ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ: МЕТОДЫ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

О РЕКУРСИВНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ СВЕРТКИ ИЗОБРАЖЕНИЯ И ДВУМЕРНОГО НЕРАЗДЕЛИМОГО КИХ-ФИЛЬТРА

Мясников В.В.
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

В работе предлагается метод построения алгоритма рекурсивного вычисления свертки изображения и двумерного фильтра с неразделимой конечной импульсной характеристикой (КИХ). Этот метод основан на представлении конечной импульсной характеристики фильтра через вертикальные и горизонтальные рекуррентные соотношения. Каждое из рекуррентных соотношений приводит к полу-рекурсивной процедуре вычисления свертки изображения и двумерного КИХ-фильтра. В свою очередь, каждая из этих полу-рекурсивных процедур состоит из двух частей. Первая часть процедуры представляет собой рекурсивное соотношение, предназначенное для пересчета значений в процедуре, а вторая часть - нерекурсивное вычисление сверток на границах импульсной характеристики. Для перехода от полученной полу-рекурсивной процедуры к полностью рекурсивному алгоритму вычисления искомой свертки в работе доказывается специальное утверждение. Это утверждение показывает, что если импульсная характеристика искомого фильтра удовлетворяет рекуррентным соотношениям и по вертикали и по горизонтали, тогда все дополнительные импульсные характеристики, с которыми производится вычисление сверток на границах КИХ-фильтра, удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям. Данное утверждение позволяет модифицировать полученную процедуру в полностью рекурсивный алгоритм вычисления свертки изображения и двумерного неразделимого КИХ-фильтра. В работе также приводятся оценки вычислительной сложности предложенного рекурсивного алгоритма, выражаемые числом арифметических операций.

Введение

Вычисление свертки является базовой операцией в теории цифровой обработке сигналов и изображений. Вычисление свертки входного изображения $x(n_1,n_2)$ и линейного фильтра с конечной импульсной характеристикой (ИХ) $h(n_1,n_2)$ может быть представлено в форме:

$$y(n_1,n_2)=\sum_{(m_1,m_2)\in D} h(m_1,m_2)\times(n_1-m_1,n_2-m_2). \quad (1)$$

Здесь $y(n_1,n_2)$ – выходное изображение, D – конечная (ограниченная) область ненулевых отсчетов импульсной характеристики. Будем считать, что область D задана следующим образом:

$$D=\{(m_1,m_2)\in[0,M_1]\times[0,M_2]\}. \quad (2)$$

В теории цифровой обработки сигналов и изображений существует два принципиально различных алгоритмических подхода к быстрому вычислению свертки (1). Первый подход использует теорию быстрых ортогональных преобразований [1]. Второй подход использует рекуррентные соотношения для получения рекурсивных алгоритмов вычисления свертки. Последний применяется обычно для фильтров с бесконечной импульсной характеристикой – БИХ–фильтров [2, 12]. Однако также возможно использованием этого подхода для КИХ–фильтров [4–9, 11, 12]. На возможность рекурсивного и параллельно-рекурсивного вычисления свертки изображения и КИХ–фильтра одним из первых указал Л.П. Ярославский в работе [3]. Определенное обобщение и развитие этого подхода было представлено в работах [4, 5, 8]. Работы [6, 7, 9] использовали полиномиальные импульсные характеристики фильтра для рекурсивной реализации свертки. Авторская работа [9] дает описание метода построения алгоритма рекурсивного вычисления свертки изображения и неразделимого двумерного полиномиального КИХ–фильтра.

Настоящая работа представляет развитие метода, предложенного в [9], для случая, когда ИХ фильтра является произвольной неразделимой двумерной функцией с конечной областью определения.

Данная работа организована следующим образом. Первый раздел представляет некоторые известные результаты одномерной рекурсивной фильтрации. В нем дается описание одномерного рекурсивного алгоритма, используемое для вычисления свертки сигнала и одномерного КИХ–фильтра. Определение одномерной рекуррентной конечной импульсной характеристики дается также в этом разделе. Приведены выражения для вычислительной сложности рекурсивной обработки. Также здесь демонстрируется простой пример рекурсивного вычисления свертки сигнала и одномерного фильтра с прямоугольным импульсным откликом. Детали подхода, изложенного в этом разделе, могут быть найдены в работах [4, 5, 8].

Во втором разделе приведено обобщение результатов одномерной рекурсивной обработки на двумерный случай. Для того чтобы перейти к ситуации двумерной обработки, используется идея, которая была предложена автором в работе [9] при построении рекурсивного двумерного неразделимого полиномиального КИХ–фильтра. В частности, по аналогии с одномерным случаем вводится определение двумерной рекуррентной импульсной характеристики. Это определение, соответствующее представлением двумерного КИХ–фильтра, используется для получения полу-рекурсивной процедуры вычисления свертки изображения и произвольного двумерного неразделимого КИХ-фильтра. Эта полу-рекурсивная процедура представлена в настоящем разделе. Показано, что она состоит из двух частей. Первая часть представляет собой рекурсивную часть расчета искомой свертки, а вторая содержит выражения для нерекурсивного вычисления сверток на границах исходного КИХ–фильтра. В работе показывается, что указанные выражения вычисления сверток используют в выражениях пиксели входного изображения и некоторые специфические конечные ИХ, отсчеты которых зависят от отсчетов первоначального КИХ–фильтра. Выражения для вычислительной сложности предложенной полу-рекурсивной процедуры даны во втором разделе. В качестве показателей сложности выступают количества арифметических операций сложения и умножения, необходимых для расчета одного отсчета выходного изображения.

Третий раздел представляет результаты модификации полученной полу-рекурсивной процедуры в полностью рекурсивный алгоритм расчета свертки. В нем доказывается утверждение, которое показывает, что конечные импульсные характеристики, используемые в нерекурсивной части процедуры, удовлетворяют одному и тому же вполне определенному двумерному рекуррентному соотношению. В частности, если ИХ первоначального фильтра удовлетворяет некоторому двумерному рекуррентному соотношению, то и все указанных ИХ удовлетворяют этому же рекуррентному соотношению. Данное утверждение позволяет перейти к полностью рекурсивному алгоритму вычисления свертки изображения и двумерного неразделимого КИХ-фильтра, заменив прямые выражения для сверток на границах исходного КИХ–фильтра некоторыми рекурсивными выражениями. Выражения для вычислительной сложности разработанного двумерного рекурсивного алгоритма вычисления свертки приводятся в завершении данного раздела.

Четвертый раздел дает алгоритм расчета параметров двумерной рекуррентной конечной ИХ для представления с ее помощью произвольной двумерной неразделимой ИХ линейного фильтра. Для этого используется аппроксимация данного двумерного линейного фильтра посредством вертикальных и горизонтальных двумерных рекуррентных соотношений. В качестве показателя качества аппроксимации в работе используется величина среднеквадратического отклонения между искомой ИХ и ее аппроксимацией. Показывается, что параметры двумерных рекуррентных соотношений зависят от ковариационной функции искомой ИХ. В разделе представлено явное выражение для квази-оптимального решения обозначенной задачи аппроксимации. Также представлено аналитическое выражение для значения критерия в точке этого решения. Следует отметить, что представленные результаты могут быть использованы также и для одномерного случая.

В пятом разделе приведена информация о поддержке данной работы со стороны грантов и спонсоров.

1. Рекурсивное вычисление свертки одномерного сигнала и КИХ-фильтра

Данный раздел содержит обзор некоторых известных результатов рекурсивной фильтрации для одномерного случая. Детали алгоритмов рекурсивного вычисления свертки сигнала и одномерного КИХ-фильтра могут быть найдены в работах [4, 5, 8].

Операция вычисления свертки сигнала и одномерного КИХ-фильтра может быть представлена в виде:

$$y(n)=\sum_{m\in D}h(m)x(n-m)\ . \tag{3}$$

Здесь сигналы $x(n)$ и $y(n)$ представляют, соответственно, входную и выходную одномерные последовательности, а функция $h(m)$ является импульсной характеристикой линейного фильтра. Величина D задает область определения фильтра, соответствующую его ненулевым значениям. Эта область является конечной. Для определенности положим $D=[0,M]$.

Пусть ИХ фильтра удовлетворяет рекуррентному соотношению K–ой степени. Если данное утверждение не выполняется и ИХ не удовлетворяет рекуррентному соотношению, в этом случае всегда можно аппроксимировать ее с помощью такого рекуррентного соотношения. Поэтому предположим далее, что для импульсной характеристики фильтра выполняется следующее соотношение:

$$h(m)=\begin{cases} b_m, & m=\overline{0,K-1},\\ \sum\limits_{k=1}^{K}\alpha_k h(m-k), & m=\overline{K,M-1},\\ 0, & m<0,\ m\ge M. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь величины $\alpha_k\ \left(k=\overline{1,K}\right)$ являются *коэффициентами рекуррентного соотношения*, а величины $b_m\ \left(m=\overline{0,K-1}\right)$ – его *начальными значениями* [10]. Будем в дальнейшем называть импульсные характеристики, удовлетворяющие соотношению (4), *одномерными рекуррентными импульсными характеристиками*. Тогда выражение вычисления свертки (3) сигнала и фильтра с одномерной рекуррентной ИХ может быть представлено в рекурсивном виде [5, 8]:

$$y(n)=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k y(n-k)+\sum_{m=0}^{K-1}h^+(m)x(n-m)-$$
$$-\sum_{m=0}^{K-1}h^-(m)x(n-M-m).$$

Функции $h^+(k)$ и $h^-(k)$, использованные в данном выражении, могут быть вычислены заранее. Они задаются следующими выражениями:

$$h^+(m)=h(m)-\sum_{k=0}^{m}\alpha_k h(m-k),$$
$$h^-(m)=\sum_{k=m+1}^{K}\alpha_k h(M+m-k),\quad m=\overline{0,K-1}.$$

Обозначим далее

$$y^+(n)=\sum_{m=0}^{K-1}h^+(m)x(n-m),$$
$$y^-(n)=\sum_{m=0}^{K-1}h^-(m)x(n-m). \tag{5}$$

Тогда выражение, определяющее процедуру рекурсивного вычисления свертки, примет вид:

$$y(n)=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k y(n-k)+y^+(n)-y^-(n-M). \tag{6}$$

Алгоритм рекурсивного вычисления свертки, использующий выражения (5) – (6), требует $U_*(K)=3K$ умножений и $U_+(K)=3K-1$ сложений на один пиксель выходного сигнала. Будем в дальнейшем использовать для них следующие обозначения:

$$U_+(K)=3K-1,\ U_*(K)=3K. \tag{7}$$

Представленные выражения вычислительной сложности демонстрируют основное преимущество рекурсивного подхода по сравнению с алгоритмами прямой и быстрой свертки: *вычислительная сложность рекурсивного алгоритма не зависит от размеров области определения импульсной характеристики*.

Например, одной из наиболее простых рекуррентных импульсных характеристик является прямоугольная ИХ:

$$h(n)=\begin{cases}b, & m\in[0,M-1],\\ 0, & m\notin[0,M-1].\end{cases} \tag{8}$$

Она удовлетворяет рекуррентному соотношению первого порядка $(K=1)$. Параметры рекуррентного соотношения для этой ИХ следующие: $\alpha_1=1,\quad b_0=b$. Подставляя эти величины в выражение (5)-(6) можно легко получит следующую рекурсивную процедуру для вычисления свертки одномерного сигнала и фильтра с прямоугольным импульсным откликом:

$$y(n)=\alpha_1 y(n-1)+h(0)x(n)-h(M-1)x(n-M).$$

В соответствии с выражением (7) эта процедура требует два сложения и три умножения на один отсчет выходного сигнала. Однако, принимая во внимание, что $\alpha_1=1,\quad h(m)=b$, окончательное выражение для рекурсивного вычисления свертки принимает хорошо известное выражение:

$$y(n)=y(n-1)+b\big(x(n)-x(n-M)\big). \tag{9}$$

В такой форме для выполнения обработки требуется два сложения и одно умножение на один отсчет выходного сигнала.

2. Полу-рекурсивная процедура вычисления свертки изображения и двумерного неразделимого КИХ–фильтра

Для обобщения представленного выше одномерного подхода к построению рекурсивного алгоритма на двумерный случай введем понятие двумерной рекуррентной импульсной характеристики. Итак, назовем *двумерной рекуррентной импульсной характеристикой* такую ИХ, которая удовлетворяет следующему двумерному рекуррентному соотношению:

$$h(m_1,m_2)=\begin{cases}b_{m_1m_2}, & m_1=\overline{0,K_1-1},\ m_2=\overline{0,K_2-1},\\ \sum_{k=1}^{K_1}\alpha_k^1 h(m_1-k,m_2), & \\ \quad m_1=\overline{K_1,M_1-1},\ m_2=\overline{0,K_2-1}, & \\ \sum_{k=1}^{K_2}\alpha_k^2 h(m_1,m_2-k), & \\ \quad m_1=\overline{0,M_1-1},\ m_2=\overline{K_2,M_2-1}, & \\ 0, & m_1\notin[0,M_1-1]\ or\ m_2\notin[0,M_2-1].\end{cases} \tag{10}$$

Здесь величины $\alpha_k^1\ \left(k=\overline{1,K_1}\right)$ задают коэффициенты вертикального рекуррентного соотношения, величины $\alpha_k^2\ \left(k=\overline{1,K_2}\right)$ задают коэффициенты горизонтального рекуррентного соотношения, а величины $b_{m_1m_2}$, $\left(m_1=\overline{0,K_1-1},\ m_2=\overline{0,K_2-1}\right)$ являются начальными значениями для двумерного рекуррентного соотношения. Из представленного выражения видно, что для вычисления значения импульсного отклика, используя выражение (10), необходимо использовать вначале вертикальное рекуррентное соотношение, которое задается в (10) выражением во второй строке, а затем уже горизонтальное рекуррентное соотношение, которое задается выражением в третьей строке (10). Однако подобный способ задания не единственный. А именно, двумерная рекуррентная ИХ может быть представлена в альтернативной форме, когда порядок использования вертикальных и горизонтальных рекуррентных соотношений обратный. Поэтому может быть использовано такое определение для рекуррентной ИХ:

$$h(m_1,m_2)=\begin{cases}\dots \\ \sum_{k=1}^{K_2}\alpha_k^2 h(m_1,m_2-k), \\ \quad m_1=\overline{0,K_1-1},\ m_2=\overline{K_2,M_2-1}, \\ \sum_{k=1}^{K_1}\alpha_k^1 h(m_1-k,m_2), \\ \quad m_1=\overline{K_1,M_1-1},\ m_2=\overline{0,M_2-1}, \\ \dots .\end{cases} \tag{11}$$

Следующее утверждение определяет связь между импульсными характеристиками, получаемыми с использованием этих двух представлений.

Утверждение. Значения двумерной рекуррентной ИХ зависят только от начальных значений и коэффициентов вертикального и горизонтального рекуррентных соотношений. Значения двумерной рекуррентной ИХ не зависят от формы представления двумерного рекуррентного соотношения.

Доказательство приведенного утверждения заключается в очевидной проверке.

Для синтеза рекурсивного алгоритма вычисления свертки используется выражение (10). Для этого подставим горизонтальное рекуррентное соотношение, представленное в третьей строке выражения (10), в выражение для двумерной свертки (1). Это дает следующее полу-рекурсивное выражение, которое похоже на одномерное рекурсивное выражение (6):

$$\begin{aligned} y(n_1,n_2) &= \sum_{k=1}^{K_2} \alpha_k^2 y(n_1,n_2-k) + \\ &+ y_2^{+}(n_1,n_2) - y_2^{-}(n_1,n_2-M_2). \end{aligned} \tag{12}$$

Данное выражение определяет основное соотношение в процедуре рекурсивного вычисления двумерной свертки по ее предшествующим значениям. К сожалению, величины $y_2^{+}(n_1,n_2), y_2^{-}(n_1,n_2)$ определяются как двумерные свертки:

$$\begin{aligned} y_2^{+}(n_1,n_2) &= \sum_{m_1=0}^{M_1-1} \sum_{m_2=0}^{K_2-1} h_2^{+}(m_1,m_2) x(n_1-m_1,n_2-m_2), \\ y_2^{-}(n_1,n_2) &= \sum_{m_1=0}^{M_1-1} \sum_{m_2=0}^{K_2-1} h_2^{-}(m_1,m_2) x(n_1-m_1,n_2-m_2). \end{aligned} \tag{13}$$

Легко проверить, что импульсные характеристики $h_2^{+}(m_1,m_2)$ и $h_2^{-}(m_1,m_2)$, используемые в этих выражениях, задаются следующими выражениями и могут быть рассчитаны заранее:

$$\begin{aligned} &\left(m_2 = \overline{0,K_2-1}, \quad m_1 = \overline{0,M_1-1}\right), \\ &h_2^{+}(m_1,m_2) = h(m_1,m_2) - \sum_{k=0}^{m_2} \alpha_k^2 h(m_1,m_2-k), \\ &h_2^{-}(m_1,m_2) = \sum_{k=m_2+1}^{K_2} \alpha_k^2 h(m_1,M_2+m_2-k). \end{aligned} \tag{14}$$

Окончательно, рекурсивное вычисление двумерной свертки (1) с использованием выражений (12) и (13) требует следующее количество арифметических операций:

$$\begin{aligned} &U_{+}(M_1,M_2,K_1,K_2) = 2K_2(M_1+0{,}5) - 1, \\ &U_{*}(M_1,M_2,K_1,K_2) = 2K_2(M_1+0{,}5). \end{aligned} \tag{15}$$

В полученных выражениях для вычислительной сложности рекурсивная часть (12) процедуры требует всего K_2+1 операций сложения и K_2 операций умножения. А основная вычислительная сложность относится к вычислению значений двумерных сверток (13) изображения и двумерных КИХ-фильтров $h_2^{+}(m_1,m_2)$ и $h_2^{-}(m_1,m_2)$, рассчитываемых на границах исходной импульсной характеристики. Следовательно, снижение вычислительной сложности этих операций приведет к снижению сложности рекурсивного алгоритма вычисления свертки в целом.

3. Рекурсивная процедура вычисления свертки изображения и двумерного неразделимого КИХ-фильтра

Утверждение. Если ИХ фильтр $h(m_1,m_2)$ удовлетворяет вертикальному рекуррентному соотношению, заданному второй строкой выражения (10), тогда импульсные характеристики $h_2^{+}(m_1,m_2)$ и $h_2^{-}(m_1,m_2)$ также удовлетворяют этому рекуррентному соотношению.

Доказательство приведенного утверждения заключается в очевидной проверке.

С учетом приведенного утверждения следующие рекуррентные соотношения справедливы для импульсных характеристик $h_2^{+}(m_1,m_2)$ и $h_2^{-}(m_1,m_2)$:

$$h_2^{\#}(m_1,m_2) = \begin{cases} b_{m_1 m_2}^{\#}, \quad m_1 = \overline{0,K_1-1},\, m_2 = \overline{0,K_2-1}, \\ \sum_{k=1}^{K_1} \alpha_k^1 h_2^{\#}(m_1-k,m_2), \\ \qquad m_1 = \overline{K_1,M_1-1},\; m_2 = \overline{0,K_2-1}, \\ 0, \quad m_1 \notin [0,M_1-1] \text{ or } m_2 \notin [0,K_2-1]. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь знак '#' обозначает либо знак «+», либо знак «-». Подставляя выражение (16) в выражение (13), получаем следующие два выражения для рекурсивного вычисления сверток (13):

$$\begin{aligned} y_2^{+}(n_1,n_2) &= \sum_{k=1}^{K_1} \alpha_k^1 y_2^{+}(n_1-k,n_2) + \\ &+ y_{21}^{++}(n_1,n_2) - y_{21}^{+-}(n_1-M_1,n_2), \\ y_2^{-}(n_1,n_2) &= \sum_{k=1}^{K_1} \alpha_k^1 y_2^{-}(n_1-k,n_2) + \\ &+ y_{21}^{-+}(n_1,n_2) - y_{21}^{--}(n_1-M_1,n_2). \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь величины $y_{21}^{\#\#}(n_1,n_2)$ вычисляются как двумерные свертки, задаваемые следующими выражениями:

$$\begin{aligned} y_{21}^{\#\#}(n_1,n_2) &= h_{21}^{\#\#}(n_1,n_2) ** x(n_1,n_2) = \\ &= \sum_{m_1=0}^{K_1-1} \sum_{m_2=0}^{K_2-1} h_{21}^{\#\#}(m_1,m_2) x(n_1-m_1,n_2-m_2). \end{aligned} \tag{18}$$

В приведенном выражении знак '**' обозначает двумерную свертку. Окончательный рекурсивный алгоритм состоит из трех шагов, каждый из которых должен быть выполнен для каждого отсчета выходного изображения.

<u>Алгоритм</u>

<u>Шаг 1.</u> Прямое вычисление четырех сверток (18): $y_{21}^{\#\#}(n_1,n_2) = h_{21}^{\#\#}(n_1,n_2) ** x(n_1,n_2)$.

Шаг 2. Рекурсивное вычисление значений $y_2^+(n_1,n_2), y_2^-(n_1,n_2)$, используя выражение (17).

Шаг 3. Рекурсивное вычисление очередного отсчета выходного изображения, используя выражение (12).

В следующей таблице представлены вычислительные сложности каждого из шагов предложенного алгоритма и его итоговая вычислительная сложность.

	$U_+(K_1,K_2)$	$U_*(K_1,K_2)$
Шаг 1	$4(K_1K_2-1)$	$4K_1K_2$
Шаг 2	$2(K_1+2)$	$2K_1$
Шаг 3	K_2+2	K_2
Итого	$4K_1K_2+2K_1+K_2+2$	$4K_1K_2+2K_1+K_2$

Таким образом, суммарное число всех арифметических операций $(U_+ + U_*)$ пропорционально величине $8K_1K_2$ и не зависит от размеров области определения ИХ фильтра.

4. Представление двумерного неразделимого КИХ-фильтра в виде двумерного реккурентного соотношения

Произвольная двумерная неразделимая нерекурсивная импульсная характеристика линейного фильтра может быть аппроксимирована двумерной рекурсивной ИХ. Получение коэффициентов вертикальных и горизонтальных рекуррентных соотношений связано с решением оптимизационной задачи. В качестве критерия задачи оптимизации может быть выбран критерий минимума среднеквадратической ошибки аппроксимации ИХ с помощью рекуррентной ИХ. К сожалению, такая задача оказывается существенно нелинейной относительно коэффициентов рекуррентных соотношений и не может быть решена в явном виде [5, 11]. Поэтому используем подход, предлагаемый в работе [11]. А именно, заменим критерий задачи оптимизации на другой, который позволяет записать решение задачи в явном виде. То есть, выберем в качестве показателя критерия величину линейного предсказания очередного отсчета ИХ посредством ее предшествующих отсчетов. Порядок предсказания должен соответствовать порядку рекуррентного соотношения. Тогда для вычисления коэффициентов рекуррентных соотношений в выражении (10) необходимо решить следующие две независимые задачи оптимизации:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^2 &= \sum_{m_2=0}^{M_2}\sum_{m_1=K_1}^{M_1-1}\left(h(m_1,m_2)-\sum_{k=1}^{K_1}\alpha_k^1 h(m_1-k,m_2)\right)^2 \to \min,\\ \varepsilon_2^2 &= \sum_{m_1=0}^{M_1}\sum_{m_2=K_2}^{M_2-1}\left(h(m_1,m_2)-\sum_{k=1}^{K_2}\alpha_k^2 h(m_1,m_2-k)\right)^2 \to \min.\end{aligned} \quad (19)$$

В соответствие с результатами, представленными в работе [11] решение, получаемое для измененной оптимизационной задачи, связано с решением первоначальной задачи оптимизации и может быть описано следующими двумя утверждениями.

Утверждение. Решения задач (19) дают оптимальное решение для первоначальной задачи оптимизации, если ИХ является рекуррентной и ее порядок равен порядку предсказания.

Утверждение. Решения задач (19) являются асимптотически оптимальным, то есть чем больше линейный размер ИХ, тем ближе получаемое решение к искомому решению первоначальной задачи оптимизации.

Поскольку оптимизационные задачи в (19) подобны, ниже будет дано решение первой из них (его детали могут быть найдены в работе [11]). Оно является решением системы линейных алгебраических уравнений и представимо в виде:

$$\overline{\alpha}^1 = [B_{\Sigma 1}]^{-1}\overline{b}_{\Sigma 1}.$$

Нотации, использованные в этом выражении, обозначают следующие вектора и матрицы:

$$\overline{\alpha}^1 = \begin{pmatrix}\alpha_1^1\\ \vdots\\ \alpha_{K_1}^1\end{pmatrix},\quad B_{\Sigma 1} = \begin{bmatrix} b_{11}^{\Sigma 1} & \cdots & b_{1K_1}^{\Sigma 1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{K_1 1}^{\Sigma 1} & \cdots & b_{K_1K_1}^{\Sigma 1}\end{bmatrix},\quad \overline{b}_{\Sigma 1} = \begin{pmatrix} b_{01}^{\Sigma 1}\\ \vdots\\ b_{0K_1}^{\Sigma 1}\end{pmatrix}.$$

Здесь величины $b_{sk}^{\Sigma 1}$ вычисляются в соответствии с выражением:

$$b_{sk}^{\Sigma 1} = \sum_{m_2=0}^{M_2-1}\sum_{m_1=K_1}^{M_1-1} h(m_1-s,m_2)h(m_1-k,m_2).$$

Явное аналитическое выражение для ошибки аппроксимации также может быть легко получено.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы "Фундаментальные исследования и высшее образование" (BRHE) и гранта Президента РФ №НШ-1007.2003.01 .

Литература

1. Blahut R.E. Fast Algorithms for Digital Signal Processing // Reading, Wokingham: Addison-Wesley, 1985.
2. Dudgeon D.E., Mersereau R.M. Multidimensional Digital Signal Processing // Prentice-Hall, Inc., Cliffs, 1984.
3. Ярославский Л.П. О возможности параллельной и рекурсивной организации цифровых фильтров // Радиотехника, No. 3, 1984, стр. 87-91.
4. Сергеев В.В., Параллельно-рекурсивные КИХ-фильтры для обработки изображений // Компьютерная оптика, 1992. No.10-11, с.186–201.
5. Chernov A.V. Fast Recursive Computation 1D and 2D Finite Convolution // Proceedings of 7th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies, St.Peterburg, Russia, 2004. P.1001-1004.

6. Glumov N.I., Myasnikov V.V., Sergeyev V.V. Application of polynomial bases for image processing using sliding window // SPIE, Image Processing and Computer Optics, 1994. Vol.2363, P.40-49.
7. Glumov N.I., Myasnikov V.V., Sergeyev V.V. Parallel-Recursive Local Image Processing and Polynomial Bases // Proceedings of the Third IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems ICECS'96, Rodos, Greece, 1996. P.696-699
8. Myasnikov V.V. Methods for Designing Recursive FIR Filters // 7-th International Conference on Computer Vision and Graphics (ICCVG-2004), Warsaw, Poland, Springer, 2004. P.845-850.
9. Myasnikov V.V. Recursive algorithm of calculation the convolution of image and inseparable 2-*D* polynomial FIR-filter // Proc. of 7th Int. Conf. on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies, St.Peterburg, Russia, 2004. P.327-330.
10. Lidl R. and Niederreiter H. Finite Fields // 2-nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
11. Myasnikov V.V. On the solution of the recurrent equation used for the FIR-filter implementation // The IASTED International Conference on Signal and Image Processing (ACIT-SIP 2005), Novosibirsk, Russia, June 20-24, 2005 (printing).
12. Ifeachor E.C., Jervis B.W. Digital Signal Processing: A Practical Approach // Prentice-Hall, Inc., Cliffs, 2002.