

# РАСЧЕТ И ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛЯ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ВНУТРИ И СНАРУЖИ МИКРО-ШАРА

Смирницкий А.В., Скиданов Р.В., Котляр В.В.  
Институт систем обработки изображений РАН,  
Самарский государственный аэрокосмический университет

## Аннотация

На основе теории Ми произведен расчет векторов напряженности, интенсивности и вектора Умова-Пойнтинга для электромагнитного поля, которое образуется в результате дифракции плоской линейно-поляризованной монохроматической волны на диэлектрическом микро-шаре, радиус которого составляет несколько длин волн. С помощью микроскопа и телекамеры произведены также измерения распределений интенсивности света на разных плоскостях вблизи полистиролового шарика диаметром 5 микрон, при дифракции на нем пучка света гелий-неонового лазера. Расчетные и экспериментальные картины дифракции качественно согласуются.

## Введение

Большинство существующих сейчас методов для расчета электромагнитной дифракции на частицах, основаны на теории Ми [1-3], которая позволяет найти точное решение в виде бесконечных рядов для компонент рассеянного и внутренних полей при дифракции плоской электромагнитной волны на однородном изотропном шаре с известным относительным показателем преломления. Хотя теория Ми позволяет найти поля в любой точке пространства, при практическом ее применении, например, в задачах моделирования атмосферных явлений, исследования космических объектов, теории радуги, изучения солнечной короны, рассчитываются поля на больших расстояниях по сравнению с размерами самих частиц [1, 2].

В задачах манипулирования микрочастицами с помощью сфокусированных лазерных пучков [4, 5] для строгого расчета сил, действующих со стороны электромагнитного поля на частицу, требуется рассчитывать поля дифракции внутри и снаружи вблизи частицы.

Для расчета полей дифракции кроме аналитической теории Ми и обобщенной теории Лоренца-Ми [6, 7], в которой рассматривается дифракция произвольного векторного пучка на сферической частице, расположенной на оси или вне оси пучка, существуют и численные методы для расчета полей дифракции на телах вращения [8-12]. В работе [13] метод численного решения системы уравнений Максвелла, так называемый FDTD-метод, для расчета дифракции плоской волны на диэлектрической сфере и проведено сравнение этого метода с формулами Ми. В [14] предложен новый аналитический метод для расчета дифракции плоской волны на осесимметричном теле. Временная задача о передаче момента импульса сферической частице от короткого электромагнитного импульса решена FDTD-методом в [15]. Для расчета поля дифракции электромагнитной волны на частице произвольной формы используется также метод Т-матрицы [16]. Этот метод линейно связывает коэффициенты разложения в ряды по сферическим функциями Бесселя и Ханкеля векторов напряженности электрического и

магнитного полей для падающей и рассеянной электромагнитных волн. Для сферической частицы Т-матрица (или матрица рассеяния) становится диагональной, а ее элементы – коэффициентами Ми.

В задаче расчета сил захвата для микрочастиц в сфокусированном электромагнитном поле требуется корректно записать выражения для падающей сфокусированной световой волны. Эта задача рассматривается в [17-19], где приведены векторные представления для электромагнитного поля в фокусе сферической линзы с большой числовой апертурой. А в [20] дано аналитическое выражение для распространения непараксиального векторного гауссова пучка. Рекуррентный способ расчета коэффициентов Ми в задаче дифракции непараксиального гауссова пучка на круглом цилиндре, смещенном с оси пучка, рассмотрена в [21].

В [22] рассмотрена задача расчета момента сил, действующего на сферическую частицу со стороны плоской волны с круговой поляризацией.

В данной работе на основе теории Ми рассчитаны все 6 проекций векторов напряженностей электрического и магнитного полей (в полярной системе координат) внутри и вне (вблизи) диэлектрической сферы. На их основе рассчитаны также интенсивность электромагнитного поля (плотность мощности) и вектор Умова-Пойнтинга. С помощью микроскопа и телекамеры, произведено измерение распределения интенсивности света на различных плоскостях вблизи от полистироловой частицы диаметром 5 микрон при дифракции на ней плоской линейно-поляризованной волны. Сравнение расчетных и экспериментальных картин дифракции находится в качественном соответствии.

## 1. Выражения для компонент электромагнитного поля

Теория Ми позволяет найти строгое решение для задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на однородном, изотропном шаре радиуса  $a$  с известным относительным комплексным показателем преломления  $m$ . Свяжем с шаром декартову систему координат так, как показано на рис. 1, и будем рассматривать случай, когда падающая волна поляризована вдоль оси  $OX$ .

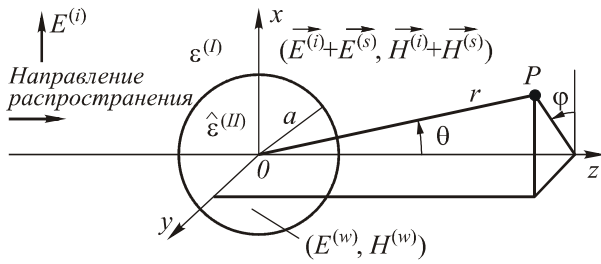


Рис. 1. Плоская линейно-поляризованная волна падает на сферическую частицу

Решением данной задачи будут выражения для расчета компонент векторов электрической и магнитной напряженностей внутри шара  $(\vec{E}^{(w)}, \vec{H}^{(w)})$ . Вне частицы результирующее поле будет суммой падающего и рассеянного полей  $(\vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(s)}, \vec{H}^{(i)} + \vec{H}^{(s)})$ .

Физически реализуемое гармоническое монохроматическое электромагнитное поле  $(\vec{E}, \vec{H})$  в линейной изотропной однородной среде должно удовлетворять векторному волновому уравнению [3]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} &= 0, \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k^2 = \omega^2 \varepsilon$  - волновое число, и иметь нулевую дивергенцию

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= 0, \\ \text{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Кроме того,  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  не являются независимыми:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= -i\omega \hat{\varepsilon} \vec{E}, \\ \text{rot} \vec{E} &= i\omega \mu \vec{H}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\omega = 2\pi / \lambda$  - циклическая частота,  $\mu$  - магнитная проницаемость среды (положим далее  $\mu = 1$ ),

$\hat{\varepsilon} = (\hat{n})^2$  - комплексная диэлектрическая проницаемость среды,

$\hat{n} = n(1 + ik)$  - комплексный показатель преломления среды, где  $n$  - показатель преломления среды, а  $\chi$  - параметр, определяющий поглощение падающей волны в веществе.

Для удобства обозначим  $k_1 = i\omega \hat{\varepsilon}$  и  $k_2 = i\omega$ , тогда  $k^2 = -k_1 k_2$ .

В случае, когда падающая волна плоская, х-поляризованная, ее вектор электрической напряженности записывается в виде:

$$\vec{E}^{(i)} = E_0 e^{ikz} \vec{e}_x, \quad (4)$$

где  $E_0$  - некоторая постоянная.

На границе раздела между шаром и окружающей средой необходимо наложить граничные условия вида:

$$\begin{aligned} (\vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(s)} - \vec{E}^{(w)}) \times \vec{n} &= \\ = (\vec{H}^{(i)} + \vec{H}^{(s)} - \vec{H}^{(w)}) \times \vec{n} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\vec{n}$  - вектор внешней нормали к поверхности шара.

В [1-3] показано что для данной задачи решение векторного волнового уравнения (1) можно свести к решению скалярного волнового уравнения в сферических координатах вида:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Частные решения (6) можно найти методом разделения переменных в виде:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi),$$

которые после подстановки в (6) дают три отдельных уравнения:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + (n(n+1) - \\ - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}) \Theta &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + (k^2 r^2 - n(n+1)) R = 0, \quad (9)$$

где константы разделения  $m$  и  $n$  определяются из дополнительных условий, которым должна удовлетворять функция  $\psi$ .

Линейно независимыми решениями (7) являются функции вида:

$$\Phi_e = \cos m\phi, \quad \Phi_o = \sin m\phi,$$

из условия однозначности требуется, чтобы  $m$  было целым числом или нулем, при этом положительных значений  $m$  достаточно для получения всех линейно независимых решений (7).

Решениями (8), конечными при  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$ , являются присоединенные функции Лежандра первого рода  $P_n^m(\cos \theta)$ , где  $n$  - степень,  $m$  - порядок. При  $m=0$  присоединенные функции Лежандра называют полиномами Лежандра и обозначают через  $P_n$ .

Если перейти к безразмерной переменной  $\rho = kr$  и ввести функцию  $Z = R\sqrt{r}$ , то уравнение (9) можно переписать в виде:

$$\rho \frac{d}{d\rho} (\rho \frac{dZ}{d\rho}) + [\rho^2 - (n + \frac{1}{2})^2] Z = 0. \quad (10)$$

Линейно независимые решения (9) выражаются сферическими функциями Бесселя первого и второго родов вида:

$$j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{n+1/2}(\rho), \quad (11)$$

$$y_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Y_{n+1/2}(\rho). \quad (12)$$

Для данной задачи удобно применять функции Риккати-Бесселя:

$$\psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{n+1/2}(\rho), \quad (13)$$

$$\chi_n(\rho) = \rho y_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} Y_{n+1/2}(\rho). \quad (14)$$

Любая линейная комбинация  $j_n$  и  $y_n$  также является решением (9). В качестве таких линейных комбинаций можно взять сферические бesselовы функции третьего рода (сферические функции Ханкеля) вида:

$$h_n^{(1)}(\rho) = j_n(\rho) + iy_n(\rho), \quad (15)$$

$$h_n^{(2)}(\rho) = j_n(\rho) - iy_n(\rho), \quad (16)$$

или функции Риккати-Ханкеля вида:

$$\xi_n^{(1)}(\rho) = \psi_n(\rho) + i\chi_n(\rho), \quad (17)$$

$$\xi_n^{(2)}(\rho) = \psi_n(\rho) - i\chi_n(\rho). \quad (18)$$

Таким образом, могут быть построены производящие функции, которые удовлетворяют скалярному волновому уравнению в сферических координатах:

$$\psi_{emn} = \cos m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(kr), \quad (19)$$

$$\psi_{omn} = \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(kr), \quad (20)$$

где  $z_n$  - любая из четырех сферических бesselовых функций:  $j_n, y_n, h_n^{(1)}$  или  $h_n^{(2)}$ . Более того, в силу полноты системы функций  $\cos m\phi$ ,  $\sin m\phi$ ,  $P_n^m(\cos\theta)$ ,  $z_n(kr)$  любая функция, удовлетворяющая скалярному волновому уравнению в сферических координатах, может быть разложена в бесконечный ряд по функциям (13) и (14). Из гармоник вида (13) и (14) можно получить векторные сферические гармоники  $\vec{M}$  и  $\vec{N}$ , удовлетворяющие уравнению (1), по формулам:

$$\vec{M} = \nabla \times (\vec{r}\psi), \quad (21)$$

$$\nabla \times \vec{N} = k\vec{M}. \quad (22)$$

Тогда выражения для разложения компонент электромагнитного поля по векторным сферическим гармоникам (21) и (22) внутри и снаружи микрошабра будут иметь вид:

$$\begin{aligned} E_r^s &= \frac{i \cos\phi \sin\theta}{(k^{(1)}r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n a_n n(n+1) \xi_n \pi_n, \\ E_\theta^s &= \frac{\cos\phi}{k^{(1)}r} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ia_n \xi_n' \tau_n - b_n \xi_n \pi_n), \\ E_\phi^s &= \frac{\sin\phi}{k^{(1)}r} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (b_n \xi_n \tau_n - ia_n \xi_n' \pi_n), \end{aligned} \quad (23)$$

$$H_r^s = \frac{i \sin\phi \sin\theta}{k^{(1)}k_2^{(1)}r^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n b_n n(n+1) \xi_n \pi_n,$$

$$H_\theta^s = \frac{\sin\phi}{k_2^{(1)}r} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ib_n \xi_n' \tau_n - a_n \xi_n \pi_n),$$

$$H_\phi^s = \frac{\cos\phi}{k_2^{(1)}r} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ib_n \xi_n' \pi_n - a_n \xi_n \tau_n),$$

$$E_r^i = \frac{-i \cos\phi \sin\theta}{(k^{(1)}r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n n(n+1) \psi_n \pi_n,$$

$$E_\theta^i = \frac{\cos\phi}{k^{(1)}r} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (\psi_n \pi_n - i\psi_n' \tau_n),$$

$$E_\phi^i = \frac{\sin\phi}{k^{(1)}r} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (i\psi_n' \pi_n - \psi_n \tau_n),$$

$$H_r^i = \frac{-i \sin\phi \sin\theta}{k^{(1)}k_2^{(1)}r^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n n(n+1) \psi_n \pi_n = \frac{k^{(1)} \text{tg}\phi}{k_2^{(1)}r} E_r^i, \quad (24)$$

$$H_\theta^i = \frac{\sin\phi}{k_2^{(1)}r} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (\psi_n \pi_n - i\psi_n' \tau_n) = \frac{k^{(1)} \text{tg}\phi}{k_2^{(1)}r} E_\theta^i,$$

$$H_\phi^i = \frac{-\cos\phi}{k_2^{(1)}r} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (i\psi_n' \pi_n - \psi_n \tau_n) = \frac{-k^{(1)} \text{ctg}\phi}{k_2^{(1)}r} E_\phi^i,$$

$$E_r^w = \frac{-i \cos\phi \sin\theta}{(k^{(2)}r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n d_n n(n+1) \psi_n \pi_n,$$

$$E_\theta^w = \frac{\cos\phi}{k^{(2)}r} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (c_n \psi_n \pi_n - id_n \psi_n' \tau_n),$$

$$E_\phi^w = \frac{\sin\phi}{k^{(2)}r} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (id_n \psi_n' \pi_n - c_n \psi_n \tau_n),$$

$$H_r^w = \frac{-i \sin\phi \sin\theta}{k^{(2)}k_2^{(2)}r^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n c_n n(n+1) \psi_n \pi_n,$$

$$H_\theta^w = \frac{\sin\phi}{k_2^{(2)}r} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (d_n \psi_n \pi_n - ic_n \psi_n' \tau_n),$$

$$H_\phi^w = \frac{\cos\phi}{k_2^{(2)}r} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (d_n \psi_n \tau_n - ic_n \psi_n' \pi_n), \quad (25)$$

где

$$E_n = \frac{i^n E_0 (2n+1)}{n(n+1)}, \quad (26)$$

$$\pi_n = \frac{P_n^1}{\sin\theta}, \quad \tau_n = \frac{dP_n^1}{d\theta}, \quad (27)$$

$a_n, b_n, c_n, d_n$  – коэффициенты Ми, которые можно найти из четырех независимых уравнений, для нахождения которых нужно расписать граничные условия (5) для компонент поля, в результате получим выражения вида:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{m\psi_n(mq)\psi_n'(q) - \psi_n(q)\psi_n'(mq)}{m\psi_n(mq)\xi_n'(q) - \xi_n(q)\psi_n'(mq)}, \\ b_n &= \frac{\psi_n(mq)\psi_n'(q) - m\psi_n(q)\psi_n'(mq)}{\psi_n(mq)\xi_n'(q) - m\xi_n(q)\psi_n'(mq)}, \\ c_n &= \frac{m(\psi_n(q)\xi_n'(q) - \xi_n(q)\psi_n'(q))}{\psi_n(mq)\xi_n'(q) - m\xi_n(q)\psi_n'(mq)}, \\ d_n &= \frac{m(\psi_n(q)\xi_n'(q) - \xi_n(q)\psi_n'(q))}{m\psi_n(mq)\xi_n'(q) - \xi_n(q)\psi_n'(mq)}, \end{aligned} \quad (28)$$

где штрих обозначает дифференцирование по аргументу, стоящему в круглых скобках, а через  $q$  и  $m$  обозначены соответственно параметр дифракции и относительный показатель преломления:

$$\begin{aligned} q &= k^{(1)}a = \frac{2\pi n^{(1)}a}{\lambda_0}, \\ m &= \frac{\hat{k}^{(2)}}{k^{(1)}} = \frac{\hat{n}^{(2)}}{n^{(1)}} = \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}^{(2)}}{\varepsilon^{(1)}}}, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $n^{(1)}$  – показатель преломления окружающей среды,

$\lambda_0$  – длина волны света в вакууме,

$\hat{n}^{(2)} = n^{(2)}(1 + ik^{(2)})$  – комплексный показатель преломления шара,

$\hat{\varepsilon}^{(2)}$  – комплексная диэлектрическая проницаемость шара,

$\varepsilon^{(1)}$  – комплексная диэлектрическая проницаемость окружающей среды.

В точке  $r=0$  выражения для компонент поля будут иметь вид:

$$\begin{aligned} E_\theta^w &= E_0 d_1, \\ H_\phi^w &= \frac{k^{(2)}}{k_2^{(2)}} E_0 c_1, \\ E_r^w &= E_\phi^w = H_r^w = H_\theta^w = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

## 2. Алгоритмы расчета базисных функций

Для расчетов по формулам (23)-(25) и (28), необходимо запрограммировать сферические функции Риккати-Бесселя и функции  $\pi_n$  и  $\tau_n$ , зависящие от угла  $\theta$ .

Для расчета сферических функций Риккати-Бесселя и их производных можно использовать рекурсивные формулы, которые следуют из свойств сферических функций:

$$z_{n+1}(\rho) = \frac{2n+1}{\rho} z_n(\rho) - z_{n-1}(\rho), \quad (31)$$

$$\frac{d}{d\rho} z_n(\rho) = z_{n-1}(\rho) - \frac{nz_n(\rho)}{\rho}, \quad (32)$$

где  $z_n$  одна из функций Риккати-Бесселя первого, второго или третьего родов.

Начальные условия для формул (31) и (32) задаются выражениями:

$$\begin{aligned} \psi_0(\rho) &= \sin \rho, & \psi_1(\rho) &= \frac{\sin \rho}{\rho} - \cos \rho, \\ \chi_0(\rho) &= -\cos \rho, & \chi_1(\rho) &= -\sin \rho - \frac{\cos \rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (33)$$

Но экспериментальные исследования показали, что в зависимости от  $n$ , из-за погрешностей связанных с машинным хранением чисел, нахождение значения функции  $\psi$  методом восходящей рекурсии, начинает расходиться при некотором  $N_c$ , для всех  $\rho < N_c$  [23-26], а вычисление функций Риккати-Бесселя первого рода методом нисходящей рекурсии затруднено выбором начальных значений. Для получения точных значений в области, где расходится метод восходящей рекурсии, использовался расчет сферических функции  $\psi$  через функцию Бесселя  $J_n$ , используя формулу (13),(14) путем суммирования ряда вида:

$$J_n(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{T_c} \frac{(-\rho^2/4)^k}{k! \Gamma(n+k+1)}, \quad (34)$$

где  $\Gamma(n+1) = n!$  – гамма-функция,  $T_c$  – ограничение на число членов бесконечного ряда.

Экспериментально минимальное пороговое значение было определено как  $T_c = x + 10$ . Но при больших  $\rho$  сумма ряда (34) также расходится из-за погрешности машинного хранения чисел, и дальнейшее уточнение можно произвести например с использованием логарифмов. При увеличении требуемого порядка функций Риккати-Бесселя первого рода, значение  $N_c$  смещается в сторону увеличения значений. На основе множества экспериментов была предложена формула для  $N_c = n - 5$ . Тогда при  $\rho < n - 5$  функции Риккати-Бесселя считаются через представление функции Бесселя первого рода в виде ряда (34) и связи их с функциями Риккати-Бесселя (13), (14), иначе используется метод восходящей рекурсии (31).

Функции Риккати-Бесселя второго рода устойчивы при расчетах методом восходящей рекурсии, и никаких сложностей для вычисления не представляют.

Функции Риккати-Ханкеля вычисляются как линейная комбинация функций Риккати-Бесселя первого и второго родов по формулам (17), (18).

Присоединенные функции Лежандра первого рода  $P_n^1$  связаны с первой производной по углу  $\theta$  от соответствующих полиномов Лежандра  $P_n$  формулой:

$$P_n^1 = \sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} = -\frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}. \quad (35)$$

Для расчетов удобно использовать функции  $\pi_n$  и  $\tau_n$ , их можно вычислить на основе рекуррентных соотношений [25]:

$$\begin{aligned}
 s &= \mu\pi_n, \\
 t &= s - \pi_{n-1}, \\
 p_{n+1} &= s + t + \frac{t}{n}, \\
 \tau_n &= nt - \pi_{n-1},
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

где  $\mu = \cos \theta$ .

### 3. Численное моделирование дифракции плоской волны на шаре

Для исследования сходимости решения была получена зависимость ошибки разложение плоской волны по векторным сферическим гармоникам от числа слагаемых в сумме разложения  $N$  (рис. 2).

Так же подтверждение правильности работы алгоритма может быть получено путем сравнения результатов моделирования с доступными данными из различных источников. В научной литературе результаты расчетов дифракции на частице по теории Ми часто приводят в виде полярных диаграмм.

На рис. 2-4 для сравнения приведены полярные диаграммы для функций

$$\begin{aligned}
 S_1(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)), \\
 S_2(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (b_n \pi_n(\cos \theta) + a_n \tau_n(\cos \theta)).
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

Изображения слева на рис. 3-5 приведены из [1] и имеют масштабирующий множитель  $q^2$ ; изображения

в центре были рассчитаны с помощью пакета Scatlab [27], а изображения справа были получены на основе расчета по формулам (37). Из сравнения диаграмм на рис. 3-5 можно сделать вывод о их качественном соответствии, а сравнение рассчитанных диаграмм справа с диаграммами в центре, полученными с помощью [27], дает и количественное согласие.

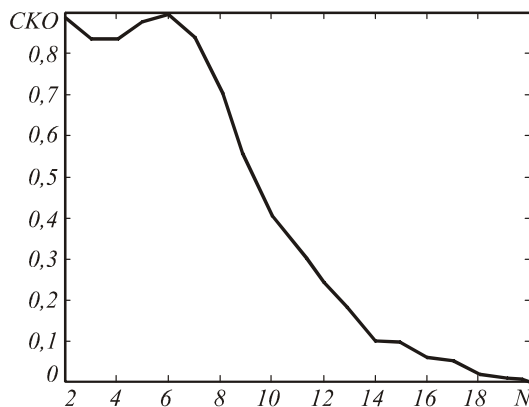


Рис. 2 Зависимость среднеквадратичной ошибки при разложении плоской волны по сферическим гармоникам от числа членов суммы

На рис. 6 приведены результаты моделирования распределения модуля вектора напряженности электрического поля  $E$  в плоскости  $XOZ$ , а также в плоскости параллельной  $XYZ$ , проведенной через точку с максимальной интенсивностью. Также показаны осевые сечения интенсивности для данных изображений.

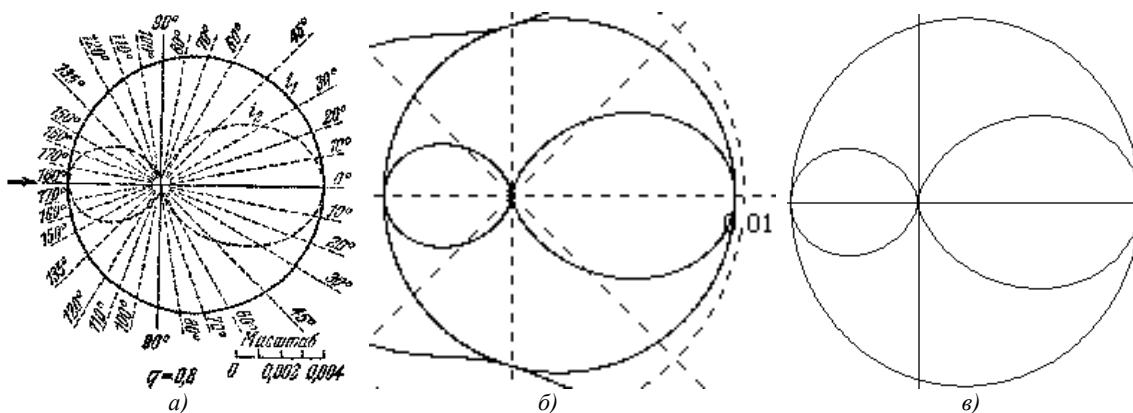


Рис. 3. Полярные диаграммы для амплитудных функций (37) при параметре дифракции (29) равном  $q=0,8$

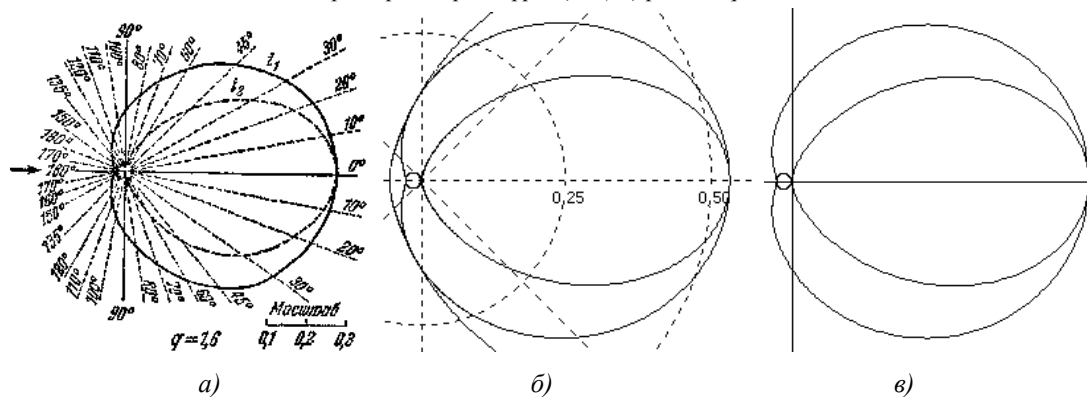
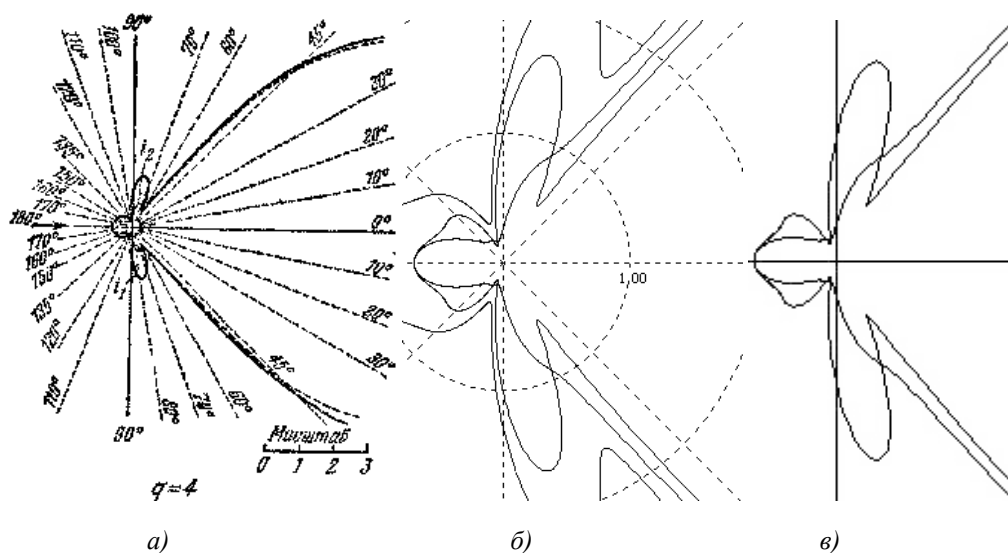
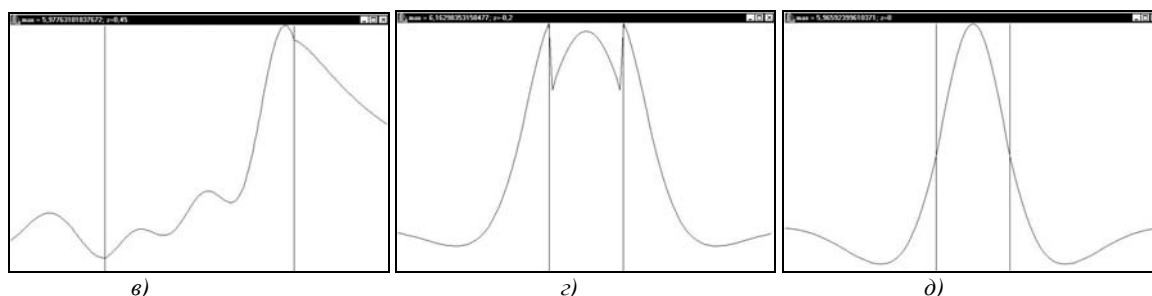
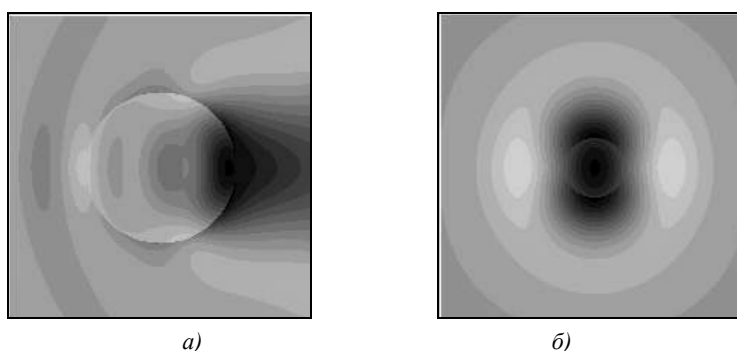


Рис. 4. Полярные диаграммы для амплитудных функций (37) при  $q=1,6$



а) б) в)  
Рис. 5. Полярные диаграммы для амплитудных функций (37) при  $q=4$



в) з) д)  
Рис. 6. Распределение модуля вектора напряженности электрического поля в плоскости  $XOZ$  (а) (ось  $OZ$  – вправо,  $OX$  – вверх) и в плоскости  $XOY$  в фокусе (б) (ось  $OY$  – вправо, ось  $OX$  – вверх); также показаны сечения интенсивности электрического поля вдоль соответствующих осей (в) для (а); (е) и (д) для (б)

Расчет дифракции на шаре, приведенный на рис. 6, был сделан при следующих параметрах:  $\phi = 0$  (изображение лежит в плоскости  $XOZ$ );  $m = 1,41$  - относительный показатель преломления шара;  $a = 0,5 \text{ мкм}$  - радиус шара;  $q = 3$  - параметр дифракции;  $\lambda_0 = 1 \text{ мкм}$  - длина волны падающего света в вакууме;  $\Delta = 0,02 \text{ мкм} = \frac{\lambda_0}{50}$  - шаг дискретизации;  $N = 10$  - число слагаемых в рядах; размеры изображения в пикселях:  $2 \times 2 \text{ мкм}$ , в точках:  $100 \times 100$ .

На рис. 6а показано продольное 2D-сечение 3D распределения модуля вектора напряженности электрического поля (плоскость  $XOZ$  совпадает с плоскостью поляризации падающей плоской волны), и виден эффект фокусировки света диэлектрическим

шаром вблизи своей поверхности. Одномерное сечение этого 2D-изображения вдоль линии  $OZ$  (рис. 6в) показывает, что на границе поверхности шара интенсивность не терпит разрыва при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , так как радиальная компонента вектора напряженности в плоскости  $YOZ$  равна нулю.

На рис. 6б показано поперечное 2D-сечение 3D распределения электрической напряженности в плоскости параллельной  $XOY$ , в точке  $z = 0,46 \text{ мкм}$ , которую можно назвать фокусом, так как в ней интенсивность максимальна. На 2D-сечении в плоскости  $XOY$  видно, что из-за линейной поляризации в вертикальном направлении картина дифракции теряет радиальную симметрию.

На вертикальном сечении вдоль оси  $OX$  (рис. 6г) видно, что распределение модуля вектора электриче-

ской напряженности  $\vec{E}$  претерпевает разрыв, вследствие того, что у электромагнитного поля внутри и снаружи поверхности тангенциальные компоненты равны по условию, а радиальные отличны друг от друга.

Теория Ми позволяет получить результаты для расчета поля дифракции электромагнитной волны на шаре с комплексным показателем преломления по тем же формулам, что и для диэлектрического шара. Пример такого расчета приведен на рис. 7.

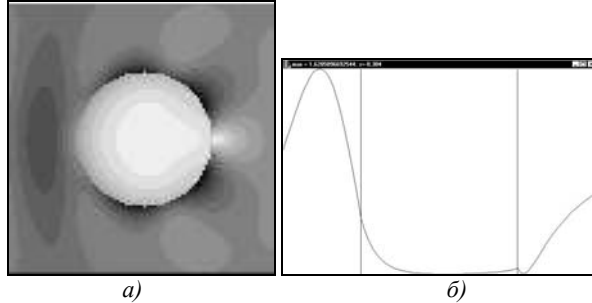


Рис. 7. Расчет дифракции плоской волны на шаре с комплексным относительным показателем преломления. 2D распределение модуля вектора электрической напряженности  $E$  в плоскости  $X0Z$  и центральное 1D сечение интенсивности электрического поля вдоль оси  $OZ$

Для расчетов на рис. 7 использовались следующие параметры:  $\hat{n} = n + ink = 1,51 + i1,63$  – комплексный показатель преломления сферы, соответствует испаренному железу на длине волны  $\lambda_0 = 0,589 \text{ мкм}$ ;  $a = 0,2 \text{ мкм}$  – радиус шара;  $q = 2$  – параметр дифракции;  $\Delta = 0,004 \text{ мкм} = \frac{\lambda_0}{150}$  – шаг дискретизации;  $N = 10$  – число слагаемых в рядах. Размеры изображения в микрометрах:  $0,4 \times 0,4 \text{ мкм}$ , в пикселях:  $100 \times 100$ . Из рис. 7 видно, что излучение почти не попадает на шар, а отражается от него и «обтекает» его.

Используя данные о распределении векторов электрической и магнитной индукции, можно получить распределения некоторых других величин, характеризующих процесс дифракции света на микрошаре. Например, в качестве таких величин могут выступать модуль вектора Умова-Пойнтинга  $|\vec{S}|$  (рис. 8), равный потоку электромагнитной энергии через единицу поверхности и пропорциональный импульсу, который поле передает частице, а также распределение плотности электромагнитной энергии  $W$  (рис. 9), позволяющее судить о механических напряжениях внутри частицы.

Модуль вектора Умова-Пойнтинга и плотность электромагнитной энергии вычисляются по формулам:

$$|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}|, \quad (38)$$

$$W = \varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2.$$

Расчет выполнен для такого же шара, что и на рис. 6. На рис. 9 виден разрыв в значениях плотности электромагнитной энергии на границе раздела двух сред, хотя должно выполняться граничное ус-

ловие о равенстве тангенциальных составляющих, и можно показать, что в этой точке радиальные составляющие электрической и магнитной напряженностей равны нулю. Разрыв объясняется тем, что хотя в данной точке сумма квадратов модулей электрической и магнитной напряженностей равны внутри и снаружи шара, но в формуле (38) для плотности электромагнитной энергии модуль электрической напряженности суммируется со множителем  $\varepsilon$ , который различен для разных сред.

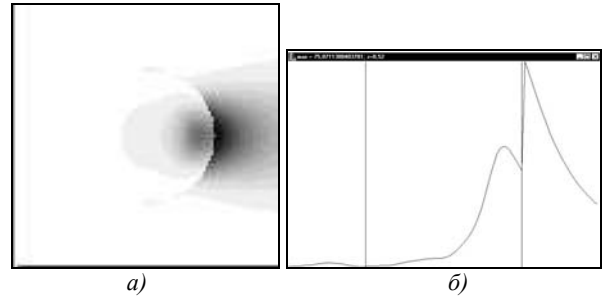


Рис. 8. Распределение модуля вектора Умова-Пойнтинга  $|\vec{S}|$  в плоскости  $X0Z$  и сечение вдоль оси  $OZ$

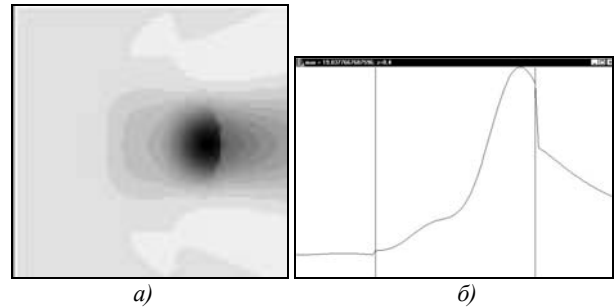


Рис. 9. Распределение плотности электромагнитной энергии  $W$  в плоскости  $X0Z$  и сечение вдоль оси  $OZ$

#### 4. Измерение распределения интенсивности света вблизи микрошара

На рис. 10 показана оптическая схема микроскопа для регистрации с помощью телекамеры распределения интенсивности лазерного света, прошедшего микрообъекты, расположенные на прозрачном предметном стекле. В нашем случае на предметном стекле в растворе воды (показатель преломления 1,33) находились полистироловые микрошарики диаметром 5 мкм с показателем преломления 1,53. Шарики по схеме на рис. 10 освещались почти плоской волной света от лазера с длиной волны 0,633 мкм. Микрометрическая подвижка позволяла фокусироваться на разные плоскости вблизи шарика, а телекамера позволяла регистрировать распределение интенсивности света на этих плоскостях.

Из рис. 11, 12 видно, что диэлектрический микрошар диаметром 5 мкм фокусирует излучение на расстоянии 6,5 мкм от центра, что хорошо согласуется с расчетным фокусным расстоянием для шара, полученным в геометрикооптическом приближении

$$f = R/2(n_2 - n_1) = 6,25 \text{ мкм}.$$

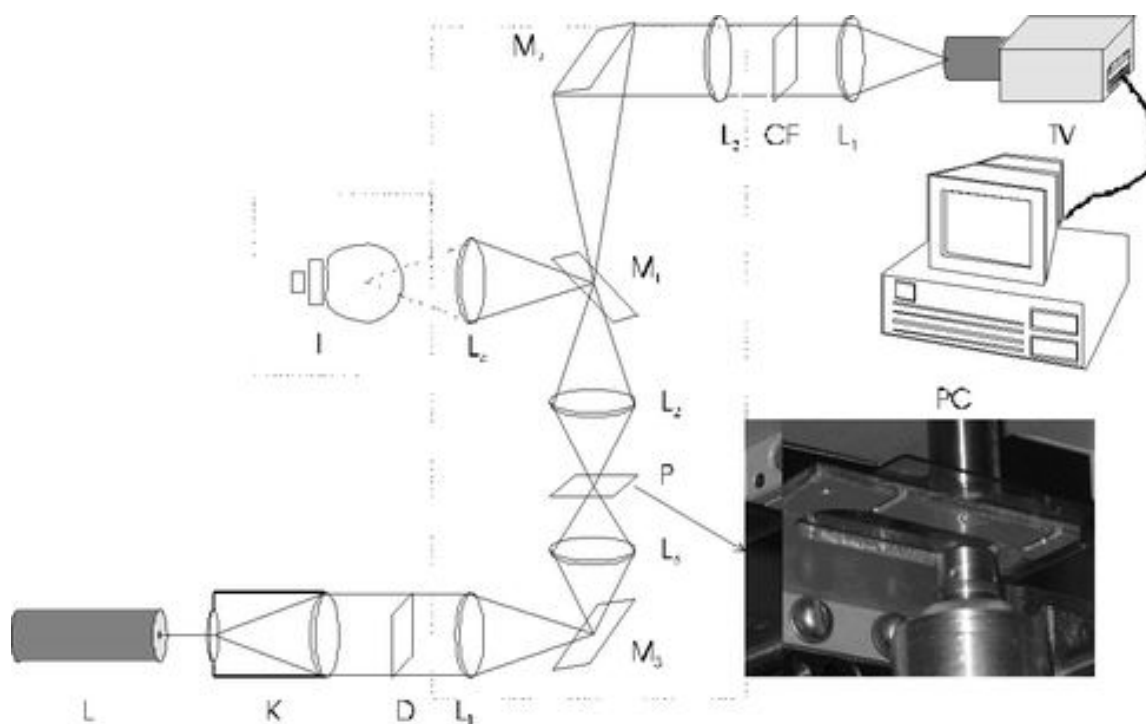


Рис. 10. Оптическая схема лазерного микроскопа с телекамерой для регистрации распределения интенсивности света вблизи микроробъектов

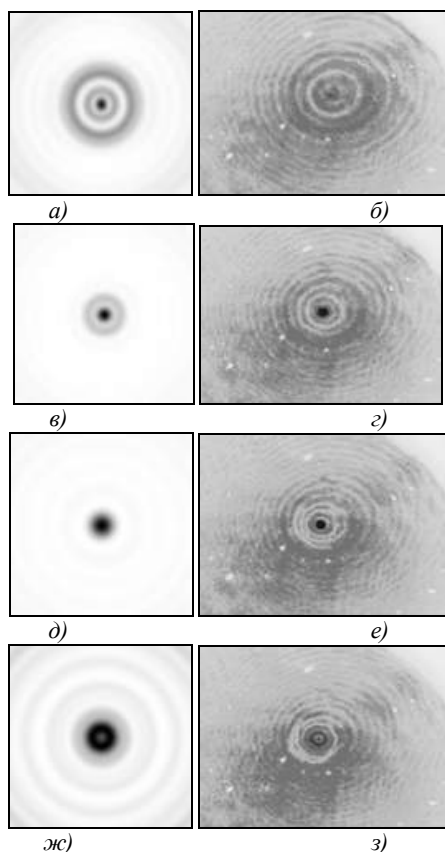


Рис. 11. Распределения интенсивности рассчитанные (левый столбец) и измеренные (правый столбец) на разных расстояниях от центра диэлектрического микрошара: 2,5 мкм (а, б), 4,5 мкм (в, г), 6,5 мкм (д, е) и 8,5 мкм (ж, з). Размер расчетных картин дифракции  $6 \times 6$  мкм, а экспериментальных –  $28 \times 21$  мкм

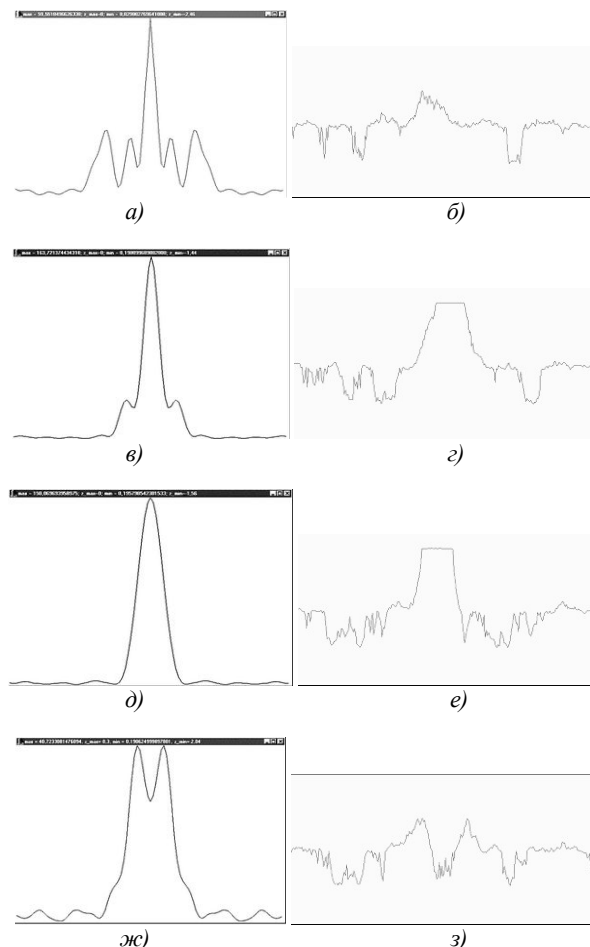


Рис. 12. Центральные 1D сечения 2D радиальных картин дифракции, показанных на рис. 11: левый столбец – расчетные кривые, правый – измеренные



Качественное сравнение расчетных и экспериментальных картин дифракции на рис. 11, 12 показывает, что отчетливо видно совпадение разных стадий фокусировки света микрошаром: широкий сходящийся пучок до фокуса (рис.11, 12 а, б), наиболее яркий фокус (рис.11, 12 д, е), и расширение пучка с провалом после прохождения фокуса (рис.11, 12ж, з). Основные ошибки эксперимента связаны с недостаточной равномерностью интенсивности освещаемого пучка и невысоким динамическим диапазоном фотоприемного устройства (телекамеры). Последнее обстоятельство наглядно проявляется на рис. 12 г, е в виде «среза» максимальных значений интенсивности.

### **Заключение**

В работе с помощью теории Ми произведен расчет всех компонент векторов электромагнитного поля во всех точках внутри и вблизи однородного диэлектрического микрошара при условии плоской линейно поляризованной падающей световой волны. Коэффициент диэлектрической проницаемости может быть комплексным, что позволяет рассчитывать дифракцию на металлических микрошарах.

Разработанный алгоритм устойчиво работает, если дифракционный параметр  $q=ka < 20$ , при этом число слагаемых в суммах из сферических функций Бесселя и Ханкеля доходит до 100.

На численных примерах показано, что  $q < 5$  при дифракции линейно поляризованной плоской волны на микрошаре в поперечном распределении интенсивности нарушается радиальная симметрия. Показано также существование скачков на границе раздела двух сред (на поверхности шара, но не во всех точках) для модуля вектора электрической напряженности, плотности энергии электромагнитного поля и модуля вектора Умова-Пойнтинга.

С помощью лазерного микроскопа с телекамерой осуществлено измерение распределений интенсивности света на некоторых поперечных плоскостях вблизи полистиролового шарика диаметром 5 мкм, лежащего в воде на стекле предметного столика. Качественное сравнение расчетных и экспериментальных картин дифракции показывают совпадение этапов фокусировки света, причем максимальное значение интенсивности наблюдается на расстоянии 6,5 мкм от центра шара, что всего на несколько процентов отличается от геометрического фокусного расстояния для данного шара (6,25 мкм).

### **Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), и гранта Президента РФ (НШ-1007.2003.1).

### **Литература**

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики // М.: Наука, 1973. - 720 с.
2. Ван Де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами // М.: ИЛ, 1961. - 536 с.
3. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами // М.: Мир, 1986. - 664 с.
4. Nieminen T. A., Rubinsztein-Dunlop H., Heckenberg N. R. Calculation and optical measurement of laser trapping forces on non-spherical particles // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2001. Vol. 70. P. 627-637.
5. Malagnini N., Pesce G., Sasso A., Arimondo E. Measurements of trapping efficiency and stiffness in optical tweezers // Optics Communications, 2002. Vol. 214. P. 15-24.
6. Lock J.A., Gouesbet G. Rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory. I. On-axis beams // Journal of Optical Society of America A, 1994. Vol. 9. P. 2503-2515.
7. Lock J.A., Gouesbet G. Rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory. II. Off-axis beams // Journal of Optical Society of America A, 1994 Vol. 9. P. 2516-2525.
8. Andreaesen M. Scattering from bodies of revolution // IEEE Trans. Antennas Propag., 1965. AP-13, P. 303-310.
9. Mantz J., Harrington R. Radiation and scattering from bodies of revolution // Applied Science Research, 1969. Vol. 20. P. 405-435.
10. Wu T., Tsai L. Scattering from arbitrarily-shaped lossy dielectric bodies of revolution // Radio Science, 1977. Vol. 12. P. 709-718.
11. Medgyesi-Mitschang L., Putman J. Electromagnetic scattering from axially inhomogeneous bodies of revolution // IEEE Trans. Antennas Propag., 1964. AP-32. P. 797-806.
12. Gedney S., Mittra R. The use of the FFT for the efficient solution of the problem of electromagnetic scattering by a body of revolution // IEEE Trans. Antennas Propag., 1990. Vol. 38. P. 313-322.
13. Prather D.W., Shi S. Formulation and application of the finite-difference time-domain method for the analysis of axially symmetric diffractive optical elements // Journal of Optical Society of America A, 1999. Vol.16. № 5. P. 1131-1142.
14. Farafonov V.S., Ilin U.B., Henning T. A new solution of the light scattering problem for axisymmetric particles // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 1999. Vol. 63. P. 205-215.
15. Zhang D., Yang X., Tjin S., Krishnan S. Rigorous fine domain simulation of momentum transfer between light and microscopic particles in optical trapping // Opt. Express, 2004. Vol. 12. № 10. P. 2220-2230.
16. Nieminen T.A., Rubinsztein-Dunlop H., Heckenberg N.R., Bishop A.I. Numerical modeling of optical trapping // Comp. Phys. Commun., 2001. Vol. 142. P. 468-471.
17. Yao X., Li Z., Gou H., Cheng B., Zhang D. Effect of spherical aberration on optical trapping forces for Rayleigh particles // China Phys. Lett., 2001. Vol. 18. № 3. P. 432-434.
18. Ganic D., Gan X., Gu M. Exact radiation trapping force calculation based on vectorial diffraction theory // Opt. Express, 2004. Vol. 12. № 12. P. 2670-2675.
19. Im K., Kim H., Joo I., Oh C., Song S., Kim P., Park B. Optical trapping forces by a focused beam through two media with different refractive indices // Opt. Commun., 2003. Vol. 226. P. 25-31.
20. Chen C., Konkola P., Ferrera J., Keilmann R., Schaffenberg M. Analysis of vector Gaussian beam propagation and the validity of paraxial and spherical approximations // Journal of Optical Society of America A, 2002. Vol.19. № 2. P. 404-412.
21. Wu Z., Guo L. Electromagnetic scattering from a multilayered cylinder arbitrary located in a gaussian beam, a

- new recursive algorithms // Progress in Electr. Res., PRIER, 1998. Vol. 18. P. 317-333.
22. Marston P. L., Chrichton J. H. Radiation torque on a sphere caused by circularly-polarized electromagnetic wave // Physical Review A, 1984. Vol. 30. № 3. P. 2508-2516.
23. Hong Du, Hao Zhang Ultra high precision Mie scattering calculations. // 2002.  
<http://optics.physics.miami.edu/exp/Mie/UltraHighMie.pdf>
24. Hong Du Mie scattering calculations // Applied Optics, 2004. Vol. 43. № 9.
25. Wiscombe W.J. Improved Mie scattering algorithms // Applied Optics, 1980. Vol. 19.
26. Shybanov E.B. The improved computational method of scattering calculations on spherical particles // Marine Hydrophysical Institute, Ukrainian Academy of Science.
27. Бажан В. Пакет ScatLab 1.2 // 2003. <http://www.scatlab.com>