

# ОПТИЧЕСКИЕ ЧИСТЫЕ ВИХРИ И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЫ

Котляр В.В., Хонина С.Н., Алмазов А.А., Соيفер В.А.  
Институт систем обработки изображений РАН,  
Самарский государственный аэрокосмический университет

## Аннотация

Получен счетный набор линейно-независимых решений параксиального волнового уравнения (типа уравнения Шредингера), которые названы гипергеометрическими модами. Эти решения описывают оптические чистые вихри и могут быть сформированы при освещении плоской волной спиральной фазовой пластины. Эти моды отличаются от известных параксиальных мод тем, что их радиус увеличивается как корень квадратный от пройденного расстояния, и что все они при распространении имеют одинаковую фазовую скорость.

## Введение

Давно известны и нашли широкое применение в оптике моды Эрмита-Гаусса (ЭГ) и Лагерра-Гаусса (ЛГ), которые являются частными решениями параксиального волнового уравнения (ПВУ) (или уравнения Шредингера) в декартовых и цилиндрических координатах [1]. Они являются поперечными модами стабильных лазерных резонаторов. Эти моды сохраняют свою структуру (распределение интенсивности и фазы в поперечном сечении), изменяясь при распространении вдоль оптической оси только масштабно. Эти моды также образуют ортогональный базис, так что с помощью линейной комбинации этих мод можно строить другие решения ПВУ.

В цилиндрических координатах ПВУ имеет и другие модовые решения, которые также, как и моды ЭГ и ЛГ, сохраняют свою структуру, меняясь только масштабно. Это параксиальные моды Бесселя [2], которые надо отличать от непараксиальных бездифракционных пучков Бесселя, которые являются решениями уравнения Гельмгольца [3] и здесь не рассматриваются. В отличие от гауссовых мод моды Бесселя имеют бесконечную энергию (хотя конечную интенсивность в каждой точке пространства) и расходятся линейно. То есть эффективный диаметр пучка Бесселя линейно возрастает с увеличением расстояния вдоль оптической оси от начальной плоскости. Известно, что гауссовые моды расходятся параболически, и только при большом удалении от начальной плоскости радиус гауссового пучка растёт тоже линейно с ростом расстояния вдоль оптической оси.

В последнее время были введены в рассмотрение новые модовые решения ПВУ [4-8], которые изучались теоретически [4-7] и экспериментально [8]. Это световые пучки Айнса-Гаусса. Они являются решениями ПВУ в эллиптических координатах. В этих координатах ПВУ решается методом разделения переменных, и решение получается в виде произведения гауссовой функции на многочлены Айнса. Сами же многочлены Айнса являются решениями уравнения Уиттекера-Хилла [2]. Моды Айнса-Гаусса (АГ) являются ортогональным базисом, обобщающим моды ЭГ и ЛГ. Когда эллиптические координаты переходят в цилиндрические (эллипсы переходят в окружности), то моды АГ переходят в моды ЛГ, а при стремлении эксцентриситета эллипсов к беско-

нечности (эллипсы переходят в отрезок прямой) моды АГ переходят в моды ЭГ.

Заметим, что в [9] исследовались астигматические лазерные пучки, названные модами Эрмита-Лагерра-Гаусса, которые также при определенном значении параметра (угла поворота цилиндрической линзы вокруг оптической оси) переходят в обычные моды ЭГ и ЛГ.

В данной работе рассмотрен еще один тип модовых решений ПВУ в цилиндрических координатах, которые также сохраняют свою структуру, изменяясь только масштабно. Расходимость этих мод гиперболическая, то есть при большом удалении от начальной плоскости эти пучки расходятся слабее, чем гауссовые и бесселевые пучки. Так как функции, описывающие эти моды, содержат вырожденную гипергеометрическую функцию, то мы назвали их гипергеометрическими (ГГ) модами. Они как и параксиальные моды Бесселя обладают бесконечной энергией. На практике их можно сформировать только на конечном расстоянии с помощью спиральной фазовой пластины [10-12], освещенной плоской волной. Так как у любой ГГ моды всегда (кроме начальной плоскости) в центре (на оптической оси) имеется нуль интенсивности, характерный для оптических вихрей [13], и ни освещающий пучок, ни сама спиральная пластинка не вносят дополнительной расходимости в пучок, то эти моды можно считать «чистыми» вихрями.

В работе установлено, что найденные решения являются однопараметрическим семейством более общего двухпараметрического класса решений ПВУ в цилиндрических координатах [2]. Впервые о гипергеометрических модах, по видимому, упоминалось в [10,14].

## 2. Чистые вихри – параксиальные световые пучки с минимальной расходимостью

ПВУ в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\left( 2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) E(r, \theta, z) = 0, \quad (1)$$

где  $(r, \theta)$  - поперечные полярные координаты,  $z$  - координата, направленная вдоль оптической оси,  $k$  - волновое число. Если искать радиально-симметричное решение уравнения (1) в виде неполного разделения переменных

$$E(r, \theta, z) = E_1 \left( \frac{r}{r_0 \left[ 1 + (z/z_0)^2 \right]^{1/2}} \right) E_2(\theta) E_3(z), \quad (2)$$

то получатся моды ЛГ [1], которые не изменяют свою интенсивность  $|E(r, \theta, z)|^2$  в системе координат

$$\begin{cases} x = r \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2} \cos \theta, \\ y = r \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2} \sin \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad (3)$$

где  $z_0 = \frac{kr_0^2}{2}$ ,  $r_0$  - радиус гауссова пучка при  $z=0$ ,  $k=2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  - длина волны излучения.

Менее известно другое решение уравнения (1), которое также является решением с неполным разделением переменных, и не меняет своей интенсивности в системе координат [2]:

$$\begin{cases} x = rz \cos \theta, \\ y = rz \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad (4)$$

Линейно-независимыми решениями уравнения (1) такого типа являются параксиальные моды Бесселя:

$$\begin{aligned} \Psi_{m\gamma}(r, \theta, z) = & -\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{(-i)^m k}{z} J_m \left( \frac{k\gamma r}{z} \right) \times \\ & \exp \left[ \frac{ik}{2z} (r^2 + \gamma^2) + im\theta \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

где  $m$  - целое число,  $\gamma > 0$  - модовый параметр (радиус узкой щели), характеризующий масштаб моды Бесселя. Из уравнения (5) видно, что параксиальный пучок Бесселя расходится линейно с увеличением расстояния  $z$ :

$$r_{0m} = \frac{\lambda z \alpha_m}{2\pi\gamma}, \quad (6)$$

где  $r_{0m}$  - радиус первого нулевого кольца моды Бесселя  $m$ -го порядка,  $\alpha_m$  - первый ненулевой корень функции Бесселя,  $J_m(\alpha_m) = 0$ .

Линейная расходимость характерна также для мод ЛГ в дальней зоне. Так как радиус основной моды ЛГ зависит от  $z$  известным образом:

$$r = r_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2}, \quad (7)$$

то при  $z \gg z_0$  получим:

$$r \approx \frac{\lambda z}{\pi r_0}. \quad (8)$$

При  $z$ , стремящемся к нулю, функция (5) стремится к функции

$$\Psi_{m\gamma}(r, \theta, z \rightarrow 0) = \frac{\delta(r - \gamma)}{\sqrt{2\pi r}} \exp(im\theta). \quad (9)$$

Из уравнения (9) видно, что световое поле (5) может быть сформировано с помощью узкой кольцевой щели радиуса  $\gamma$  в непрозрачном экране, а плотность световой энергии в щели должна быть бесконечно большой.

Из уравнений (5) и (6) следует, что при  $z$ , стремящемся к нулю, вблизи экрана радиус бесселевого пучка  $r_{0m}$  также стремится к нулю.

Теперь найдем еще одно решение уравнения (1) с неполностью разделенными переменными, расходимость которого при больших  $z$  будет «слабее», чем расходимость мод ЛГ (8) и параксиальных мод Бесселя (6). Будем искать решение в виде:

$$E(r, \theta, z) = E_n \left( \frac{kr^2}{4z} \right) \exp(in\theta), \quad (10)$$

где  $n$  - целое число. Для функции  $E_n(t)$  где  $t = \frac{kr^2}{4z}$ ,

вместо уравнения (1) получим уравнение:

$$\left[ t \frac{d^2}{dt^2} + (1 - 2it) \frac{d}{dt} - \frac{n^2}{4t} \right] E_n(t) = 0. \quad (11)$$

Будем искать решение уравнения (11) в виде:

$$E_n(t) = \sqrt{t} e^{it} \Psi_n(t), \quad (12)$$

тогда для функции  $\Psi_n(t)$  получим уравнение:

$$\left[ t \frac{d^2}{dt^2} + 2 \frac{d}{dt} + \left( i + t + \frac{1 - n^2}{4t} \right) \right] \Psi_n(t) = 0. \quad (13)$$

Пусть частное решение уравнения (13) имеет вид

$$\Psi_n(t) = iJ_\nu(t) + J_{\nu+1}(t), \quad (14)$$

тогда, подставив выражение (14) в уравнение (13), получим, что  $\nu = (n-1)/2$ ,  $n$  - целое число. Окончательно находим счетное число линейно-независимых решений уравнения (1):

$$\begin{aligned} E_n(r, \theta, z) = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp \left[ -i \frac{\pi(n+2)}{4} \right] \times \\ & \sqrt{\frac{kr^2}{4z}} \exp \left[ \frac{ikr^2}{4z} + in\theta \right] \times \\ & \times \left\{ iJ_{(n-1)/2} \left( \frac{kr^2}{4z} \right) + J_{(n+1)/2} \left( \frac{kr^2}{4z} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

В решении (15) постоянный нормировочный множитель

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp \left[ -i \frac{\pi(n+2)}{4} \right]$$

добавлен из тех соображений, чтобы предел функции  $E_n(r, \theta, z)$  при стремлении  $z$  к нулю был равен выражению

$$E_n(r, \theta, z) = \exp(in\theta). \quad (16)$$

В этом нетрудно убедиться, используя асимптотику функции Бесселя в выражении (15) при больших значениях  $x$ :

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (17)$$

Таким образом, световое поле (15) можно сформировать, осветив плоской волной с неограниченной апертурой спиральную фазовую пластинку с функцией пропускания (16).

В другом предельном случае, когда  $z$  стремится к бесконечности ( $t \rightarrow 0$ ), функция (15) будет иметь асимптотику:

$$E_n(t \rightarrow 0, \theta) \approx \frac{i\sqrt{\pi}t^{n/2} \exp\left[-\frac{i\pi(n+2)}{4} + in\theta\right]}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \quad (18)$$

При получении выражения (18) воспользовались первым членом разложения функции Бесселя в ряд при малом аргументе ( $x \rightarrow 0$ ):

$$J_m(x) \approx \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{\Gamma(m+1)}. \quad (19)$$

Из уравнения (18) видно, что при  $t \rightarrow 0$  функция  $E_n(t, \theta)$  также стремится к нулю как  $t^{n/2}$ .

Интенсивность моды (15) имеет вид:

$$I_n(r, z) = |E_n(r, \theta, z)|^2 = \frac{\pi t}{2} \left[ J_{(n-1)/2}^2(t) + J_{(n+1)/2}^2(t) \right]. \quad (20)$$

Из уравнения (20) видно, что всегда (кроме начальной плоскости  $z=0$ ) при  $t=0$   $I_n(t)=0$ , то есть на оптической оси  $z$  всегда будет ноль интенсивности. Это является характерным признаком наличия в световом поле оптического вихря или фазовой сингулярности [13].

Из уравнения (20) с помощью рекуррентных соотношений для функции Бесселя можно получить выражение для производной:

$$\frac{dI_n(t)}{dt} = \pi n \left[ J_{(n-1)/2}^2(t) - J_{(n+1)/2}^2(t) \right]. \quad (21)$$

Из уравнения (21) видно, что картина интенсивности при любом  $z$  имеет кольцевой вид ( $n \neq 0$ ) и радиус первого основного кольца с максимальным значением интенсивности можно найти из уравнения:

$$J_{(n-1)/2}(t) = J_{(n+1)/2}(t). \quad (22)$$

Пусть в уравнении (22) первый (наименьший) корень равен  $t=t_{0n}$ , тогда радиус первого светлого кольца в картине интенсивности (20) будет равен:

$$r_{0n} = \sqrt{\frac{2t_{0n}\lambda z}{\pi}}. \quad (23)$$

Из сравнения выражения (23) с (6) и (8) можно заключить, что моды (15) имеют самую слабую расходимость из известных параксиальных мод (смотри рис. 1) при  $z > z_1$ , где

$$z_1 = \frac{z_0}{2t_{0n}}, \quad (24)$$

и при условии, что  $tg\varphi = \frac{\lambda\alpha_0}{2\pi\gamma} = \frac{\lambda}{\pi r_0}$ , где  $\varphi$  – угол наклона к оси  $z$  прямой 2 на рис. 1.

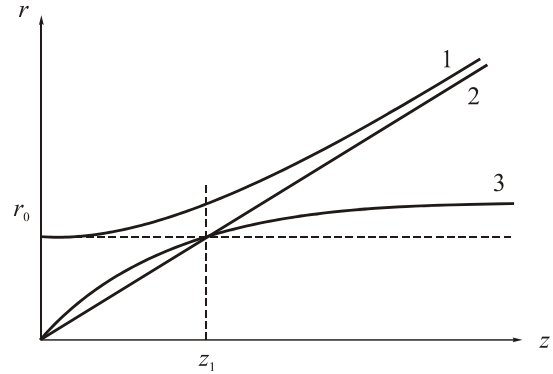


Рис. 1 Зависимость эффективного радиуса пучка от расстояния вдоль оптической оси для: гауссового пучка (кривая 1), параксиального бesselевого пучка (кривая 2) и чистого вихря (кривая 3)

Из рис. 1 видно, что при малых  $z \ll z_0$ , наоборот, расходимость светового поля (15) наибольшая из трех рассматриваемых полей.

### 3. Гипергеометрические моды

Функции (15) – частный случай (однопараметрическое семейство) двухпараметрического семейства функций, являющихся решением уравнения (1) в цилиндрических координатах. Эти ГГ моды являются полным ортогональным базисом и сохраняют свою структуру в системе координат вида

$$\begin{cases} x = r\sqrt{z} \cos \theta, \\ y = r\sqrt{z} \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad (25)$$

ГГ моды имеют следующий вид [2]:

$$E_{\gamma n}(r, \theta, z) = \frac{2^{-n+i\gamma-2}}{\pi} \exp\left[\frac{i\pi}{4}(3n-1+i\gamma)\right] \times \left(\frac{z}{2k}\right)^{(i\gamma-1)/2} \Gamma\left(\frac{n+i\gamma+1}{2}\right) \times \times \frac{r^n}{\Gamma(n+1)} {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1; \frac{ir^2}{4}\right) \exp(in\theta), \quad (26)$$

где  $-\infty < \gamma < \infty$  – действительное число,  $\Gamma(x)$  – гамма-функция,  ${}_1F_1(a, b; x)$  – вырожденная (или конфлюэнтная) гипергеометрическая функция:

$${}_1F_1(a, b; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b)x^k}{\Gamma(a)\Gamma(b+k)k!}. \quad (27)$$

Существует связь между функцией (27) и функцией Бесселя:

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu e^{-ix}}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1(\nu+1/2, 2\nu+1, 2ix). \quad (28)$$

Физически световые поля с комплексной амплитудой вида (26) можно сформировать, освещая не-

ограниченной плоской волной амплитудно-фазовый транспарант с функцией пропускания:

$$E_{in}(r, \theta, z=0) = \frac{r^{i\gamma-1}}{2\pi} \exp(in\theta). \quad (29)$$

При  $r=0$  в уравнении (29) возникает особенность, во избежание которой положим  $\gamma=-i$ , тогда вместо (29) получим функцию пропускания фазового транспаранта, отличающуюся от функции пропускания спиральной фазовой пластинки (16) только постоянным множителем:

$$E_{-in}(r, \theta) = \frac{\exp(in\theta)}{2\pi}. \quad (30)$$

Поэтому функции (15) должны совпадать с ГГ модами (26) при  $\gamma=-i$  (хотя параметр  $\gamma$  в выражении (26) должен быть действительным). Покажем, что это действительно так. Положив в выражении (26)  $\gamma=-i$ , получим:

$$E_{-in}(r, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[\frac{i3\pi n}{4}\right] \left(\frac{kr^2}{2z}\right)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \times \\ \times \frac{1}{\Gamma(n+1)} {}_1F_1\left(\frac{n}{2}, n+1; \frac{ikr^2}{2z}\right) \exp(in\theta). \quad (31)$$

С учетом выражения (28) при

$$\nu = (n-1)/2, \quad t = \frac{kr^2}{4z},$$

$$J_{(n-1)/2}(x) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{(n-1)/2} e^{-it}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} {}_1F_1(n/2, n; 2it) \quad (32)$$

и рекуррентного соотношения для гипергеометрической функции

$${}_1F_1(n/2, n+1; 2ix) = \left(\frac{id}{dx} + 2\right) {}_1F_1(n/2, n; 2ix), \quad (33)$$

получим вместо (31) выражение:

$$E_{-in}(t, \theta) = (2\pi)^{-1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left[-i\frac{\pi(3n-2)}{4}\right] \times \\ \sqrt{t} \exp(it + in\theta) \left[ iJ_{(n-1)/2}(t) + J_{(n+1)/2}(t) \right]. \quad (34)$$

Функция (34) отличается от функции (15) только нормировочным сомножителем  $(2\pi)^{-1}(-1)^n$ .

#### 4. Свойства чистых вихрей

ГГ моды или чистые вихри обладают интересными свойствами. Все моды независимо от величины номера  $n$  распространяются с одинаковыми фазовыми скоростями. Это свойство отличает ГГ моды от мод ЭГ, ЛГ, АГ. Это означает, что любая линейная комбинация мод (15) будет сохранять свою структуру с точностью до масштаба ( $z>0$ ):

$$I(r, \theta, z) = \left| \sum_{n=-N}^N C_n E_n(r, \theta, z) \right|^2 = I\left(r \sqrt{\frac{k}{z}}, \theta\right). \quad (35)$$

Подбором значений комплексных коэффициентов  $C_n$  в выражении (35) можно оптически формировать распределения интенсивности заданного вида, которые при распространении вдоль оптической оси будут сохраняться с точностью до масштаба. Оптически сформировать поле с распределением интенсивности вида (35) можно, осветив неограниченной плоской волной амплитудно-фазовый транспарант с функцией пропускания вида:

$$T(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N C_n \exp(in\theta). \quad (36)$$

Заметим, что световые поля в дальней зоне дифракции, ограниченные при  $z=0$  одинаковой апертурой  $V$ , имеют одинаковые фазовые скорости распространения. Действительно, распределение интенсивности в дальней зоне дифракции зависит от отношения  $k\xi/z$ :

$$I_n(\xi, \eta) = \left| \frac{k}{z} \exp\left[\frac{ik(\xi^2 + \eta^2)}{2z}\right] \times \right. \\ \left. \times \iint_V f_n(x, y) \exp\left[\frac{-ik(x\xi + y\eta)}{2z}\right] dx dy \right|^2 = \\ = \left(\frac{k}{z}\right)^2 \tilde{I}_n\left(\frac{k\xi}{z}, \frac{k\eta}{z}\right). \quad (39)$$

Однако, в отличие от (35), эффективный радиус всех световых полей с конечной энергией и ограниченной областью  $V$  в дальней зоне, как видно из (37), расходится линейно с расстоянием ( $r\sim z$ ), а гипергеометрические моды расходятся пропорционально квадратному корню из расстояния ( $r\sim\sqrt{z}$ ).

Линейная комбинация гипергеометрических мод (35) обладает угловым орбитальным моментом (УОМ) [15,16]. Проекция на оптическую ось  $z$  вектора углового орбитального момента сохраняется при изменении  $z$ , и ее можно вычислить при  $z=0$ . В соответствии с выражением для УОМ [16] для проекции на ось  $z$  получим:

$$J_z = \frac{i \iint E(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} E^*(r, \theta) r dr d\theta}{\omega \iint |E(r, \theta)|^2 r dr d\theta}, \quad (38)$$

где  $E(r, \theta)$  – комплексная амплитуда светового поля, удовлетворяющая уравнению (1),  $\omega$  – циклическая частота света. Подставляя выражение (36) в уравнение (38), получим проекцию вектора УОМ для суперпозиции гипергеометрических мод:

$$J_z = \frac{\sum_{n=-N}^N n |C_n|^2}{\omega \sum_{n=-N}^N |C_n|^2}. \quad (39)$$

Из уравнений (38) и (39) видно, что хотя гипергеометрические моды обладают бесконечной энергией, нормированный угловой орбитальный момент у них конечен.

Ненормированный УОМ гипергеометрических мод – бесконечный, но плотность момента в каждой точке пространства – конечна. Измерить УОМ светового поля можно с помощью специального дифракционного оптического элемента, функция пропускания которого пропорциональна линейной комбинации угловых гармоник (36) [17].

### 5. Результаты численного моделирования распространения чистых вихрей и их суперпозиций

Моделировать распространение световых полей вида (35), представляющих собой чистые вихри и их суперпозиции, сложно из-за бесконечного радиального размера таких полей.

Однако, если взять радиус поля достаточно большим, то фактическая ограниченность поля не будет существенно сказываться на его центральной части. Кроме того, моделирование распространения ограниченных вихрей [14] позволяет предсказать

поведение полей, формируемых с помощью спиральных фазовых пластинок и дифракционных оптических элементов.

Моделирование непараксиального распространения поля (36) проводилось на основе разложения входного поля по сферическим волнам:

$$F(u, v, z) = -\frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \times \frac{\exp(ikR)}{R^2} \left( ik - \frac{1}{R} \right) dx dy ,$$

$$R = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2} . \quad (40)$$

При моделировании использовались следующие параметры: размер поля  $5 \times 5$  мм, число отсчетов в выходном поле  $512 \times 512$ . На рис. 2 показаны результаты моделирования распространения чистых вихрей различных порядков.

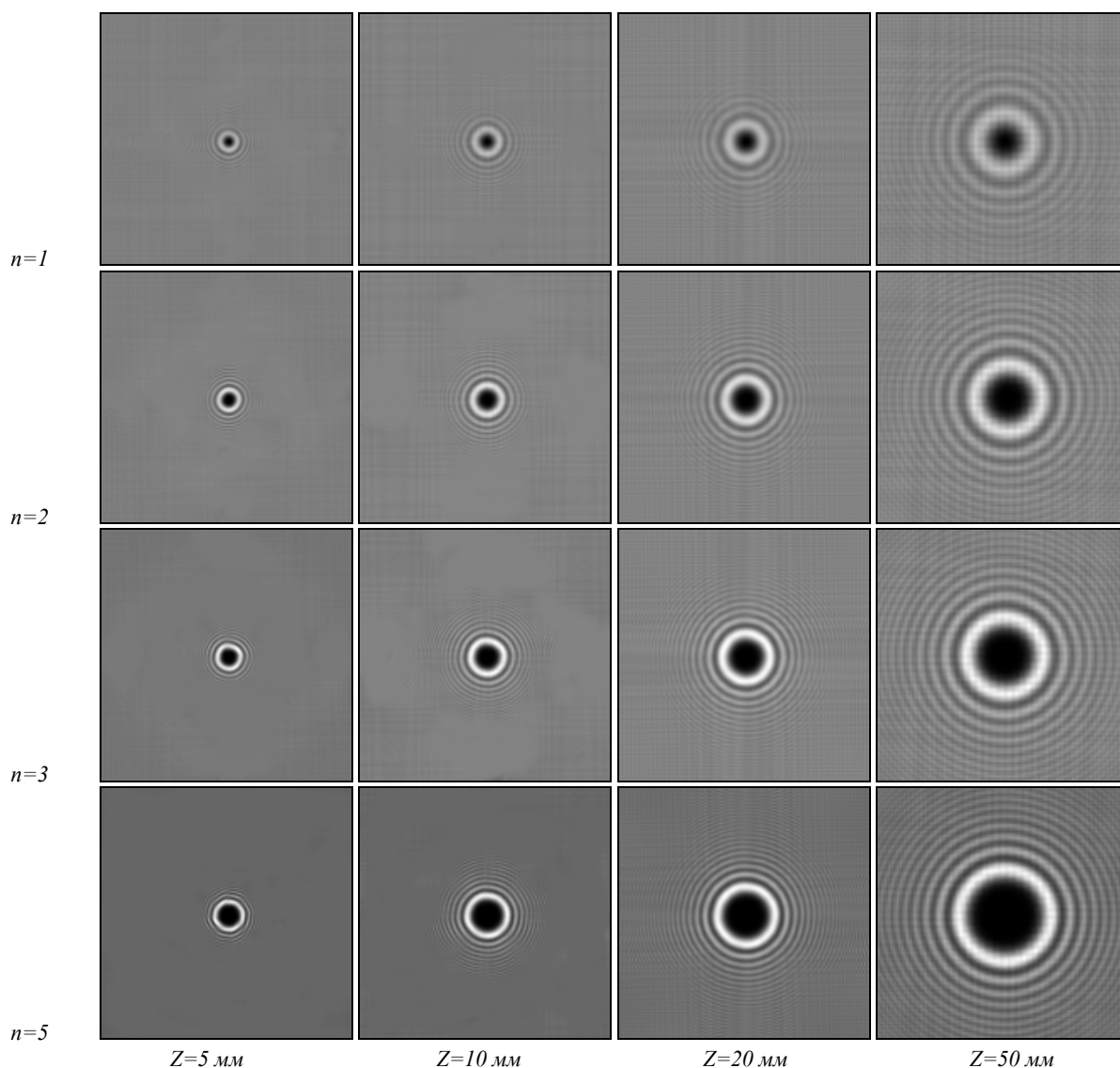


Рис. 2. Распределение интенсивности при распространении чистых вихрей порядков  $n=1, 2, 3, 5$  на расстояниях  $z=5, 10, 20$  и  $50$  мм

На рис. 2 видно, что чем больше порядок вихря, тем шире формируемая им воронка, что согласуется с формулой (23) для радиуса первого светлого кольца поля. Напомним, что радиус воронки пропорционален первому корню функции Бесселя, значение которого возрастает с ростом индекса  $n$ . Кроме того, на рис. 2 видно, что растет и яркость первого кольца, а также энергия, которая в нем сосредоточена.

В работе [18] исследовался вопрос использования пучков ЛГ с различными азимутальными индексами для формирования тороидных оптических дипольных ловушек. Было показано, что моды ЛГ с «винтом» более высокого порядка обеспечивают более глубокую потенциальную яму и более компактную концентрацию при фиксированных радиусе тороида и мощности лазера. Аналогичные свойства присущи и чистым оптическим вихрям.

На рис. 3 показано распространение линейной комбинации (суперпозиции) чистых вихрей вида  $\exp(i\theta)+\exp(-2i\theta)$ . В первой строке приведены результаты для исходного амплитудно-фазового поля, а во второй строке – для только фазового, т.е. в плоскости  $z=0$  было поле  $\exp\{I \arg [\exp(i\theta) + \exp(-2i\theta)]\}$ . Последний случай достаточно легко реализовать с помощью фазовых дифракционных оптических элементов. Видно что, как и было предсказано в разделе 4, распределения интенсивности для суперпозиций чистых вихрей сохраняются при распространении вдоль оптической оси с точностью до масштаба. Интересно, что в случае, когда на входе чисто фазовая суперпозиция чистых вихрей, то картина выглядит как уходящие в бесконечность темные каналы постоянной ширины, вместо расходящихся темных клинов как в случае амплитудно-фазового поля на входе.

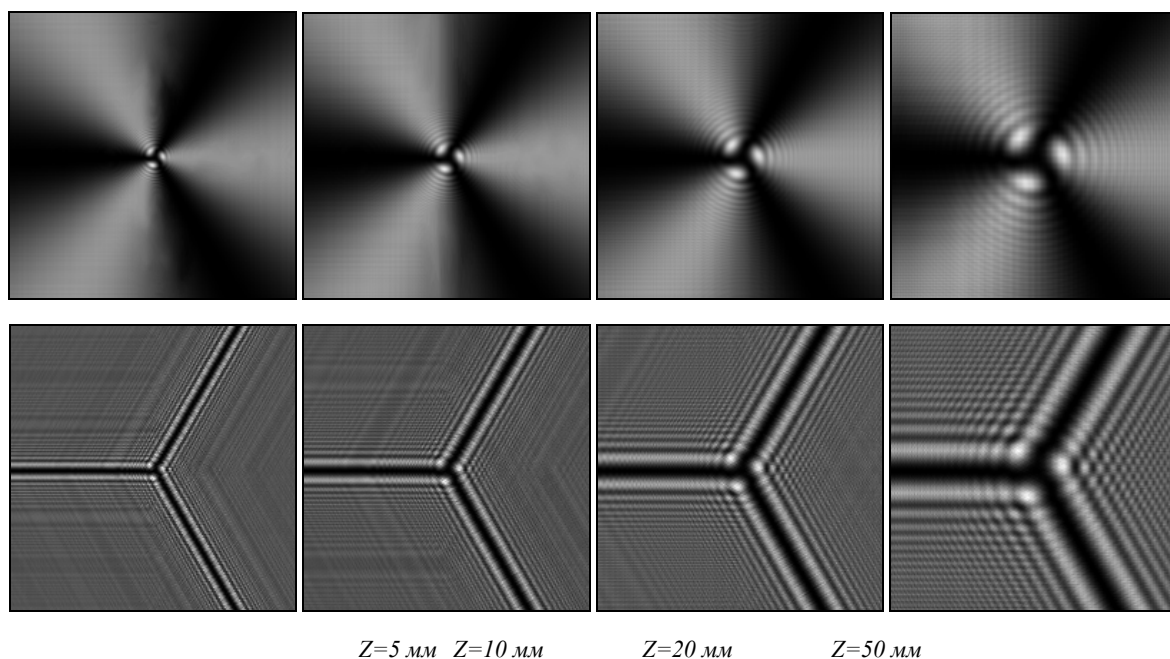


Рис. 3. Распространение линейной комбинации чистых вихрей вида  $\exp(i\theta)+\exp(-2i\theta)$ : распределение интенсивности на расстояниях  $z=5, 10, 20$  и  $50$  мм для амплитудно-фазового поля на входе (верхняя строка) и только фазового (нижняя строка).

### Заключение

В заключении кратко сформулируем полученные результаты.

- Получено новое семейство радиально-симметричных линейно-независимых решений параксиального волнового уравнения, которые названы чистыми вихрями и которые обладают слабой расходимостью и одинаковой фазовой скоростью (15).
- Сформировать чистые вихри можно, освещая плоской волной с неограниченной апертурой спиральную фазовую пластинку (16).
- Показано, что радиус кольца с максимальным значением интенсивности чистого вихря растет

как корень квадратный от расстояния вдоль оптической оси (23).

- Показано, что найденные модовые решения являются частным случаем двухпараметрического семейства решений ПВУ, названных гипергеометрическими модами ((26) и (34)).
- Результаты численного моделирования подтверждают теоретические выкладки.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF REC-SA-014-02) и гранта Президента РФ НШ-1007.2003.01, а также гранта РФФИ 05-01-96505.

### *Лумепамыпа*

1. Siegman A.E. *Lasers*, University Science, Mill Valley, CA, 1986.
2. Miller W. Jr. *Symmetry and Separation of Variables*, Addison-Wesley Pub., MA, 1977.
3. Durnin J., Miceli J.J., Eberly J.H. Diffraction-free beams, *Phys. Rev.*, v.58, p.1499-1501 (1987).
4. Bandres M.A., Gutierrez-Vega J. Ince-Gaussian beams, *Opt. Lett.*, v.29, no.2, p.144-146 (2004).
5. Bandres M.A., Gutierrez-Vega J. Ince-Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators, *J. Opt. Soc. Am. A*, v.21, no.5, p.873-880 (2004).
6. Bandres M.A. Elegant Ince-Gaussian beams, *Opt. Lett.*, v.29, no.15, p.1724-1726 (2004).
7. Bandres M.A., Gutierrez-Vega J. Higher-order complex source for elegant Laguerre-Gaussian waves, *Opt. Lett.*, v.29, no.19, p. 2213-2215 (2004).
8. Schwarz U.T., Bandres M.A., Gutierrez-Vega J. Observation of Ince-Gaussian modes in stable resonators, *Opt. Lett.*, v.29, no.16, p.1870-1872 (2004).
9. Abramochkin E.G., Volostnikov V.G. Generalized Gaussian beams, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, v.6, p.5157-5161 (2004).
10. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkaryev M.V., Soifer V.A., Uspleniev G.V. The phase rotor filter, *J. Mod. Opt.*, v.39, no.5, p.1147-1154.
11. Beijersbergen M.W., Coerwinkel R.P.C., Kristiansen M., Woerdman J.P. Helical-wave front laser beams produced with a spiral phase plate, *Opt. Commun.*, v.112, p.321-327 (1994).
12. Oemrawsingh S.S.R., Van Houwelingen J.A.M., Eliel E.R., Woerdman J.P., Verstegen E.J.K., Kloosterboer J.G., Hooft G.W. production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths, *Appl. Opt.*, v.43, no.3, p.688-694 (2004).
13. Soskin M.S., Gorshkov U.N., Vasnetsov M.V. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices, *Phys. Rev. A*, v.56, no.5, p.4064-4075 (1997).
14. Kotlyar V.V., Almazov A.A., Khonina S.N., Soifer V.A., Elfstrom H., Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 22, No. 5, pp.(2005).
15. Allen L., Beijersbergen M.V., Spreeuw R.J.C., Woerdman J.P. Orbital angular-momentum of light and the transformation of laguerre gaussian laser modes, *Phys. Rev. A*, v.45, p.8185-8189 (1992).
16. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Paakkonen P., Simonen J., Turunen J. An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics, *J. Mod. Opt.*, v.48, no.10, p.1543-1557 (2001).
17. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Paakkonen P., Turunen J. Measuring the light field orbital angular momentum using DOE", *Optical Memory and Neural Networks*, v.10, no.4, pp.241-255 (2001).
18. Wright E.M., Arlt J., and Dholakia K. "Toroidal optical dipole traps for atomic Bose-Einstein condensates using Laguerre-Gaussian beams", *Physical Review A* 63, 013608 (2000).