

# РАСЧЕТ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ СВЕТА НА КРУГЛЫЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БЫСТРОГО ИТЕРАТИВНОГО АЛГОРИТМА И НА ОСНОВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Котляр В.В., Налимов А.Г., Личманов М.А.  
Институт систем обработки изображений РАН  
Самарский государственный аэрокосмический университет

## Аннотация

Проведено сравнение аналитического решения дифракции непараксиального гауссова пучка на круглом цилиндре с быстрым итеративным алгоритмом расчета. Рассчитаны силы давления, оценена эффективность оптического захвата круглого диэлектрического цилиндра с помощью гауссова пучка с острой фокусировкой в двумерном случае.

## Введение

В [1, 2] рассмотрена дифракция непараксиального гауссова пучка на круглом диэлектрическом цилиндре. При этом центр круга может не совпадать с центром перетяжки цилиндрического гауссова пучка. Приведены аналитические формулы, описывающие напряженность электрического и магнитного полей дифракции в виде рядов по цилиндрическим функциям Бесселя и Ханкеля. В [3-7] получены общие выражения для силы давления света на трехмерный диэлектрический объект, основанные на электромагнитном тензоре Максвелла [3]. Сила давления электромагнитной волны на диэлектрический объект выражается через интеграл по поверхности, охватывающей это тело, от квадратичной комбинации проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей. Поэтому чтобы рассчитать силу давления света требуется решить задачу дифракции света на объекте.

В [8, 9] был предложен быстрый итеративный метод расчета дифракции двумерной электромагнитной волны с ТЕ- и ТМ-поляризациями на диэлектрическом бесконечно-протяженном цилиндре с произвольной формой сечения. В двумерной постановке мощность падающего на объект света рассчитывается как линейная плотность, то есть мощность цилиндрического пучка света на единицу длины цилиндра. Также рассчитывается и сила давления света на цилиндр, как сила на единицу длины цилиндра.

В данной работе проведено численное сравнение двух методов расчета дифракции ТЕ-волны на круглом диэлектрическом цилиндре – аналитического [1, 2] и итеративного [8, 9]. Получены условия, при которых оба метода отличаются не более чем на 1%. Кроме этого показано, что при увеличении смещения центра круглого цилиндра из центра перетяжки гауссова пучка растет число ненулевых членов ряда, которые должны быть учтены в аналитическом расчете, чтобы сохранить точность решения.

Также в работе показана возможность оптического захвата цилиндрическим непараксиальным гауссовым пучком с радиусом перетяжки, равным половине длины волны, круглого диэлектрического цилиндра с диаметром, равным длине волны, и диэлектрической проницаемостью, равной 2.

## 1. Расчет поля дифракции и силы давления света на диэлектрический цилиндр

Для расчета сил, действующих на объект со стороны света, необходимо рассчитать все компоненты электрического и магнитного полей дифракции лазерного излучения на этом объекте. В частности для двумерного случая с ТЕ-поляризацией необходимо рассчитать электрическую компоненту  $E_x$  и магнитные компоненты  $H_y, H_z$ .

Далее рассмотрим быстрый итеративный алгоритм расчета поля дифракции и расчет аналитическим методом с разложением по цилиндрическим волнам. Рассчитанные поля дифракции затем подставим в расчет силы давления света на двумерный объект.

### 1.1 Итеративный алгоритм

В [8] описан итеративный метод расчета дифракции произвольной электромагнитной волны, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца, на цилиндрических диэлектрических микрообъектах с произвольной формой сечения (ТЕ-поляризация). Ядром итеративного алгоритма является уравнение Фредгольма второго рода:

$$E_{n+1}(z, y) = \gamma E_{0x}(z, y) + (1 - \gamma) E_n(z, y) + \gamma \beta \iint_S E_n(\xi, \eta) H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(z-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right) d\xi d\eta, \quad (1)$$

где  $(z, y) \in S$ ;  $E_{n+1}$  и  $E_n$  – амплитуда электрического поля внутри области  $S$  на  $(n+1)$ -ом и  $n$ -ом шагах итераций;  $\gamma$  – постоянная релаксации алгоритма, которая регулирует скорость его сходимости,  $\beta = \frac{ik^2(\epsilon - 1)}{4}$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число света,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость цилиндра,  $(\xi, \eta) \in S$  – декартовы координаты внутри объекта,  $H_0^{(1)}(x)$  – функции Ханкеля 1-го рода нулевого порядка. В качестве начального приближения можно брать падающее поле:

$$E_1(x, y) = E_{x0}(x, y). \quad (2)$$

Данный алгоритм сходится при условии  $kd\epsilon \leq 4\pi$ , где  $d$  – диаметр сечения цилиндра. Для моделирования оптического захвата цилиндриче-

ских микрообъектов можно воспользоваться аналитическим решением дифракции гауссова пучка.

### 1.2. Аналитическое решение задачи дифракции

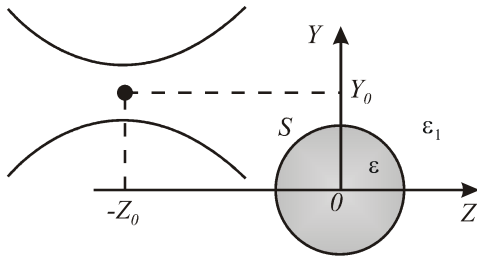


Рис. 1. Схема падения гауссова пучка с фокусом в точке  $(-Z_0, Y_0)$  на круглый цилиндр с центром в точке  $(0; 0)$

Следуя [2], рассмотрим дифракцию двумерного непараксиального гауссова пучка на круглом однородном цилиндре (рис. 1). Для случая ТЕ-поляризации, когда  $(E_x, H_y, H_z)$  – отличны от нуля, напряженность электрического поля для непараксиального гауссова пучка можно записать в виде:

$$E_{0x}(r, \varphi) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n C_n J_n(kr) e^{in\varphi}, \quad (3)$$

$$C_n = \frac{\omega_0 \sqrt{\pi}}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{k^2 \omega_0^2 q^2}{4} + ik\sqrt{1-q^2}z_0 - ikqy_0 - in \arcsin q \right] dq. \quad (4)$$

Напряженность электрического поля вне цилиндра равна сумме рассеянного и падающего полей:

$$E_x = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n C_n J_n(kr) e^{in\varphi} + E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n a_n C_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi} \quad (5)$$

где

$$a_n = \frac{(k_1 J_n'(k_1 R) J_n(kR) - k J_n(k_1 R) J_n'(kR))}{(k_1 J_n'(k_1 R) H_n^{(1)}(kR) - k J_n(k_1 R) H_n^{(1)}(kR))}, \quad (6)$$

где  $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_1}$  – волновое число в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ .

Связь между проекциями  $H_y$ ,  $H_z$  и  $E_x$  следует из уравнений Максвелла:

$$H_y = -\frac{i}{k} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{k} \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (7)$$

### 1.3 Сила давления света на объект

Сила, действующая на объект со стороны падающего поля, рассчитанная в общем случае с помощью электромагнитного тензора Максвелла [9] в 2D случае, может быть вычислена интегрированием по контуру  $S$  вокруг объекта:

$$F_x = 0,$$

$$F_y = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \oint_S \left\{ \frac{1}{2} \left[ |H_y|^2 - \varepsilon_1 |E_x|^2 - |H_z|^2 \right] dz + \operatorname{Re}(H_y H_z^*) dy \right\}, \quad (8)$$

$$F_z = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \oint_S \left\{ \frac{1}{2} \left[ |H_z|^2 - \varepsilon_1 |E_x|^2 - |H_y|^2 \right] dy + \operatorname{Re}(H_z H_y^*) dz \right\}, \quad (9)$$

где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная,

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{кЛ}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \quad (\text{в системе СИ}).$$

## 2. Численное моделирование

Исследуем работоспособность итеративного и аналитического методов расчета дифракции электромагнитной волны на микрообъектах. Далее, на основании результата вычислений поля дифракции электромагнитной волны на микрообъекте, рассчитаем силу давления света на этот микрообъект.

### 2.1. Сравнение итеративного и аналитического расчетов.

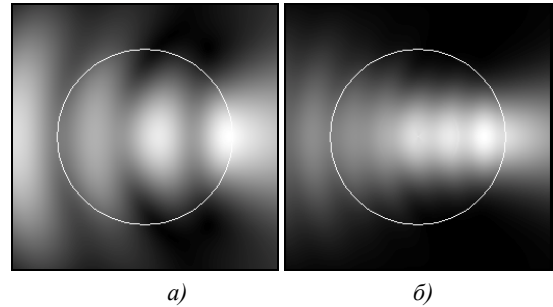


Рис. 2. а) Амплитуда  $E_x$  поля дифракции непараксиального гауссова пучка на цилиндре, б) модуль проекции вектора Умова-Пойнтинга на ось распространения света  $Z$ .

Параметры: длина волны  $\lambda = 1$  мкм, диаметр круглого цилиндра  $d = 1$  мкм, диэлектрическая проницаемость цилиндра  $\varepsilon = 2$ , среды  $\varepsilon_1 = 1$ , все поле  $1,5 \times 1,5$  мкм, цилиндр помещен в центр перетяжки с радиусом  $\sigma = 0,5$  мкм

На рис. 2 представлено поле дифракции, рассчитанное по формуле (5). СКО между данным решением и расчетом картины дифракции при помощи алгоритма, описанного в [8], составляет 0,08% при параметрах: длина волны  $\lambda = 1$  мкм, диаметр круглого цилиндра  $d = 1$  мкм, диэлектрическая проницаемость цилиндра  $\varepsilon = 2$ , среды  $\varepsilon_1 = 1$ , все поле  $1,5 \times 1,5$  мкм, 256x256 отсчетов, объект помещен в центр перетяжки с радиусом  $\sigma = 0,5$  мкм, количество коэффициентов ряда  $N = 8$ . Вектор Умова-Пойнтинга рассчитывается по формуле:

$$\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right] \quad (10)$$

а его проекция на ось распространения света  $Z$  будет равна:

$$S_z = \varepsilon_0 c^2 E_x H_y. \quad (11)$$

На рис. 3 приведены те же поля для цилиндра, смещенного на 0,25 мкм (вверх) по оси  $Y$  из перетяжки. По картине модуля проекции вектора Умова-Пойнтинга на ось распространения света хорошо заметно, что энергия в пучке отклоняется в сторону смещения цилиндра.

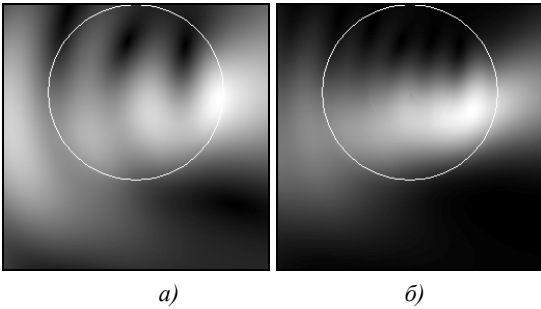


Рис. 3. а) амплитуда  $E_x$  поля дифракции непараксиального гауссова пучка на цилиндре, б) модуль проекции вектора Умова-Пойнтинга на ось распространения света  $Z$ . Параметры те же, что и на рис. 2, цилиндр смещен на  $L=0,25$  мкм по оси  $Y$

Точность расчета поля дифракции аналитическим методом зависит от количества коэффициентов ряда  $C_n$  (4). Зависимость невязки  $\delta$  между амплитудами электрических полей, полученных при помощи итеративного алгоритма и по формуле (5), от количества коэффициентов показана на рис. 4, рассчитываемая по формуле:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{n,m=1}^N (E_x(n,m) - E_n(n,m))^2}{\sum_{n,m=1}^N E_x^2(n,m)}} \quad (12)$$

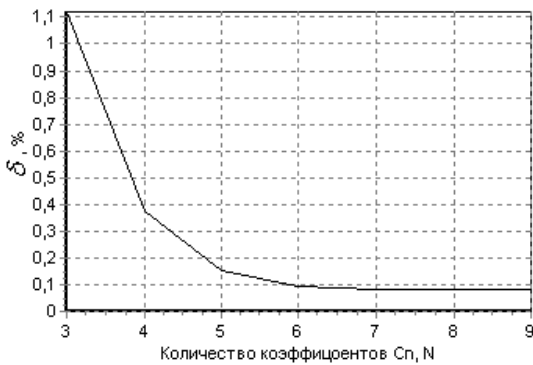


Рис. 4. Зависимость невязки  $\delta$  между амплитудами поля  $E_x$ , рассчитанного итеративным и аналитическим методами, от количества коэффициента  $C_n$  ряда (5)

Количество коэффициентов ряда  $C_n$  изменяется от -3.3 до -9.9, остальные параметры моделирования те же, что и для рис. 2.

Диапазон параметров, при которых поле дифракции рассчитывается корректно у аналитического метода шире, чем у итеративного алгоритма. Однако аналитический метод дает погрешность при расчете дифракции гауссова пучка на цилиндре, находящегося в теневой области. На рис. 5 представлен график зависимости невязки  $\delta$  между итера-

тивным и аналитическим методами расчета дифракции от смещения круглого цилиндра вдоль вертикальной оси  $Y$  (рис. 1) по линии, проходящей точно через перетяжку ( $Z=0$ ).

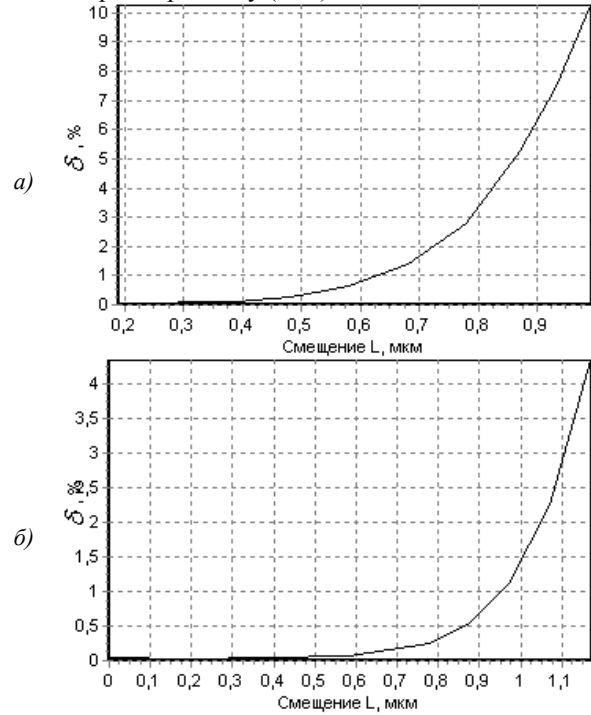


Рис. 5. Зависимость невязки  $\delta$  между амплитудами электрических компонент электромагнитной волны, рассчитанных итеративным и аналитическим методами. В аналитическом методе бралось:

а)  $N=7$  коэффициентов; б)  $N=9$  коэффициентов

Как можно увидеть из рис. 5, невязка сильно возрастает при смещении цилиндра из фокуса в теневую область. Однако это можно исправить взятием большего количества коэффициентов  $C_n$ . Такая необходимость взятия большего количества коэффициентов  $C_n$  возникает из-за смещения значимых для расчета больших по модулю коэффициентов  $C_n$  от 0-го номера в сторону больших номеров, что проиллюстрировано на рис. 6.

На рис. 6а, б изображена зависимость модуля коэффициентов  $C_n$  от номера  $n$ . Как видно из графиков, при взятии того же количества коэффициентов и смещении цилиндра в вычислении принимают участие не все значимые коэффициенты, что дает увеличение погрешности расчетов.

Зависимость невязки  $\delta$  между картинками дифракции, рассчитанными итеративным и аналитическим методами, от смещения вдоль оси  $Z$  дает иную картину. Так, на рис. 7 можно увидеть, что невязка незначительно возрастает при смещении цилиндра из фокуса вдоль оси распространения света на большее смещение, чем вдоль оси  $Y$ . Параметры вычислительного эксперимента те же, что и для рис. 2.

Это объясняется другой зависимостью коэффициентов  $C_n$  от смещения, отображенной на рис. 8.

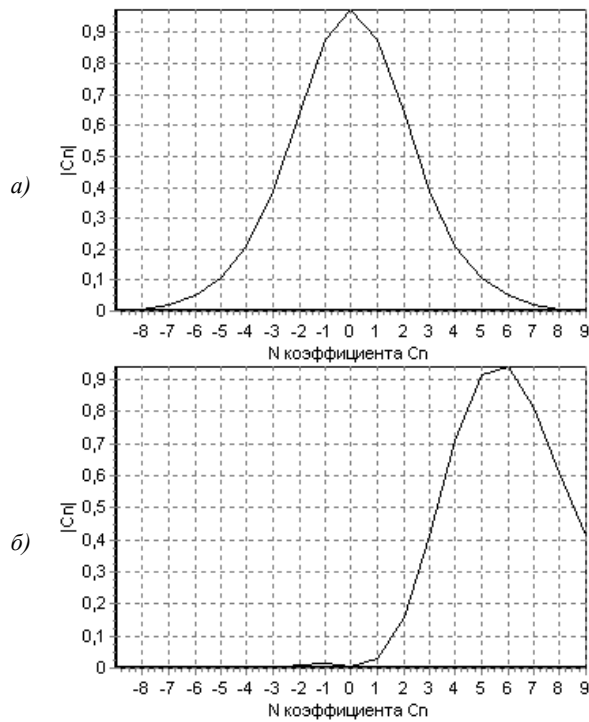


Рис. 6. Зависимость модуля коэффициента  $C_n$  от номера  $n$ : а) цилиндр совпадает с фокусом гауссова луча, б) цилиндр смещен из фокуса гауссова пучка на  $L=1$  мкм по оси  $Y$

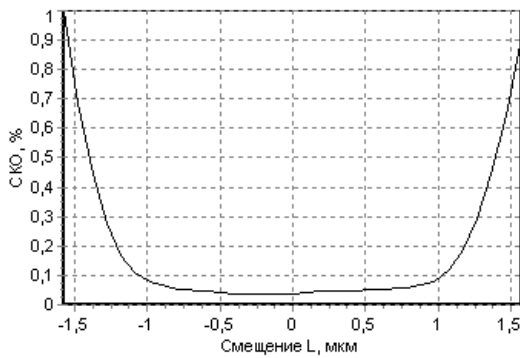


Рис. 7. Зависимость СКО между амплитудой  $E_x$  поля дифракции, рассчитанного итеративным и аналитическим методами, от смещения  $L$  цилиндра вдоль оси  $Z$  через фокус при  $Y=0$

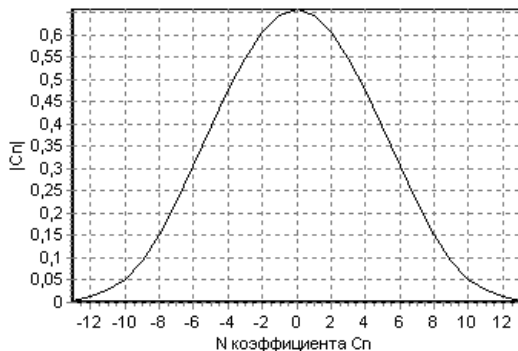


Рис. 8. Зависимость модуля коэффициентов  $C_n$  от номера  $n$ . Перетяжка смещена от цилиндра по оси  $Z$  на расстояние  $L=-1,56$  мкм

Как видно из рис. 8, ширина полосы значимых коэффициентов  $C_n$  расширяется при смещении пе-

ретьяжки из центра координат (и от центра цилиндра), и, чтобы это компенсировать, необходимо брать тем больше коэффициентов  $C_n$ , чем дальше смещена перетяжка гауссова пучка. В данном примере (рис. 8) взятие коэффициентов  $C_n$  от -9 до 9 дает невязку  $\delta$  между амплитудами  $E_x$ , рассчитанных аналитическим и итеративным методами, порядка 1% (рис. 7).

Взятие большего количества коэффициентов  $C_n$  сопряжено с увеличением вычислительной сложности и, следовательно, с увеличением временных затрат на расчет поля дифракции. Так, например, расчет поля дифракции размером  $5 \times 5$  мкм ( $256 \times 256$  отсчетов) при параметрах: длина волны  $\lambda=1$  мкм, диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_1=1$ , диэлектрическая проницаемость цилиндра  $\epsilon=2$ , диаметр цилиндра  $d=1$  мкм (перетяжка расположена в центре координат) аналитическим методом при взятии коэффициентов  $C_n$  от -7 до 7 требует 40 секунд для компьютера с ЦП Celeron 1000, СКО между амплитудами  $E_x$ , рассчитанными аналитическим и итеративным методами составляет 0,038%. Расчет поля дифракции в том же случае, но при расположении перетяжки в координатах ( $Z=-1,56$  мкм,  $Y=0$  мкм) и взятии коэффициентов  $C_n$  от -13 до 13 требует 19 минут 53 секунды, невязка  $\delta$  между амплитудами  $E_x$ , рассчитанными аналитическим и итеративным методами составляет 0,077%.

## 2.2 Расчет силы давления

На рис. 9. приведен пример графиков зависимости проекций силы, действующей на круглый цилиндр со стороны гауссова пучка, вдоль осей  $Y, Z$  от смещения цилиндра по тем же осям, из которых видна возможность «захвата» объекта лазерным излучением в оптическую ловушку.

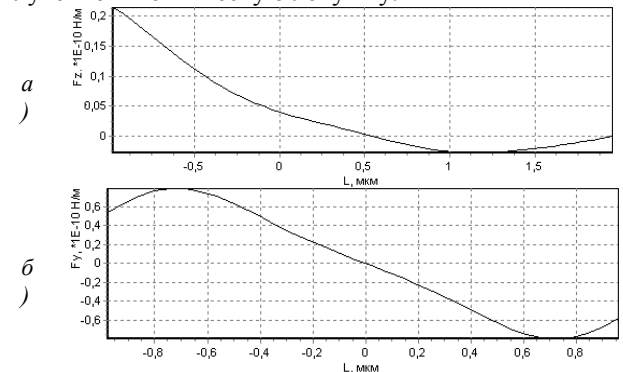


Рис 9. Зависимость проекций силы, действующей на цилиндр, от его смещения вдоль той же оси: а) вдоль оси  $Z$ ; б) вдоль оси  $Y$

Параметры моделирования: все поле размером  $5 \times 5$  мкм,  $256 \times 256$  отсчетов, длина волны  $\lambda=1$  мкм, диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_1=1$ , диэлектрическая проницаемость цилиндра  $\epsilon=1,3$ , диаметр цилиндра  $d=1,5$  мкм, радиус перетяжки в фокусе  $\sigma=0,5$  мкм. Линия смещения объекта на обоих графиках проходит через центр перетяжки. Из

рис. 9 видно, что сила, действующая на микроцилиндр, равна по порядку величины  $10^{-10} \frac{H}{m}$  при мощности лазера гауссова пучка  $100 \frac{mBm}{m}$ .

Из рис. 9 видно, что при смещении в любом направлении из фокуса гауссова пучка сила действует на частицу в направлении, противоположном смещению. Проекция силы вдоль оси  $Z$  складывается из градиентной и рассеивающей сил [10]. Градиентная сила всегда направлена в максимум интенсивности излучения, а рассеивающая – вдоль оси распространения света. Поэтому центр захвата частицы не совпадает с геометрическим центром перетяжки гауссова пучка, и возможность захвата определяется балансом между рассеивающей и градиентной составляющими проекциями силы вдоль оси  $Z$ .

На рис. 10 представлен график зависимости эффективности захвата  $Q$  от смещения вдоль осей  $Y, Z$ , рассчитываемой по формуле:

$$Q = \frac{cF}{nP}, \quad (13)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме,  $F$  – сила, действующая на объект,  $n = \sqrt{\epsilon}$  – показатель преломления объекта,  $P$  – мощность излучения лазера.

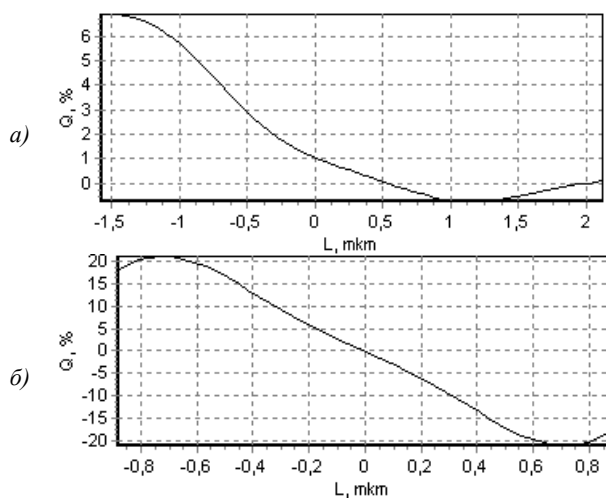


Рис. 10. Графики зависимости эффективности захвата вдоль оси от смещения вдоль той же оси: а) ось распространения света  $Z$ ; б) ось  $Y$

В случае силы, направленной вдоль рассматриваемой оси,  $Q > 0$ , и  $Q < 0$  в обратном случае, что показывает возможность оптического «захвата» частицы. Физический смысл эффективности захвата – это часть излучения, пошедшего на создание силы, действующей на частицу.

## Заключение

В работе получены следующие результаты:

- проведено сравнение точности расчета дифракции гауссова пучка на диэлектрических микрообъектах аналитическим и итеративным методами (рис. 4, 5, 7)
- Рассмотрено влияние количества взятых для расчета коэффициентов  $C_n$  на точность расчета поля дифракции при смещении объекта из центра перетяжки непараксиального гауссова пучка вдоль осей  $Y$  (рис. 5) и  $Z$  (рис. 7)
- оценена эффективность захвата диэлектрического цилиндра отдельно для смещения вдоль осей  $Y$  и  $Z$  (рис. 10) по формуле (10).

## Благодарности

Работа поддержана российско-американской программой «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), грант CRDF REC-SA-014-02 и президентским грантом НШ-1007.2003.01.

## Литература

1. Zimmerman E., Dandliner R., Souli N. Scattering of an off-axis Gaussian beam by a dielectric cylinder compared with a rigorous electromagnetic approach. // J. Opt. Soc. Am. A, 1995, v. 12, p. 398-403.
2. Wu Z., Guo L.. Electromagnetic scattering from a multilayered cylinder arbitrarily located in a Gaussian beam, a new recursive algorithms. // Progress in electromagnetics research, 1998, PIER, v. 18, p. 317-333.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Краткий курс теоретической физики. Механика. Электродинамика // Книга 1, М., Наука, 1969.
4. Lock J.A.. Calculation of the radiation trapping force for laser tweezers by use of generalized Lorenz-Mie theory I. Localized model description of an on-axis tightly focused laser beam with spherical aberration. // Appl. Opt., 2004, V. 43, p. 2532-2544.
5. Ganic D., Gan X., Gu M.. Exact radiation trapping force calculation based on vectorial diffraction theory. // Opt. Express, 2004, v. 12, no. 12, p. 2670-2675.
6. Nieminen T.A., Heckenberg N.R., Rubinstein-Dunlop H.. Computational modeling of optical tweezers. // Proceedings of SPIE, 2004, v. 5514, p. 514-523.
7. Pobre R., Saloma C.. Radiation forces on nonlinear microsphere by a tightly focused Gaussian beam. // Appl. Opt., 2002, v. 41, no. 36, p. 7694-7701.
8. Котляр В.В., Налимов А.Г., Скиданов Р.В. Быстрый метод расчета дифракции на цилиндрических диэлектрических микрообъектах // Компьютерная оптика, 2004, №25, с. 24-28.
9. Котляр В.В., Налимов А.Г., Скиданов Р.В. Расчет вектора Умова-Пойнтинга и силы давления электромагнитной волны на однородный диэлектрический цилиндр // Известия Сибирского РАН, 2004, т. 6, № 2.
10. Rohrbach A., Stelzer E.H.K.. Optical trapping of a dielectric particles in arbitrary fields. // J. Opt. Soc. Am. A, 2001, v. 18, p. 839-853.