АЛГОРИТМ МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРКОМПЛЕКСНОГО ДПФ, РЕАЛИЗУЕМЫЙ В КОДАХ ГАМИЛЬТОНА-ЭЙЗЕНШТЕЙНА

Алиев М. В. [1], Чичева М. А. [2], Алиева М. Ф. [1]

[1] *Адыгейский государственный университет*
[2] *Институт систем обработки изображений РАН*

Аннотация

В работе синтезируется «совмещенный» алгоритм многомерного гиперкомплексного дискретного преобразования Фурье вещественного сигнала по основанию три с представлением данных в обобщенных кодах Гамильтона-Эйзенштейна. Получена сложность арифметических операций в коммутативно-ассоциативной гиперкомплексной алгебре и ее представлении в обобщенных кодах. Приводятся оценки вычислительной сложности синтезируемого алгоритма.

Введение

В работе синтезируется «совмещенный» алгоритм многомерного гиперкомплексного дискретного преобразования Фурье (ГДПФ) вещественного сигнала:

$$\tilde{F}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{n_1,\ldots,n_d=0}^{N-1} f(\boldsymbol{\nu}) W(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\mu}=(m_1,\ldots,m_d)$, $m_1,\ldots,m_d=0,1,...,N-1$, $I=\{1,\ldots,d\}$, $W(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})=\prod_{i\in I}\omega_i^{m_i n_i}$, $\omega_i=e^{2\pi\varepsilon_i/N}$, а $\varepsilon_1^2=...=\varepsilon_d^2=-1$, $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d$ – образующие элементы некоторой 2^d-мерной коммутативно-ассоциативной гиперкомплексной алгебры (КГА).

Как показано в ряде работ [3, 4] для синтеза быстрых алгоритмов ДПФ длины $N=3^p$, $p\in\mathbf{N}$ предпочтительней использовать представление комплексных чисел и кватернионов в так называемых циклотомических кодах ($\gamma-$ кодах). В настоящей работе производится обобщение данного представления на случай многомерной КГА.

1. Коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные алгебры

Коммутативно-ассоциативной алгеброй $\mathbf{B}_d$, согласно [1], будем называть 2^d–мерную алгебру над $\mathbf{R}$ с базисом:

$$\Lambda=\left\{\prod_{i\in I}\varepsilon_i^{\alpha_i},\ \alpha_i=0,1\right\}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_i^0=1$, $\varepsilon_i^1=\varepsilon_i$ – образующие элементы со следующим правилом умножения:

$$\varepsilon_i\varepsilon_j=\varepsilon_j\varepsilon_i,\ \ \varepsilon_i^2=\beta_i,\ i,j\in I. \tag{3}$$

Алгебра $\mathbf{B}_d$ представима в виде прямой суммы 2^{d-1} комплексных алгебр [1].

Введем следующие обозначения

$$\gamma_i\in\mathbf{C}(\varepsilon_i),\ \gamma_i=e^{2\pi\varepsilon_i/3},\ i\in I, \tag{4}$$

а гиперкомплексные числа $\overline{\gamma}_i$ есть соответствующие образы в $\mathbf{B}_d$ элементов, сопряженных в $\mathbf{C}(\varepsilon_i)$ элементам γ_i.

Определение 1. Упорядоченный набор вещественных чисел $\left(\eta_0,\ldots,\eta_i,\ldots,\eta_{2^d-1}\right)$ таких, что:

$$h=\sum_{i\in T}\eta_i\cdot\prod_{j=1}^{d}\gamma_j^{\iota_j+1}, \tag{5}$$

где $T=\{0,\ldots,2^d-1\}$, $i=\overline{\iota_1\ldots\iota_d}$, $\iota=\{0,1\}$ назовем обобщенным $\gamma-$ кодом элемента h и будем обозначать $\langle h\rangle$.

Множество

$$\Upsilon=\left\{\Gamma_i=\prod_{j=1}^{d}\gamma_j^{\iota_j+1},\ i=\overline{\iota_1\ldots\iota_d},\ \iota_j=\{0,1\}\right\}, \tag{6}$$

назовем базисом представления алгебры $\mathbf{B}_d$, а полученную алгебру обозначим $\widehat{\mathbf{B}}_d$. Данное представление элементов алгебры $\mathbf{B}_d$ однозначно и произвольный элемент $\langle g\rangle\in\widehat{\mathbf{B}}_d$ примет вид:

$$\langle g\rangle=\sum_{i\in T}\xi_i\Gamma_i\ .$$

Пусть $\psi(j,t)=\prod_{i\in I}(-1)^{h_i(j,t)}$, где функция h_i - умножение i-го разряда двоичного представления j,t. Тогда множество из 2^d отображений σ_j:

$$\sigma_j:\mathbf{B}_d\to\mathbf{B}_d, \tag{7}$$

таких, что $\sigma_j(\chi)=\sum_{i\in T}c_i\psi(j,i)E_i$, где $\chi\in\mathbf{B}_d$, $c_i\in\mathbf{R}$, $j\in T$, является множеством автоморфизмов алгебры $\mathbf{B}_d$.

Заметим, что $\sigma_j(\Gamma_i)=\Gamma_{i\oplus j}$, где $\oplus$ – поразрядное сложение по основанию 2, так как $\sigma_j(\gamma_i)=\gamma_i^{1+h_i(j,j)}=\overline{\gamma}_i$, $i\in I$, $j\in T$. Тогда автоморфизмы (7) алгебры $\mathbf{B}_d$ над $\mathbf{R}$ приводят к следующему преобразованию кодов

$$\langle\sigma_j(g)\rangle=\sum_{i\in T}\xi_{i\oplus j}\Gamma_{i\oplus j}, \tag{8}$$

причем переход от гиперкомплексного элемента к его автоморфному образу реализуется в кодах тривиально, путем перестановки, и не требует дополнительных вещественных умножений.

В работе [1] показано, что для любого $d \ge 1$ существует только две различных коммутативно-ассоциативных алгебры: алгебра $\mathbf{B}_d^+$, в которой $\beta_i = 1$ для каждого $i \in I$ и алгебра $\mathbf{B}_d^-$, в которой существует $i \in I$ такое, что $\beta_i = -1$.

Будем считать, что при оценке вычислительной сложности рассматриваемых алгоритмов один из сомножителей предполагается постоянным, поэтому все арифметические операции над его компонентами могут быть реализованы заранее. Умножения на степени числа 2 являются более простыми операциями, чем сложения и умножения и не учитываются при анализе вычислительной сложности алгоритмов ДПФ [2, 4].

Теорема 1. Умножение двух произвольных элементов в алгебре $\mathbf{B}_d^-$ можно реализовать за $3 \cdot 2^{d-1}$ вещественных умножений и $(4d-1) \cdot 2^{d-1}$ вещественных сложений.

Доказательство. Пусть $g = \sum_{t \in T} \xi_t E_t$, $h = \sum_{t \in T} \eta_t E_t$, $g, h \in \mathbf{B}_d^-$ и η_0^{d-1}, η_1^{d-1}, ξ_0^{d-1}, $\xi_1^{d-1} \in \mathbf{B}_{d-1}^-$ тогда данные элементы можно представить в следующем виде:

$$h = \eta_0^{d-1} + \eta_1^{d-1} E, \quad g = \xi_0^{d-1} + \xi_1^{d-1} E,$$

где, согласно [1], $E^2 = 1$. Тогда

$$h \cdot g = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\xi^+)(\eta^+) + (\eta^-)(\xi^-) \\ (\xi^+)(\eta^+) - (\eta^-)(\xi^-) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\xi^{\pm} = \xi_0^{d-1} \pm \xi_1^{d-1}$, $\eta^{\pm} = \eta_0^{d-1} \pm \eta_1^{d-1}$. Следовательно, требуется выполнить два умножения элементов КГА размерности 2^{d-1} и четыре сложения элементов КГА размерности 2^{d-1}. Применяя те же самые рассуждения к $\mathbf{B}_{d-1}$ и далее, получаем алгоритм вычисления, на последнем шаге которого производится умножение элементов алгебры $\mathbf{C}$ (комплексных чисел). На k-ом шаге имеем 2^k узлов, то есть 2^k арифметических операций в алгебрах $\mathbf{B}_{d-k}$. Для каждого шага значения $\left(\eta_0^{d-k} + \eta_1^{d-k}\right)$ и $\left(\eta_0^{d-k} - \eta_1^{d-k}\right)$ могут быть рассчитаны заранее. Тогда количество вещественных умножений можно сократить, используя на последнем шаге заранее вычисленное произведение соответствующих констант. Следовательно, мультипликативная сложность вычисления произведения двух произвольных элементов алгебры $\mathbf{B}_d^-$ составляет $3 \cdot 2^{d-1}$ вещественных умножений.

Аналогичными рассуждениями получаем, что аддитивная сложность умножения двух элементов алгебры $\mathbf{B}_d^-$ составляет $(4d-1) \cdot 2^{d-1}$ вещественных сложений.

Теорема 2. Пусть $\langle g \rangle = \left(\xi_0, \ldots, \xi_{2^d-1}\right)$, $\langle h \rangle = \left(\eta_0, \ldots, \eta_{2^d-1}\right)$, тогда умножения $\langle hg \rangle$ можно выполнить посредством 3^d вещественных умножений и $3\left(3^d - 2^d\right)$ вещественных сложений.

Доказательство. Заметим, что в обобщенных кодах также имеет место соотношение:

$$\langle g \rangle = \alpha\gamma_i + \beta\overline{\gamma}_i, \ \langle h \rangle = a\gamma_i + b\overline{\gamma}_i, \tag{10}$$

где $\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle, \langle a \rangle, \langle b \rangle \in \widehat{\mathbf{B}}_{d-1}$. Тогда умножение $\langle hg \rangle$ можно реализовать за 3 умножения и за 3 сложения обобщенных кодов размерности 2^{d-1}. Получаем алгоритм вычисления умножения в обобщенных кодах, аналогичный синтезированному в теореме 1. Суммируя сложность на каждом шаге, получаем, что умножение двух произвольных элементов алгебры $\widehat{\mathbf{B}}_d$ реализуется посредством 3^d вещественных умножений и $\sum_{i=1}^{d} 3^i 2^{d-i} = 3\left(3^d - 2^d\right)$ вещественных сложений, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Пусть $g \in \widehat{\mathbf{B}}_k$, $h \in \widehat{\mathbf{B}}_d$, где $k < d$. Тогда умножение элементов $\langle g \rangle$ и $\langle h \rangle$ реализуется посредством $3^k 2^{d-k}$ вещественных умножений и $3 \cdot 2^{d-k} \cdot \left(3^k - 2^k\right)$ вещественных сложений.

2. Алгоритм многомерного ГДПФ вещественного сигнала по основанию три

Пусть $f(\mathbf{v}) \in \mathbf{R}$ - преобразуемый многомерный $\left(N^d\right)$ – массив, $N = 3^r$. Его гиперкомплексный спектр определяется соотношением (1). Константы $W(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v})$, ω_i считаются заданными обобщенными кодами Гамильтона-Эйзенштейна.

Спектр (1) можно представить в форме:

$$\tilde{F}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{r_1, \ldots, r_d = 0}^{2} \tilde{F}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\mu}) W(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\rho}),$$

где

$$\tilde{F}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{n_1, \ldots, n_2 = 0}^{N/3 - 1} f_{\boldsymbol{\rho}}(3\mathbf{v} + \boldsymbol{\rho}) W(\boldsymbol{\mu}, 3\mathbf{v} + \boldsymbol{\rho}).$$

Значения $\tilde{F}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\mu})$ достаточно полностью вычислять для векторов $\boldsymbol{\mu} \in \Delta$, где Δ - фундаментальная область:

$$\Delta = \left\{\boldsymbol{\mu} : 0 \le m_1, \ldots, m_d \le N/3 - 1\right\}.$$

Значения $\tilde{F}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a})$ для векторов $\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}$, лежащих в областях, полученных из области Δ аддитивными сдвигами на векторы

$$\mathbf{a}=\left(\alpha_1 \frac{N}{3},\ldots,\alpha_d \frac{N}{3}\right), \alpha_i=0,1,2\ ,$$

отличаются от соответствующих $\tilde{F}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\mu})$ лишь множителями $\gamma_1,\ldots,\gamma_d$, $\overline{\gamma}_1,\ldots,\overline{\gamma}_d$, и не требуют для вычисления дополнительных вещественных операций. При вычислении $\tilde{F}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\mu})$ достаточно ограничиться значениями $\boldsymbol{\mu}\in\Delta_0\subset\Delta$:

$$\Delta_0=\left\{\boldsymbol{\mu}: 0\le m_1,\ldots,m_d \le \frac{1}{2}\left(N/3+1\right)\right\}\ .$$

Значения спектра в остальных точках области Δ вычисляются с использованием тождеств:

$$\sigma_{\boldsymbol{\rho}}\left(\tilde{F}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\mu})\omega_1^{a\mu}\omega_2^{b\upsilon}\right)\prod_{i\in I}\gamma_i^{\alpha_i+1}=$$
$$=\tilde{F}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\mu})\left(N/3\cdot\mathbf{a}+\boldsymbol{\mu}\right)W\left(N/3\cdot\mathbf{a}+\boldsymbol{\mu}\right)$$

Умножения на $\prod_{i\in I}\gamma_i^{\alpha_i}$ и выполнение отображений $\sigma_{\boldsymbol{\rho}}$ не требуют нетривиальных вещественных умножений.

Учитывая сложность арифметических операций в обобщенных γ–кодах, получаем:

$$M_3^d\left(N^d\right)=\frac{4^d-1}{3^d}N^d\log_3 N+O\left(N^d\right), \qquad (11)$$

$$A_3^d\left(N^d\right)=\frac{4^d-3}{3^{d-1}}N^d\log_3 N+O\left(N^d\right), \qquad (12)$$

$$G_3^d\left(N^d\right)=\frac{4^{d+1}-10}{3^d}N^d\log_3 N+O\left(N^d\right), \qquad (13)$$

где $M_3^d\left(N^d\right)$, $A_3^d\left(N^d\right)$, $G_3^d\left(N^d\right)$ соответственно мультипликативная, аддитивная и общая сложность алгоритма.

Заключение

Предлагаемое представление КГА позволяет синтезировать алгоритмы ГДПФ по основанию три произвольной размерности входного сигнала. При этом с ростом размерности сложность алгоритма возрастает достаточно медленно.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ, Администрации Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE); а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проекты №№ 03-01-00736, 05-01-96501.

Литература

1. Алиев М.В. Быстрые алгоритмы d-мерного ДПФ вещественного сигнала в коммутативно-ассоциативных алгебрах 2d размерности над полем действительных чисел // Компьютерная оптика, 2002. № 24. С. 130-136
2. Алиев М.В., Чичева М.А. Алгоритмы двумерного ДПФ с представлением данных в алгебре гиперкомплексных чисел // Алгебра и линейная оптимизация: Труды международного семинара, посвященного 90-летию со дня рождения С.Н. Черникова. Екатеринбург: УрО РАН, 2002. С. 18-26
3. Фурман Я.А., Кревецкий А.В., Передреев .К. Введение в контурный анализ; приложения к обработке изображений и сигналов // Под ред. Фурмана Я.А. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 592с.
4. Geometric Computing with Clifford Algebra // Sommer G. (Ed.). Berlin: Springer-Verlag, Springer Series in Information Sciences, 2001.
5. Labunets E.V., Labunets V.G., Egiazarian K., Astola J. Hypercomplex moments application in invariant image recognition // Int. Conf. On Image Processing 98, 1998. P. 256–261.