

# ОКОНТУРИВАНИЕ ФАЗЫ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТОЧЕК ФАЗОВОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ КОЛЬЦЕВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

Котляр В.В., Ковалев А.А.

Институт систем обработки изображений РАН,  
Самарский государственный аэрокосмический университет

## Аннотация

Исследована возможность применения кольцевого преобразования Радона (КПР), введенного в рассмотрение авторами в их предыдущих работах, для решения таких оптических задач, как оконтуривание фазы и визуализация точек фазовой сингулярности световых полей. Проведено сравнение с существующими методами визуализации фазы. Получены аналитические выражения и проведены численные расчеты, подтверждающие эффективность применения КПР для решения указанных оптических задач.

## Введение

Преобразование Радона (ПР) известно с 1917 года. Оно широко применяется в обработке изображений, томографии, геодезии, медицине [1-5]. Двумерное преобразование Радона ставит в соответствие функции двух переменных средние значения этой функции на всевозможных прямых линиях, лежащих в плоскости:

$$R[f](p, \theta) = \iint_{R^2} f(x, y) \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy, \quad (1)$$

где  $(p, \theta)$  – полярные координаты, описывающие прямую:  $p$  – расстояние от начала координат до прямой,  $\theta$  – угол наклона прямой к оси  $Ox$ .

Обобщением ПР является преобразование Хоу [6], которое ставит в соответствие функции средние значения этой функции на всевозможных линиях (необязательно прямых). Преобразование Хоу также имеет достаточно много применений. Например, оно применяется для компьютерной обработки видеоизображений листьев растений с целью определения площади листовой поверхности [7]. В этой работе функции ставятся в соответствие интегралы по кривым, имеющим форму эллипса. Существуют также медицинские приложения преобразования Хоу. В работе [8] оно используется для выделения и подавления изображений ребер на флюорограммах. В работе [9] преобразование Хоу применяется для сегментации полутоновых изображений.

В данной статье будет рассматриваться частный случай преобразования Хоу – преобразование, ставящее в соответствие функции двух переменных интегралы этой функции по окружностям в плоскости.

В [10] введено некоторое обобщение преобразования Радона – усреднение по сферам. Усреднение по сферам используется в радарх с синтезированной апертурой (SAR) и в акустической навигации (SONAR – sound navigation and ranging).

Для двумерного случая в [11, 12] приведены теоремы о взаимно-однозначном соответствии между функцией двух переменных и всеми интегралами по окружностям, лежащими в плоскости. То есть в [11, 12] введено в рассмотрение кольцевое преобразование Радона (КПР), хотя оно там так и не называется. Заметим, что КПР можно определить разными спо-

собами, потому что усреднение по всем окружностям в плоскости является переопределенным, так как набор всех окружностей имеет размерность три, что больше размерности двумерного пространства. В [13] рассматривается КПР как усреднение по всем окружностям, имеющим одну общую точку в центре координат, в [12] КПР определено как среднее по окружностям разного радиуса, центры которых лежат на некоторой фиксированной окружности с центром в начале координат. В [14, 15] рассматривается КПР как среднее по всем окружностям фиксированного радиуса на плоскости.

В отличие от КПР, определенного в [12, 13], КПР, определенное в [14, 15], является сверткой:

$$R_\gamma(\xi, \eta) = \iint_{R^2} f(x, y) \delta\left(\gamma - \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}\right) dx dy, \quad (2)$$

а потому может быть реализовано оптически с помощью Фурье-коррелятора.

На этом свойстве основано оптическое выполнение традиционного преобразования Радона [16].

В данной работе будут рассмотрены еще два применения КПР – оконтуривание фазы и визуализация точек фазовой сингулярности световых полей.

## 1. Оконтуривание фазы световых полей

### 1.1. Визуализация фазовых неоднородностей светового поля

Многие интересные для микроскопии объекты обладают высокой прозрачностью и поэтому совсем или почти совсем не поглощают свет (например, бесцветные бактерии). При прохождении света через такой объект основным эффектом будет появление сдвига фазы, величина которого различна в разных точках. Подобный эффект, конечно, нельзя наблюдать с помощью обычного микроскопа и приемника, реагирующего на интенсивность света.

Визуализация фазовых неоднородностей осуществляется с помощью Фурье-коррелятора при размещении в частотной плоскости фазового фильтра Цернике (такое устройство называют теньевым прибором [17]). Пусть на входе имеется фазовое световое поле со слабой модуляцией фазы ( $|\phi(x)| \ll 1$ ):

$$f(x) = \exp[i\phi(x)]. \quad (3)$$

Тогда (3) можно разложить в ряд с точностью до квадратичного члена:

$$\exp[i\varphi(x)] \approx 1 + i\varphi(x). \quad (4)$$

В частотной плоскости коррелятора получим комплексную амплитуду

$$\mathfrak{F}\{\exp[i\varphi(x)]\} = \delta(\xi) + i\Phi(\xi), \quad (5)$$

где  $\Phi(\xi)$  – Фурье-образ  $\varphi(x)$ .

Фильтр Цернике имеет пропускание вида:

$$H(\xi) = \begin{cases} i, & |\xi| < \Delta, \\ 1, & |\xi| > \Delta, \end{cases} \quad (6)$$

которое можно реализовать с помощью прозрачной пластины с показателем преломления  $n$ , имеющей ступеньку высотой  $z$ :

$$z = \frac{\lambda}{4(n-1)}, \quad (7)$$

где  $\lambda$  – длина волны света. Диаметр ступеньки  $2\Delta$  равен ширине функции импульсного отклика линзы коррелятора. С учетом (5) и (6) на выходе коррелятора получим комплексную амплитуду вида

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{\exp[i\varphi(x)]\} \cdot H\} &= \\ &= \mathfrak{F}\{i\delta(\xi) + i\Phi(\xi)\} = i[1 + \varphi(u)] \end{aligned} \quad (8)$$

и интенсивность

$$I(\xi) = 1 + 2\varphi(u) + \varphi^2(u) \approx 1 + 2\varphi(u). \quad (9)$$

Из (9) видно, что распределение интенсивности света на выходе коррелятора с фильтром Цернике пропорционально фазе исходного светового поля, т.е. модуляция интенсивности на изображении зависит от фазы изображения, а это и есть эффект визуализации фазы. Однако при больших значениях фазовой функции  $\varphi(u)$  приближенное равенство (9) будет нарушено и интенсивность на выходе коррелятора будет зависеть от фазы светового поля нелинейно.

### 1.2. Визуализация фазового объекта с помощью малой дефокусировки

Для малой дефокусировки можно либо сдвинуть выходную плоскость Фурье-коррелятора  $E(x, y)$ , либо использовать фильтр  $H(\xi, \eta)$  в виде слабой параболической линзы:

$$H(\xi, \eta) = \exp[i\alpha(\xi^2 + \eta^2)], \quad (10)$$

где  $\alpha \ll 1$ .

Тогда для Фурье-коррелятора получим:

$$\begin{aligned} E &= \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}\{f\} \cdot H\} = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}\{f\} \cdot \exp(i\alpha r^2)\} \approx \\ &\approx \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}\{f\} \cdot (1 + i\alpha r^2)\} = \\ &= \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}\{f\}\} + i\alpha \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}\{f\} \cdot r^2\} = \\ &= f + i\alpha \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}\{f\} \cdot (\xi^2 + \eta^2)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если  $g(x, y)$  – Фурье-образ  $G(\xi, \eta)$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iint_{R^2} G(\xi, \eta) \exp[i(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta = \\ &= -\iint_{R^2} \xi^2 G(\xi, \eta) \exp[i(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta = \\ &= -\mathfrak{F}^{-1}\{\xi^2 G(\xi, \eta)\} \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получим:

$$E = f - i\alpha \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right). \quad (13)$$

Если объектная функция – фазовая, т.е.

$$f(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)], \quad (14)$$

то ее вторая производная имеет вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f \left[ i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (15)$$

Тогда

$$\begin{aligned} E &= \exp(i\varphi) + \\ &+ \alpha \exp(i\varphi) \left\{ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + i \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} = \\ &= \exp(i\varphi) \cdot \left\{ \left[ 1 + \alpha \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] + \right. \\ &\left. + i\alpha \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Интенсивность после дефокусировки будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} I = |E|^2 &= \left[ 1 + \alpha \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right]^2 + \\ &+ \alpha^2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]^2 \approx \\ &\approx 1 + 2\alpha \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Из выражения (17) видно, что интенсивность после дефокусировки будет пропорциональна лапласиану от фазы. В точках перегиба вторая производная будет равна нулю, а в точках экстремума фазы максимальна.

Преимущество метода дефокусировки перед фильтром Цернике в том, что не требуется предположения о «слабости» фазового объекта ( $\varphi \ll 1$ ) и вместо фильтра Цернике можно использовать обычную сферическую «слабую» (длиннофокусную) линзу или просто сместить выходную плоскость коррелятора.

Недостаток метода дефокусировки в том, что интенсивность на выходе коррелятора пропорцио-

нальна не самой фазовой функции, а ее вторым производным.

### 1.3. Оконтуривание фазы светового поля с помощью кольцевого преобразования Радона

Пусть объектная функция фазовая:

$$f(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)]. \quad (18)$$

Рассмотрим ее КПП-образ:

$$R_\gamma(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi + \gamma \cos t, \eta + \gamma \sin t) dt. \quad (19)$$

В подынтегральном выражении стоит значение функции в точке, отстоящей от точки  $(\xi, \eta)$  на расстоянии  $\gamma$  в направлении  $\vec{p} = (\cos t, \sin t)$ . Разложим функцию  $f(x, y)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(\xi, \eta)$  по направлению  $\vec{p}$ :

$$\begin{aligned} f(\xi + \gamma \cos t, \eta + \gamma \sin t) = \\ = \left[ f + \gamma \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + \gamma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{p}^2} + \dots \right]_{\xi, \eta}. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражения для первой и второй производных по направлению  $\vec{p}$  имеют следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \cos t \frac{\partial f}{\partial x} + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{p}^2} = \cos^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \sin 2t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}. \quad (22)$$

При небольших значениях  $\gamma \ll 1$  в выражении (20) будем учитывать только первые три слагаемых. Подставляя (21) и (22) в (20), получим:

$$\begin{aligned} f(\xi + \gamma \cos t, \eta + \gamma \sin t) = \\ = \left[ f + \gamma \left( \cos t \frac{\partial f}{\partial x} + \sin t \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right]_{\xi, \eta} + \\ + \gamma^2 \left[ \cos^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \sin 2t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]_{\xi, \eta}. \end{aligned} \quad (23)$$

При интегрировании по  $t$  от 0 до  $2\pi$  в уравнении (19) слагаемые, содержащие  $\cos t$ ,  $\sin t$ ,  $\sin 2t$ , обратятся в нуль, поэтому (19) примет вид:

$$\begin{aligned} R_\gamma(\xi, \eta) \approx \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi f + \pi \gamma^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right]_{\xi, \eta} = \\ = \left[ f + \frac{\gamma^2}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right]_{\xi, \eta}. \end{aligned} \quad (24)$$

Вычислим частные производные первого порядка от фазовой функции (18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \exp[i\varphi(x, y)] = \\ = i \exp[i\varphi(x, y)] \frac{\partial \varphi}{\partial x} = i f \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогично,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i f \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (26)$$

Далее вычислим ее частные производные второго порядка.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = i \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \\ = i \left[ i f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] = f \left[ i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f \left[ i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (28)$$

Подставляя (27)-(28) в (24), получим:

$$\begin{aligned} R_\gamma(\xi, \eta) \approx f(\xi, \eta) \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\gamma^2}{2} \left[ i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]_{\xi, \eta} \right\} = \\ = \exp[i\varphi(\xi, \eta)] \cdot \left\{ 1 - \frac{\gamma^2}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]_{\xi, \eta} + \right. \\ \left. + i \frac{\gamma^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right]_{\xi, \eta} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Умножая  $R_\gamma(\xi, \eta)$  на комплексно-сопряженное значение и пренебрегая слагаемыми порядка  $\gamma^4$ , получим:

$$\begin{aligned} |R_\gamma(\xi, \eta)|^2 = 1 - \gamma^2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]_{\xi, \eta} = \\ = 1 - \gamma^2 \|\nabla \varphi(\xi, \eta)\|^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Из выражения (30) видно, что  $|R_\gamma(\xi, \eta)|^2$  находится в линейной зависимости с квадратом модуля градиента фазы объектной функции, и принимает наибольшее значение в тех точках, где фазовая функция постоянна. Таким образом, КПП может быть использовано для оконтуривания фазы.

На рис. 1(а) изображена некоторая фазовая функция (128x128 отсчетов). Для численного эксперимента была выбрана кусочно-постоянная функция с фазой 0 (белые квадраты) и  $\pi$  (черные квадраты). На рис. 1(б) показан модуль КПП со значением параметра КПП  $\gamma = 1$  отсчет.

Из рис. 1(б) видно, что действительно при малых значениях параметра КПП  $\gamma$  интенсивность КПП-образа минимальна в местах резкого изменения фазы входной функции.

Преимущество КПП-метода по сравнению с методом дефокусировки в том, что выходная интен-

сивность зависит от первых, а не вторых производных от фазовой функции.

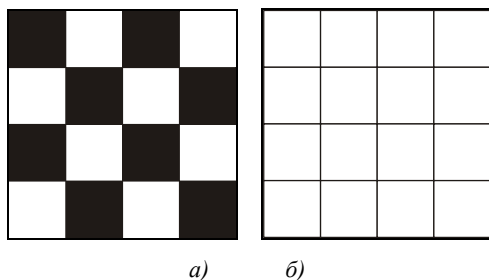


Рис. 1. Оконтуривание фазы: входная фаза (черный цвет -  $\pi$ , белый цвет - 0) (а), интенсивность КПП-образа при  $\gamma = 1$

(белый цвет – максимальная интенсивность, черный цвет – минимальная интенсивность) (б)

Недостатком КПП-метода является то, что применяется энергетически неэффективный амплитудный фильтр.

В тех областях, где фаза резко меняется, рассчитывался контраст по следующей формуле:

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (31)$$

$$I = |R_{\gamma}(\xi, \eta)|^2, \quad (32)$$

где  $I_{\min}$  и  $I_{\max}$  – минимальная и максимальная интенсивность в области перепада фазы.

Была исследована зависимость контраста от величины фазового скачка (от 0 до  $360^\circ$ ) (рис. 2). Из рис. 2 видно, что контраст изображения максимален при разности фаз в двух соседних точках, близкой к  $\pi$ .

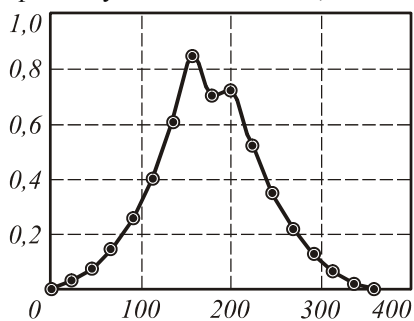


Рис. 2. Зависимость контраста от величины фазового скачка

## 2. Визуализация точек фазовой сингулярности

Одним из современных и быстро развивающихся разделов оптики является сингулярная оптика, объектом исследования которой являются волновые фронты с фазовыми сингулярностями. В качестве примера фазовой сингулярности можно назвать оптические «вихри».

Оптический «вихрь» представляет собой дефект фазы волнового фронта, где волновой фронт обретает винтовую (спиралевидную) форму.

Первыми работами в области спиралевидных волновых фронтов и способов их формирования могут считаться работы [18, 19]. В работах [20, 21] теория волн с фазовыми сингулярностями получила дальнейшее развитие. В [20] показано, что волна, имеющая «вихри», является одним из возможных решений скалярного волнового уравнения.

В простейшем случае выражение для оптического «вихря» имеет вид  $r \cdot \exp(in\phi)$ , где  $n$  – порядок, положительный для правосторонних «вихрей» и отрицательный для левосторонних [22].

Примером световых полей с «вихрями» являются широко известные лазерные пучки Гаусса-Лагерра. Благодаря винтообразной структуре волновых фронтов, эти пучки обладают свойством передавать угловой момент поля в свободном пространстве, что может использоваться для создания «ловушек» микрочастиц и оптических «гаечных ключей» [23-26]. В этом разделе рассматривается применение КПП для анализа световых полей, проверки их на наличие «вихрей», определения их расположения и порядка.

Пусть объектная функция  $f(x, y)$  представляет собой композицию  $K$  «вихрей», т.е. спиралевидных фаз порядков  $n_1, n_2, \dots, n_K$  с точками фазовой сингулярности  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_K, y_K)$ :

$$f(x, y) = \prod_{k=1}^K \exp\left(in_k \arctg \frac{y - y_k}{x - x_k}\right). \quad (33)$$

Тогда функция  $f(x, y)$  – фазовая с фазой  $\phi(x, y)$ :

$$\phi(x, y) = \sum_{k=1}^K n_k \arctg \frac{y - y_k}{x - x_k}. \quad (34)$$

Для получения выражения для интенсивности на выходе воспользуемся формулой (30). Для этого получим частные производные фазы (34).

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \sum_{k=1}^K \left\{ n_k \cdot \left[ 1 + \left( \frac{y - y_k}{x - x_k} \right)^2 \right]^{-1} \cdot \frac{y - y_k}{(x - x_k)^2} \right\} =$$

$$= - \sum_{k=1}^K \left[ n_k \frac{y - y_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \right]. \quad (35)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{k=1}^K \left\{ n_k \cdot \left[ 1 + \left( \frac{y - y_k}{x - x_k} \right)^2 \right]^{-1} \cdot \frac{1}{x - x_k} \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^K \left[ n_k \frac{x - x_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \right]. \quad (36)$$

Из (35) и (36) видно, что в окрестностях точек фазовой сингулярности частные производные стремятся к бесконечности:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_k, y_k)} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \infty. \quad (37)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_k, y_k)} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \infty. \quad (38)$$

Из этого следует, что в центрах «вихрей» выражение (30) принимает минимальные значения.

Для эксперимента была смоделирована фазовая функция с пятью спиральями. Изображения (128x128 отсчетов) отдельных «вихрей» (вещественная часть) показаны на рис. 3. При произведении этих «вихрей» было получено изображение на рис. 4 (показана фаза). После применения КПР было получено изображение с интенсивностью, показанной на рис. 5. Из рис. 5 видно, что точки с минимальной интенсивностью соответствует точкам фазовой сингулярности.

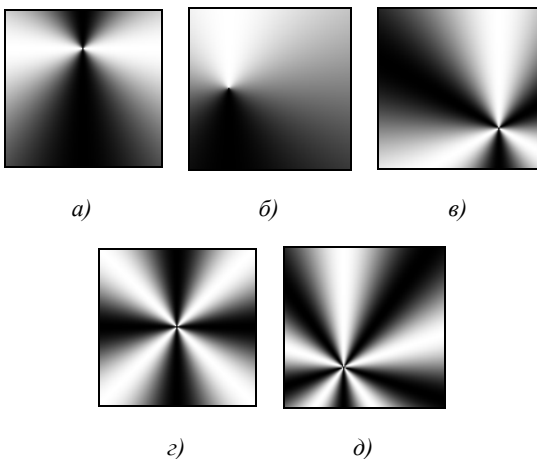


Рис. 3. Отдельные изображения функций со спиралевидной фазой (вещественная часть): 2-го порядка с центром в точке (32, 64) (а), 1-го порядка с центром в точке (64, 32) (б), 3-го порядка с центром в точке (96, 96) (в), 4-го порядка с центром в точке (64, 64) (г), 5-го порядка с центром в точке (96, 48) (д)

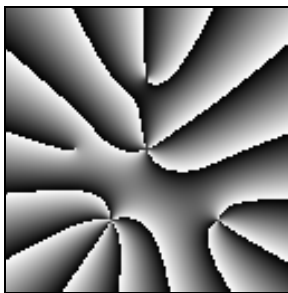


Рис. 4. Произведение изображений функций со спиральной фазой (фаза)

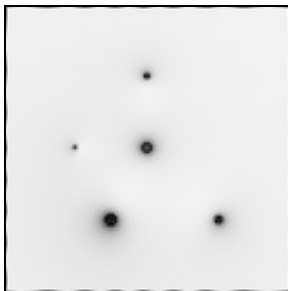


Рис. 5. Модуль КПР-образа при  $\gamma = 1$  отсчет: черный цвет – минимальная интенсивность, белый цвет – максимальная интенсивность

Из формул (35) и (36) легко заметить, что частные производные фазы светового поля не только стремятся к бесконечности в окрестностях точек фазовой сингулярности, но и пропорциональны порядку «вихрей». Так, например, в окрестности точки фазовой сингулярности второго порядка частные производные стремятся к бесконечности в два раза быстрее, чем в окрестности точки фазовой сингулярности первого порядка. Именно этим можно объяснить различия в размерах пиков, соответствующих точкам фазовой сингулярности разных порядков на рис. 5.

На рис. 6 приведена зависимость энергии в окрестностях точек фазовой сингулярности от их порядков. По горизонтальной оси отложен порядок «вихрей», по вертикальной – энергия, рассчитанная, как суммарная интенсивность в некоторой окрестности пика (размером в несколько отсчетов), на КПР-образе.

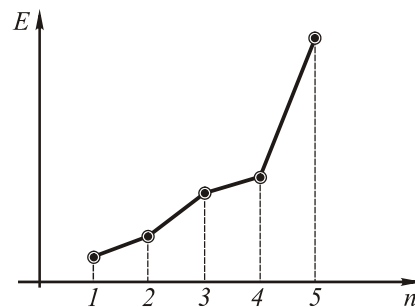


Рис. 6. Зависимость энергии в окрестностях точек фазовой сингулярности от их порядков

Из рис. 6 видно, что действительно энергия функции, полученной после выполнения КПР, в окрестностях точек фазовой сингулярности пропорциональна квадрату от порядков фазовой сингулярности.

### Заключение

В данной работе получены следующие результаты:

- Численно показана возможность использования КПР для оконтуривания фазы и для обнаружения точек фазовой сингулярности световых полей.
- Показано, что энергия функции, полученной после выполнения КПР от светового поля с «вихрями», в окрестностях точек фазовой сингулярности пропорциональна квадрату величины порядков фазовой сингулярности.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № НШ-1007.2003.01, и также российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» («BRHE») (грант CRDF REC-SA-014-02).

### Литература

1. Helgason S. The Radon transform, Boston, MA: Birkhauser, 1980.
2. Anger B., Portenier C. Radon integrals, Boston, MA: Birkhauser, 1992.

3. Radon J. Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte laengs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber. Verh. Sachs. Aned. Wiss., 1917. V. 69. P. 262-277.
4. Deans S.R. The Radon Transform and some of its Applications, New York, Willey Interscience (1982).
5. Rann A.G., Katsevich A.I. The Radon Transform and Local Tomography, CRC Press, Boca Raton (1996).
6. Hough P.V.C. Method and Means for Recognizing Complex Patterns // U.S.Patent 3069654, 1962.
7. Chien C.-F., Lin T.-T. Leaf area measurement of selected vegetable seedlings using elliptical hough transform // Trans.ASAE.-St.Joseph (Mich.), 2002, Vol. 45, № 5. P. 1669-1677.
8. Орлов А.А., Садыков С.С., Жизняков А.Л. Применение преобразования Хоха для выделения и подавления изображений ребер на флюорограммах // Материалы конференции РОАИ-5-2000, Самара, 2000.
9. Vershok D.A. The Algorithm of Segmentation of Gray-scale Images // The 2nd International Conference on Neural Networks and Artificial Intelligence, Minsk, 2001.
10. John F. Plane wave and Spherical Means, New York, Willey and Sons, 1955.
11. Zalcman L. Offbeat integral Geometry // Amer. Math. Monthly. 1980. V. 17. P. 161-175.
12. Quinto E.I. Radon Transforms on curves in the plane // Lecture Notes in Appl. Math. 1994. V. 30. P. 231-244.
13. Yagle A.E. Inversion of spherical means using inversion and Radon transforms // Inverse Problems. 1992. V. 8. P. 949-964.
14. Котляр В.В., Ковалев А.А. Кольцевое преобразование Радона // Компьютерная оптика. 2003. № 25. С. 126-131.
15. Kotlyar V.V., Kovalev A.A. Circular Radon transform // Pattern Recognition and Image Analisys. 2004. V. 14. № 4. С. 519-528.
16. Котляр В.В., Ковалев А.А. Пространственный фильтр для оптического выполнения преобразования Радона // Материалы научно-практической конференции «Голография в России и за рубежом. Наука и практика», Москва, 19-22 октября 2004. С. 45-47.
17. Максутов Д.Д. Изготовление и исследование астрономической оптики, М.:Наука, 1984.
18. Bryngdahl O. Radial- and circular-fringe interferograms // J. Opt. Soc. Am. 1973. V. 63. P. 1098-1104.
19. Vaughan J.M., Willetts D.V. Interference properties of a light beam having helical wave surface // Opt. Comm. 1979. V. 30. P. 263-267.
20. Nye J.F., Berry M.V. Dislocation in wave trains // Proc. R. Soc. London 1974. V. A336. P. 165-190.
21. Berry M.V. Singularities in wave and rays, in Les Houches Lecture Series Session XXXV, eds. R. Balian, M. Klaeman and J.-P. Poirier (North-Holland, Amsterdam), 1981. P. 453-481.
22. Basistiy I.V., Marienko I.G., Soskin M.S., Vasnetsov M.V. Optical wavefront dislocation // SPIE Proceedings. Nonlinear Dynamics in Lasers, edited by N.B. Abraham and Ya.I. Khanin, 1996. V. 2792. P. 172-178.
23. Dufresne E.R., Grier D.G. Optical tweezer arrays and optical substrates created with diffractive optical elements // Rev. Sci. Instr. 1998. V.69. №. 5. P.1974-1977.
24. . Dufresne E.R. et al. Computer-generated holographic optical tweezer arrays // Rev. Sci. Instr. 2001. V.72. P.1810.
25. Cojoc D. et al. Design and fabrication of diffractive optical elements for optical tweezer arrays by means of e-beam lithography // Microelectronic Engineering. 2002. V. 61-62. P. 963-969.
26. Padgett M.J., Allen L. The angular momentum of light: optical spanners and the rotational frequency shift // Opt. Quant. Electronics. 1999. V. 31. P. 1-12.