

# ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ КОНЕЧНОГО РАДИУСА НА СПИРАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ПЛАСТИНКЕ

В.В. Котляр, С.Н. Хонина, А.А. Ковалев, В.А. Соيفер

Институт систем обработки изображений РАН

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва

## Аннотация

Получены аналитические выражения через гипергеометрическую функцию, описывающие дифракцию Френеля и Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на спиральной фазовой пластинке (СФП) любого целого порядка. Экспериментальные картины дифракции, полученные с помощью СФП, изготовленной на резисте прямой записью электронным лучом, находятся в хорошем согласии с расчетными распределениями интенсивности.

## Введение

Спиральная фазовая пластинка (СФП) как оптический элемент, функция пропускания которого пропорциональна  $\exp(in\varphi)$ , где  $\varphi$  – полярный угол,  $n$  – целое число (порядок СФП), был изготовлен и проанализирован впервые в [4].

В последнее время интерес к СФП возрос, особенно из-за возможности оптической манипуляции микрочастицами с помощью СФП [3, 5-8, 10, 11]. Поэтому актуальным является продолжение исследований дифракции света на СФП. В [6] теоретически исследован случай дифракции неограниченной плоской волны на СФП с произвольным целым  $n$ , в [2] теоретически исследована дифракция плоской неограниченной волны на СФП с дробным номером  $n$ . Дифракция Гауссова пучка на СФП была исследована в [9].

В этой работе приводятся аналитические выражения для дифракции Френеля и Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СФП произвольного целого порядка. Приводятся также результаты экспериментов по дифракции плоской волны конечного радиуса на СФП с  $n = 2, 3$ . СФП были изготовлены с высокой точностью (около 1,5% для СФП второго порядка и 4,3% для СФП третьего порядка) с помощью прямой записи электронным пучком на резисте и имеют 32 градации рельефа. Показано также, что экспериментальные картины дифракции хорошо согласуются с расчетными.

### 1. Дифракция Фраунгофера ограниченной плоской волны на СФП

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СФП. Плоская волна единичной амплитуды с радиусом  $R$  и волновым числом  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны, распространяющаяся вдоль оси  $z$ , описывается комплексной амплитудой при  $z = 0$ :

$$E_0(r) = \text{circl}\left(\frac{r}{R}\right), \quad (1)$$

где

$$\text{circl}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть плоская волна (1) падает на СФП, функция пропускания которой имеет вид:

$$\tau(\varphi) = \exp(in\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $(r, \varphi)$  – полярные координаты при  $z = 0$ . Картина дифракции Фраунгофера плоской волны (1) на СФП (3) формируется в задней фокальной плоскости сферической Фурье-линзы с фокусным расстоянием  $f$  и описывается преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} E_n(\rho, \theta) &= \frac{(-i)^{n+1} k}{f} \exp(in\theta) \int_0^R J_n\left(\frac{k}{f} r \rho\right) r dr = \\ &= \frac{(-i)^{n+1} \exp(in\theta) k R^2}{(n+2)n! f} \left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^n \times \\ &\times {}_1F_2\left[\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1; -\left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^2\right], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $(\rho, \theta)$  – полярные координаты в Фурье-плоскости,  $J_n(x)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка первого рода,  ${}_1F_2(a, b, c; x)$  – гипергеометрическая функция:

$${}_1F_2(a, b, c; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m x^m}{(b)_m (c)_m m!}, \quad (5)$$

где

$(a)_m = a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1) = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$  – символ Похгаммера,  $(a)_0 = 1$ . Уравнение (4) было получено на основе справочного интеграла из [1].

С учетом того, что функция Бесселя представима в виде ряда

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}, \quad (6)$$

из уравнения (4) при  $n = 0$  (СФП отсутствует) следует выражение для дифракции Фраунгофера плоской волны на круглой диафрагме радиуса  $R$ :

$$E_0(\rho) = \left(\frac{-iR}{\rho}\right) J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\right), \quad (7)$$

Из (4) можно видеть также, что при  $n \neq 0$  в центре Фурье-плоскости ( $\rho = 0$ ) амплитуда равна нулю:

$E_n(\rho=0, \theta) = 0$ . Из (4) и (5) также следует, что при малых  $\rho \ll 2f/kR$ ,  ${}_1F_2(a, b, c; x) \approx 1$  и

$$E_n(\rho \rightarrow 0, \theta) \sim \frac{kR^2}{f} \left( \frac{kR\rho}{2f} \right)^n, \text{ где } \sim \text{ -- знак пропорциональности.}$$

Из (4) можно найти радиус  $\rho_n$  кольца (радиус максимального значения интенсивности), приравняв дробь в круглых скобках некоторой постоянной  $a_n$ , зависящей только от номера спиральной пластинки  $n$ :

$$\rho_n = \frac{\lambda f a_n}{\pi R}. \quad (8)$$

На рис. 1 показаны графики функции интенсивности  $I_n(\rho) = |E_n(\rho, \theta)|^2$ , вычисленные по формуле (4). В ряду (5) сохранилось 110 слагаемых. Параметры расчета:  $\lambda = 0,633$  мкм,  $f = 100$  мм,  $R = 1$  мм.

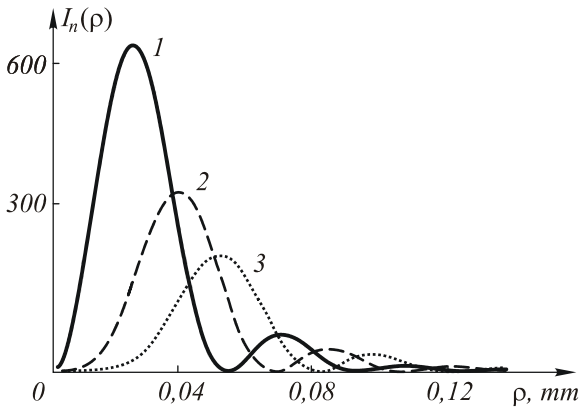


Рис. 1. Радиальные распределения интенсивности картины дифракции Фраунгофера плоской волны радиуса  $R=1$  мм на СФП с номером  $n=1$  (кривая 1),  $n=2$  (кривая 2) и  $n=3$  (кривая 3)

Из уравнения (4) следует, что так как амплитуда  $E_n(\rho, \theta)$  пропорциональна сомножителю  $\rho^n$ , то с ростом номера  $n$  будет увеличиваться радиус первого кольца картины дифракции (рис. 1). На рис. 2 показаны радиальные распределения интенсивности картины дифракции плоской волны с разными радиусами  $R$  на СФП с номером  $n=2$ .

Из рис. 2 видно, что с увеличением радиуса плоской волны  $R$  радиус и ширина первого кольца картины дифракции уменьшаются, а максимальное значение интенсивности на кольце увеличивается. Из уравнения (4) следует, что интенсивность пропорциональна выражению:

$$I_n(\xi) \sim R^4 \xi^{2n} \times \left| {}_1F_2 \left[ \frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1; - \left( \frac{k\xi}{2f} \right)^2 \right] \right|^2, \quad (9)$$

где  $\xi = R\rho$ . Из уравнений (4) и (8) следует, что с ростом  $R$  картина дифракции меняется только масштабно, и радиусы колец уменьшаются во

столько раз, во сколько раз увеличивается  $R$ . Максимальное значение интенсивности на первом кольце растет пропорционально  $R^4$ . Например, для кривых 1 и 3 на рис. 2 отношение максимальных значений интенсивности равно  $34/24 \approx 5$ .

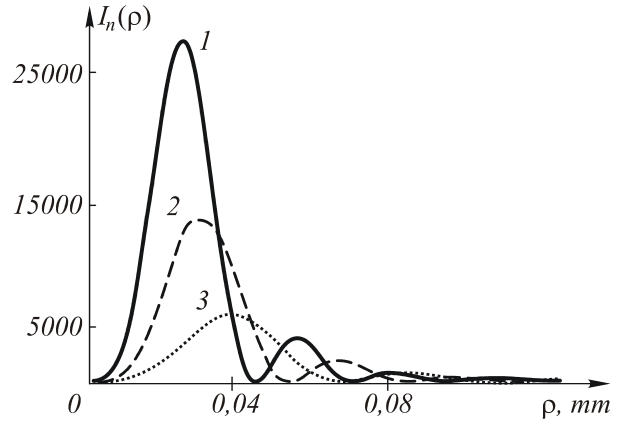


Рис. 2. Радиальные распределения интенсивности картины дифракции Фраунгофера плоской волны на СФП с номером  $n=2$  при  $R=3$  мм (кривая 1),  $R=2,5$  мм (кривая 2) и  $R=2$  мм (кривая 3)

## 2. Дифракция Френеля ограниченной плоской волны на СФП

Рассмотрим дифракцию Френеля ограниченной плоской волны на СФП. Параксиальная дифракция волны (1) на СФП (3) будет описываться преобразованием Френеля:

$$E_n(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{n+1} k}{z} \exp \left( \frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta \right) \times \int_0^R \exp \left( \frac{ikr^2}{2z} \right) J_n \left( \frac{k}{z} r\rho \right) r dr = \exp \left( \frac{iz_0 \bar{\rho}^2}{z} + in\theta \right) \cdot \frac{2 \left( \frac{-iz_0}{z} \right)^{n+1} \bar{\rho}^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{iz_0}{z} \right)^m}{(2m+n+2)! m!} \cdot {}_1F_2 \left[ \frac{2m+n+2}{2}, \frac{2m+n+4}{2}, n+1; - \left( \frac{z_0 \bar{\rho}}{z} \right)^2 \right], \quad (10)$$

где  $z_0 = \frac{kR^2}{2}$  – длина Рэлея,  $\bar{\rho} = \frac{\rho}{R}$ . Уравнение (10)

отличается от уравнения (4) тем, что гипергеометрические функции (5) появляются как слагаемые ряда. Из уравнения (10) видно, что при  $n \neq 0$  в центре пучка при  $\rho=0$  имеет место нулевая амплитуда  $E_n(\rho=0, \theta, z) = 0$  при любом  $z$ , кроме  $z=0$ . Из уравнения (10) также видно, что с ростом  $z$  в ряду гипергеометрических функций вклад дают только несколько первых членов ряда, а при  $z \rightarrow \infty$

( $z \gg z_0$ , дальняя зона) вклад в амплитуду будет давать только первый член при  $m = 0$ , который совпадает с правой частью уравнения (4). Заметим, что в (10) целая часть отношения  $z_0/z$  равна числу Френеля. Заметим также, что выражение (10) при  $n = 0$  (СФП отсутствует) описывает дифракцию Френеля плоской волны на круглой диафрагме радиуса  $R$ :

$$E_0(\rho, z) = (-1) \exp\left(\frac{iz_0 \bar{\rho}^2}{z}\right) \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{iz_0}{z}\right)^{m+1}}{(m+1)!} {}_1F_2\left[m+1, m+2, 1; -\left(\frac{z_0 \bar{\rho}}{z}\right)^2\right] \quad (11)$$

Из (11) можно получить простую зависимость комплексной амплитуды светового поля на оптической оси ( $\rho = 0$ ) от расстояния  $z$  до диафрагмы:

$$E_0(\rho = 0, z) = 1 - \exp\left(\frac{iz_0}{z}\right) \quad (12)$$

Выражение (12) совпадает с полученным ранее [12].

На рис. 3 показаны результаты сравнения эксперимента и расчета. На рис. 3а показан профиль поверхности СФП с номером  $n=3$  и диаметром 2,5 мм, визуализированный с помощью интерферометра Newview 5000 Zygo (увеличение в 200 раз). Профиль СФП отличается от идеального на 4,3%, а сама СФП имеет 32 градации рельефа и была изготовлена на низко-контрастном отрицательном резисте XAR-N7220 путем прямой записи электронным пучком с помощью литографа Leica LION LV1 с разрешением 5 мкм.

На рис. 3б, в показаны экспериментальная и расчетная картины дифракции на СФП плоской волны с радиусом  $R = 1,25$  мм и длиной волны  $\lambda = 0,633$  мкм на расстоянии  $z = 80$  мм. Обе картины дифракции имеют одинаковое число колец (8 колец).

На рис. 4 показан результат регистрации с помощью CCD-камеры картины дифракции Фраунгофера в фокусе линзы ( $f = 150$  мм), полученной для плоской волны с радиусом 1,25 мм, длиной волны 0,633 мкм и СФП с  $n = 3$ .

Относительное среднеквадратичное отклонение теоретических и экспериментальных кривых на рис. 4б, в составило 14,3%.

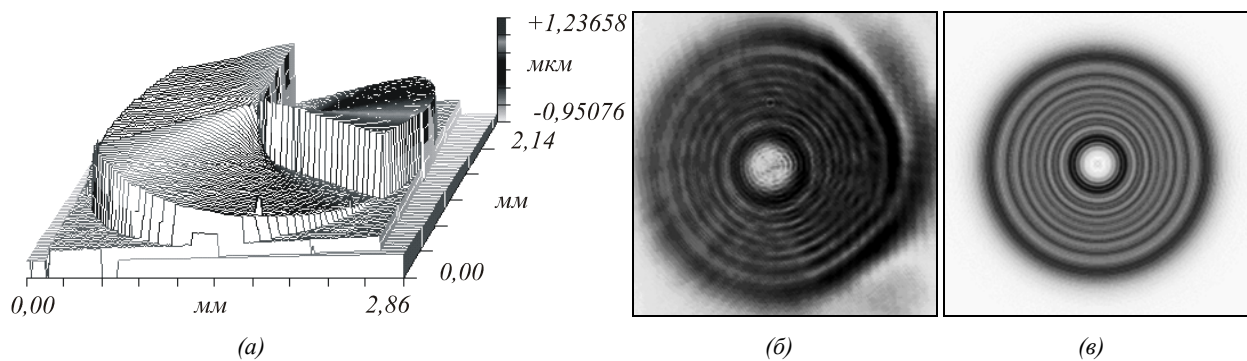


Рис. 3. Профиль поверхности СФП ( $n = 3$ ) (а), картина дифракции Френеля плоской волны с радиусом  $R = 1,25$  мм и длиной волны  $\lambda = 0,633$  мкм на расстоянии  $z = 80$  мм от СФП: эксперимент (б) и теория (в)

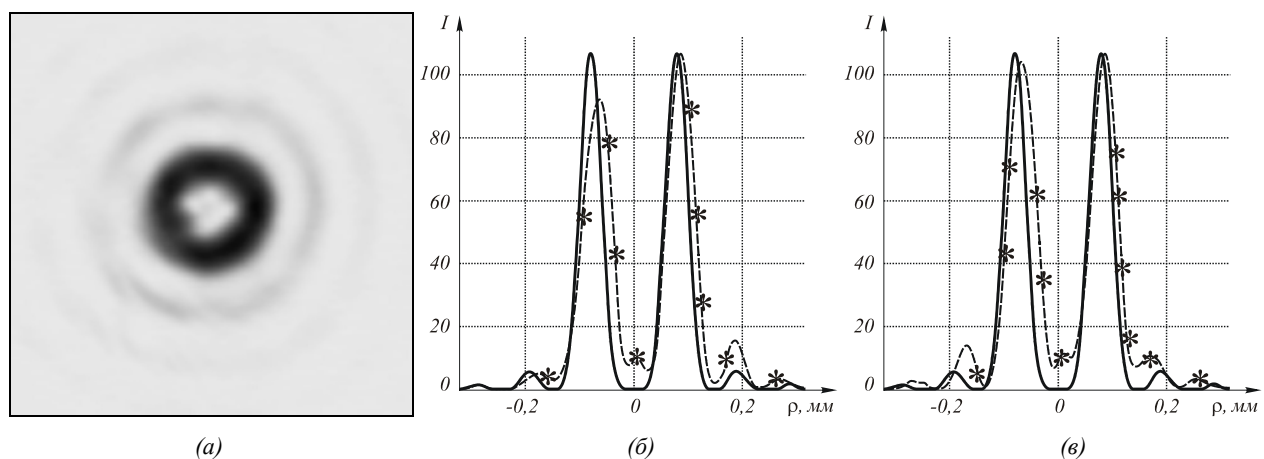


Рис. 4. Картина дифракции Фраунгофера на СФП с номером  $n = 3$  плоской волны с радиусом 1,25 мм и длиной волны 0,633 мкм, сформированная в фокальной плоскости Фурье-линзы с фокусным расстоянием 150 мм: распределение интенсивности (негатив) (а), вертикальное (б) и горизонтальное (в) сечения интенсивности (— теория, -\*-\*- эксперимент)

### **Заключение**

Итак, мы получили аналитические выражения, описывающие параксиальную дифракцию ограниченной плоской волны на СФП. С помощью изготовленной с высокой точностью СФП с номером  $n=3$  получена экспериментальная картина дифракции Френеля и Фраунгофера. Теория и эксперимент согласуются со средней ошибкой не больше чем 15%.

### **Благодарности**

Авторы выражают благодарность группе профессора Я. Турунена (Университет Йоеенсуу, Финляндия) за помощь в изготовлении ДОЭ.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, правительства Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), а также при поддержке грантов Президента РФ МД-209.2003.01 и НШ-1007.2003 (гос. контракт № 02.445.11.7174), а также грантов РФФИ 05-01-96505 и 05-08-50298.

### **Литература**

1. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции // М.: Наука, 1983.
2. Berry M.V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps // J. Opt. A: Pure Appl. Opt., 2004. Vol. 6. P. 259-268.
3. Cheong W.G., Lee W.M., Yuan X.-C., Zhang L.-S., Dholakia K., Wang H. Direct electron-beam writing of continuous spiral phase plates in negative resist with high power efficiency for optical manipulation // Appl. Phys. Lett., 2004. Vol. 85. No. 23. P. 5784-5786.
4. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkarev M.V., Soifer V.A., Uspleniev G.V. The rotor phase filter // J. Mod. Opt., 1992. Vol. 39. No. 5. P. 1147-1154.
5. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Soifer V.A., Jefimovs K., Simonen J., Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements // J. Mod. Opt., 2004. Vol. 51. No. 14. P. 2167-2184.
6. Kotlyar V.V., Almazov A.A., Khonina S.N., Soifer V.A., Elfstrom H., Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate // J. Opt. Soc. Am. A, 2005. Vol. 22. No. 5. P. 849-861.
7. Lee W.M., Ahluwalia, Yuan, Cheong, Dholakia K. Optical steering of high and low index microparticles by manipulating an off-axis optical vortex // J. Opt. A: Pure Appl. Opt., 2005. Vol. 7, P. 1-6.
8. Oemrawsingh S.S.R., van Houwelingen J.A.W., Eliel E.R., Woerdman J.R., Vestegen E.J.K., Kloosterboer, Hoof G.W. Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths // Appl. Opt., 2004. Vol. 43. No. 3. P. 688-694.
9. Saks Z.S., Rozes D., Swatzlander G.A. Holographic formation of optical-vortex filaments // J. Opt. Soc. Am. B, 1998. Vol. 15. P. 2226-2234.
10. Sueda K., Miyaji G., Miyanaga N., Nakatsura M. Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses // Opt. Expr., 2004. Vol. 12. No. 15. P. 3548-3553.
11. Sundbeck S., Gruzberg I., Grier D.G. Structure and scaling of helical modes of light // Opt. Lett., 2005. Vol. 30. No. 5. P. 1-13.
12. Teng S., Liu L., Liu D. Analytical expression of the diffraction of a circular aperture // Optik, 2005. Vol. 116. P. 568-572.