0(n-1) + x(n+M^-) - x(n-M^+ - 1), \\ \mu_k(n) = \mu_k(n-1) + \mu_{k-1}(n-1) + \\ + p_k^{mcc}(-M^-)x(n+M^-), \quad 1 \leq k \leq K. \end{cases} \quad (8)$$

$$U_+(K) = 2(K+1) \quad U_*(K) = K.$$

При использовании базиса МВС $\{p_k^{mcc}\}_{k=0}^K$ вычислительная сложность расчета двумерной свертки в пересчете на один отсчет выходного изображения равна:

$$\begin{aligned} U_+(K, L) &= 3(K+1)(L+5/3), \\ U_*(K, L) &= 2(K+1)(L+1) - 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Суммарная сложность, таким образом, пропорциональна величине:

$$U_+(K, L) + U_*(K, L) \cong 5KL. \quad (10)$$

2. Построение 2- D рекурсивного алгоритма вычисления свертки

Для построения 2- D рекурсивного алгоритма вычисления свертки воспользуемся тем фактом, что любая горизонтальная строка полиномиальной импульсной характеристики степени (K, L) также является полиномиальной функцией степени не выше чем L . Действительно, если импульсная характеристика фильтра представима в виде степенного ряда

$$h(m_1, m_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \alpha_{kl} m_1^k m_2^l, \quad (11)$$

тогда m_1 -ая строка ИХ имеет вид:

$$h_{m_1}(m_2) = \sum_{l=0}^L m_2^l \left(\sum_{k=0}^K \alpha_{kl} m_1^k \right) = \sum_{l=0}^L \alpha_l^{m_1} m_2^l.$$

Введем обозначение:

$$p_L^{m_1}(m_2) \equiv h_{m_1}(m_2) = \sum_{l=0}^L \alpha_l^{m_1} m_2^l. \quad (12)$$

Тогда свертка (1) представима:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in D} p_L^{m_1}(m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \quad (13)$$

По аналогии с (4) обозначим:

$$\mu_l^{m_1}(n_1, n_2) = \sum_{m_2=-M_2^-}^{M_2^+} p_l^{m_1}(m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \quad (14)$$

$$\mu_l(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-M_1^-}^{M_1^+} \mu_l^{m_1}(n_1, n_2) \quad (15)$$

Далее, для каждой полиномиальной функции $p_L^{m_1}(m_2)$ (вид функции зависит от m_1) построим последовательность полиномиальных функций $\{p_l^{m_1}\}_{l=0}^L$ следующим образом $l = \overline{L, 0}$:

$$p_{l-1}^{m_1}(m_2 - 1) = p_l^{m_1}(m_2) - p_l^{m_1}(m_2 - 1).$$

Как показано в работах [1,3], для последовательности таких 1- D полиномов существует эффективный алгоритм рекурсивного вычисления свертки, который в 1- D случае выглядит следующим образом (индексы m_1 для удобства опущены):

$$\begin{cases} \mu_l(n) = \mu_l(n-1) + \mu_{l-1}(n-1) + \\ + p_l(-M^-)x(n+M^-) - \\ - p_l(M^+ + 1)x(n-M^+ - 1), \quad l = \overline{1, L}, \\ \mu_0(n) = \mu_0(n-1) + \\ + p_0(0) \cdot (x(n+M^-) - x(n-M^+ - 1)). \end{cases} \quad (16)$$

Здесь

$$\mu_l(n) = \sum_{m=-M^-}^{M^+} p_l(m) x(n-m). \quad (17)$$

Используя этот результат, можно переписать выражение (14) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_l^{m_1}(n_1, n_2) &= \mu_l^{m_1}(n_1, n_2 - 1) + \mu_{l-1}^{m_1}(n_1, n_2 - 1) + \\ &+ p_l^{m_1}(-M_2^-)x(n_1 - m_1, n_2 + M_2^-) - \\ &- p_l^{m_1}(M_2^+ + 1)x(n_1 - m_1, n_2 - M_2^+ - 1), \quad l = \overline{1, L} \end{aligned}$$

Подставив это рекуррентное соотношение в равенство (15), можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mu_l(n_1, n_2) &= \sum_{m_1=-M_1^-}^{M_1^+} \mu_l^{m_1}(n_1, n_2) = \\ &= \sum_{m_1=-M_1^-}^{M_1^+} \mu_l^{m_1}(n_1, n_2 - 1) + \sum_{m_1=-M_1^-}^{M_1^+} \mu_{l-1}^{m_1}(n_1, n_2 - 1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m_1=-M_1^-}^{M_1^+} p_l^{m_1} (-M_2^-) x(n_1 - m_1, n_2 + M_2^-) - \\
& - \sum_{m_1=-M_1^-}^{M_1^+} p_l^{m_1} (M_2^+ + 1) x(n_1 - m_1, n_2 - M_2^+ - 1).
\end{aligned}$$

Упрощая первые два слагаемых по формуле (15), получим:

$$\begin{aligned}
\mu_l(n_1, n_2) &= \mu_l(n_1, n_2 - 1) + \mu_{l-1}(n_1, n_2 - 1) + \\
& + \sum_{m_1=-M_1^-}^{M_1^+} p_l^{m_1} (-M_2^-) x(n_1 - m_1, n_2 + M_2^-) - \\
& - \sum_{m_1=-M_1^-}^{M_1^+} p_l^{m_1} (M_2^+ + 1) x(n_1 - m_1, n_2 - M_2^+ - 1). \quad (18)
\end{aligned}$$

Очевидно, вычислительная сложность полученного 2-D рекурсивного алгоритма вычисления свертки с полиномиальным КИХ-фильтром зависит от вертикального размера ИХ. Для снижения сложности операций скалярного произведения в (18) их можно реализовать также рекурсивным образом.

Действительно, любая величина $p_l^{m_1}(M)$ может быть представлена как полиномиальная функция степени K (или ниже) от m_1 . Например, для случая $l = L$:

$$\begin{aligned}
p_L^{m_1}(M) &= \sum_{l=0}^L M^l \left(\sum_{k=0}^K \alpha_{kl} m_1^k \right) = \\
& = \sum_{k=0}^K m_1^k \left(\sum_{l=0}^L \alpha_{kl} M^l \right) = \sum_{k=0}^K m_1^k \alpha_k^{(L)M} = p_K^{(L)M}(m_1)
\end{aligned}$$

В общем случае выполняется:

$$\begin{aligned}
p_l^{m_1}(M) &= p_K^{(l)M}(m_1), \\
l &= \overline{0, L}, \quad M = M_2^+ + 1 \text{ или } M = -M_2^- .
\end{aligned}$$

Каждую из этих $2(L+1)$ одномерных полиномиальных функций можно представить в виде разложения по 1-D полиномиальному МВС-базису (8) $\{p_k^{mcc}(m_1)\}_{k=0}^K$:

$$\begin{aligned}
p_K^{(l)M}(m_1) &= \sum_{k=0}^K \beta_k^{(l)M} p_k^{mcc}(m_1), \quad l = \overline{0, L}, \quad (19) \\
l &= \overline{0, L}, \quad M = M_2^+ + 1 \text{ или } M = -M_2^- .
\end{aligned}$$

Свертка с функциями МВС-базиса, как указывалось ранее, реализуется рекурсивно (по столбцам) в соответствии с выражением (8). Таким образом, предлагаемый алгоритм рекурсивного вычисления 2-D свертки изображения с неразделимым КИХ-фильтром представим следующим образом.

3. Алгоритм

Шаг 1. Рекурсивное вычисление 1-D обобщенных моментов за счет свертки столбцов изображения с полиномами МВС по выражению (8).

Шаг 2. Вычисление $2(L+1)$ скалярных произведений значений 1-D обобщенных моментов на коэффициенты (19).

Шаг 3. Подстановка полученных $2(L+1)$ значений в общее рекуррентной 2-D соотношение (18) и получение значения величины $\mu_L(n_1, n_2) \equiv y(n_1, n_2)$ на основании предшествующих значений 2-D свертки. Этот шаг не требует ни одной операции умножения.

Вычислительная сложность предложенного алгоритма в пересчете на один отсчет выходного изображения составляет:

$$\begin{aligned}
U_+(K, L) &= 2(K+1) + 2(L+1)K + (3L+2), \\
U_*(K, L) &= K + 2(L+1)(K+1).
\end{aligned}$$

или, окончательно:

$$\begin{aligned}
U_+(K, L) &= 2(K+1.5)(L+2) - 2, \\
U_*(K, L) &= 2(K+1)(L+1.5) - 1.
\end{aligned}$$

Итоговая сложность пропорциональна:

$$U_+(K, L) + U_*(K, L) \cong 4KL,$$

что на 25% ниже, чем у традиционного постолбцового алгоритма.

В заключении следует отметить, что предложенный подход может быть естественным образом обобщен на ситуацию представления ИХ фильтра произвольными рекуррентными последовательностями.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ, Администрации Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы "Фундаментальные исследования и высшее образование" (BRHE).

Литература

1. N.I.Glumov, V.V.Myasnikov, V.V.Sergeyev Parallel-Recursive Local Image Processing and Polynomial Bases // Proceedings of the Third IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems ICECS'96, 1996. Vol.2. Rodos, Greece. P.696-699.
2. B.C.Li and J.Shen Two-dimensional local moment, surface fitting and their fast computation // Pattern Recognition, 1994. Vol.27. No.6. P.785-790.
3. V.V.Myasnikov Construction of Integer-Value Polynomials for Recursive Calculation of the Convolution with FIR-Filter // Proceedings of the 7-th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis - PRIA'2004, 2004. P.331-334.