

СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ПОЛУЧЕННОГО КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КРУГЛОГО ВОЛОКНА

В.В. Котляр, Я.О. Шуюпова

Институт систем обработки изображений РАН

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева

Аннотация

В настоящей работе рассматривается конечно-разностный метод расчета констант распространения и полей векторных мод круглых оптических волокон со ступенчатым профилем показателя преломления. Производится оценка точности полученного таким образом решения волнового уравнения с соответствующим аналитическим решением, которое является известным для данного типа волокон.

Введение

В последние годы по-прежнему актуальной остается проблема разработки эффективных методов анализа собственных мод оптических волноводов и волокон различных типов и конфигураций. Так в работе [1] рассматривается широко известный метод конечных разностей в применении к расчету векторных мод фотонных волноводов. Работа [2] посвящена усовершенствованному методу эффективного индекса для расчета таких модовых характеристик как эффективный индекс и дисперсия в фотонных волноводах. Продолжают активно изучаться круглые двух- и трехслойные волокна со ступенчатым профилем показателя преломления [3]. Особое внимание уделяется аналитическим и около аналитическим [4] методам анализа слабонаправляющих волокон.

В данной работе проведено численное сравнение аналитического решения и решения, полученного конечно-разностным методом, задачи расчета собственных пространственных мод оптического волокна со ступенчатым показателем преломления.

1. Конечно-разностный метод решения волновых уравнений

В работе [1] рассматривается метод конечно-разностного решения векторных волновых уравнений для монохроматического света для расчета мод в оптическом волноводе. Однако расчет был проведен только для электрической составляющей электромагнитного поля. Соответствующих формул и самого расчета для магнитной составляющей светового поля в [1] нет. Поэтому в этом разделе мы приведем расчетные формулы для обеих составляющих электромагнитного поля.

Рассмотрим однородные волновые уравнения для монохроматического излучения в диэлектрической среде без источников:

$$\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \ln n^2 \cdot \vec{E}) + k_0^2 n^2 \vec{E} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - (\nabla \times \vec{H}) \times \nabla \ln n^2 + n^2 k_0^2 \vec{H} = 0, \quad (2)$$

где n – показатель преломления среды, зависящий от поперечных координат (x, y) , $k_0 = 2\pi/\lambda$ – волно-

вое число в вакууме, λ – длина волны света. Далее применим уравнения (1) и (2) для волноводов, однородных вдоль продольной оси z . При этом электрическая и магнитная составляющие поля можно представить в виде $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) \exp(-ik_z z)$ и $\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y) \exp(-ik_z z)$, где $\vec{E}(x, y)$ и $\vec{H}(x, y)$ – напряженности составляющих поля в поперечной плоскости, k_z – константа распространения. Далее используются граничные условия Неймана $\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{n}} = 0$

и $\frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{n}} = 0$, где \vec{n} – вектор нормали к границам исследуемой области.

Принимая во внимание инвариантность волновода вдоль продольной оси z и справедливость равенств $\frac{\partial \ln n^2}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -ik_z \vec{E}$ и $\frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = -ik_z \vec{H}$, векторные уравнения (1) и (2) можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{yx} & P_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = k_z \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = k_z \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где непрерывные дифференциальные операторы P_{ij} и Q_{ij} определяются следующим образом:

$$P_{xx} E_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial(\ln n^2 \cdot E_x)}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + n^2 k_0^2 E_x, \quad (5)$$

$$P_{yy} E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial(\ln n^2 \cdot E_y)}{\partial y} \right] + n^2 k_0^2 E_y, \quad (6)$$

$$P_{xy} E_y = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial(\ln n^2 \cdot E_y)}{\partial y} \right] - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

$$P_{yx} E_x = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial(\ln n^2 \cdot E_x)}{\partial x} \right] - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial x}, \quad (8)$$

$$Q_{xx} H_x = \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + (1 + \ln n^2) \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln n^2 \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + n^2 k_0^2 H_x, \quad (9)$$

$$Q_{yy}H_y = (1 + \ln n^2) \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln n^2 \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + n^2 k_0^2 H_y, \quad (10)$$

$$Q_{xy}H_y = \frac{\partial}{\partial y} (\ln n^2 \frac{\partial H_y}{\partial x}) - \ln n^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial x}, \quad (11)$$

$$Q_{yx}H_x = \frac{\partial}{\partial x} (\ln n^2 \frac{\partial H_x}{\partial y}) - \ln n^2 \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y}. \quad (12)$$

Заменяя непрерывные дифференциальные операторы конечно-разностными, получаем две независимые задачи на собственные значения относительно квадрата константы распространения:

$$AE = k_z^2 E, \quad (13)$$

$$BH = k_z^2 H. \quad (14)$$

Размерность каждой из задач (13) и (14) $2M \times 2M$, где $M = n_x n_y$, здесь n_x, n_y – количество узлов сетки по соответствующим осям. Вектор-столбцы E и H , являются собственными векторами в задачах (13) и (14) и содержат отсчеты всех четырех поперечных компонент моды.

2. Аналитическое решение волновых уравнений для круглого волокна со ступенчатым профилем показателя преломления

Известны характеристические уравнения относительно константы распространения моды, для каждого типа мод, способных распространяться в круглом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления [5].

Таблица 1. Характеристические уравнения для круглого волокна со ступенчатым профилем

$HE_{vm} -$ $EH_{vm} -$	$\left\{ \frac{J'_v(U)}{U J'_v(U)} + \frac{K'_v(W)}{W K'_v(W)} \right\} \times$ $\times \left\{ \frac{J'_v(U)}{U J'_v(U)} + \frac{n_{cl}^2 K'_v(W)}{n_{co}^2 W K'_v(W)} \right\} =$ $= \left(\frac{v k_z}{k_0 n_{co}} \right)^2 \left(\frac{V}{UW} \right)^4$
$TE_{0m} -$	$\frac{J_1(U)}{U J_0(U)} + \frac{K_1(W)}{W K_0(W)}$
$TM_{0m} -$	$\frac{n_{co}^2 J_1(U)}{U J_0(U)} + \frac{n_{cl}^2 K_1(W)}{W K_0(W)}$

Величины, входящие в выражения таблицы 1: n_{co} – показатель преломления сердечника;

n_{cl} – показатель преломления оболочки;

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, где λ_0 – длина волны исследуемого излучения в мкм;

в мкм;

$U = \rho(k_0^2 n_{co}^2 - k_z^2)^{1/2}$ – параметр моды в сердечнике;

$W = \rho(k_z^2 - k_0^2 n_{cl}^2)^{1/2}$ – параметр (направляемой) моды в оболочке;

$V = k_0 \rho(n_{co}^2 - n_{cl}^2)$ – волноводный параметр;

ρ – радиус сердечника в мкм;

k_z – константа распространения моды;

J_ν – функция Бесселя первого рода порядка ν ;

K_ν – модифицированная функция Бесселя второго рода порядка ν .

Также существует соотношение, связывающее параметр волокна V и параметры моды в оболочке и сердечнике W и U :

$$V^2 = W^2 + U^2.$$

Выразив W через U и V и подставив вместо k_z^2 выражение $k_z^2 = (k_0 n_{co} + U/\rho)(k_0 n_{co} - U/\rho)$, можно рассматривать характеристические уравнения как уравнения относительно параметра моды в сердечнике U .

Согласно введенным в [5] обозначениям, каждой моде присваивается два индекса: ν – порядок моды, m – номер корня соответствующего характеристического уравнения. При этом корни нумеруются так, чтобы $m=1$ соответствовал наименьшему U .

Условие отсечки $U=V$ означает, что для направляемых мод решения характеристических уравнений следует искать только в области $U < V$ или, что то же самое, константы распространения направляемых мод должны лежать в интервале $k_0 n_{cl} < k_z \leq k_0 n_{co}$.

Таким образом, если корень уравнения определяющего отсечку соответствующей моды не принадлежит области $U < V$, для волновода с таким V эта мода не существует. Гибридная мода HE_{11} условия отсечки не имеет и, следовательно, существует всегда. Круглый волновод со ступенчатым профилем является одномодовым, то есть в нем распространяется только HE_{11} , если его волноводный параметр $0 < V < 2,405$.

Когда определена константа распространения, собственно составляющие моды рассчитываются по также известным формулам. Например, поперечные компоненты гибридных HE_{vm} и EH_{vm} мод, будут определяться следующим образом (см. таблицу 2).

Таблица 2. Формулы для расчета поперечных электрических составляющих HE_{vm} и EH_{vm} моды в полярных координатах

Компонента	Сердцевина	Оболочка
E_r	$-\frac{a_1 J_{v-1}(UR) + a_2 J_{v+1}(UR)}{J_v(U)} f_v(\varphi)$	$-\frac{U}{W} \frac{a_1 K_{v-1}(WR) - a_2 K_{v+1}(WR)}{K_v(W)} f_v(\varphi)$
E_φ	$-\frac{a_1 J_{v-1}(UR) - a_2 J_{v+1}(UR)}{J_v(U)} g_v(\varphi)$	$-\frac{U}{W} \frac{a_1 K_{v-1}(WR) + a_2 K_{v+1}(WR)}{K_v(W)} g_v(\varphi)$

Здесь $R = r/\rho$ – нормированный радиус, $a_1 = \frac{F_2 - 1}{2}$, $a_2 = \frac{F_2 + 1}{2}$ – коэффициенты, рассчитываются через ниже следующие параметры:

$$F_2 = \left(\frac{UW}{V} \right)^2 \frac{v}{b_1 + b_2},$$

$$b_1 = \frac{1}{2U} \left\{ \frac{J_{v-1}(U)}{J_v(U)} - \frac{J_{v+1}(U)}{J_v(U)} \right\},$$

$$b_2 = -\frac{1}{2W} \left\{ \frac{K_{v-1}(W)}{K_v(W)} + \frac{K_{v+1}(W)}{K_v(W)} \right\};$$

$$f_v(\varphi) = \begin{cases} \cos(v\varphi) - \text{четные моды}(v - \text{четное}) \\ \sin(v\varphi) - \text{нечетные моды}(v - \text{нечетное}) \end{cases},$$

$$g_v(\varphi) = \begin{cases} -\sin(v\varphi) - \text{четные моды}(v - \text{четное}) \\ \cos(v\varphi) - \text{нечетные моды}(v - \text{нечетное}) \end{cases}.$$

На границе двух сред при $R=1$ оба выражения для каждой из поперечных составляющих мод в сердечнике и оболочке дают одинаковый результат. Собственно из этого условия непрерывности и вытекают характеристические уравнения.

Переходя к декартовым координатам, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_x &= E_r \cos \varphi - E_\varphi \sin \varphi, \\ E_y &= E_r \sin \varphi - E_\varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

3. Численные результаты

Рассматривается слабонаправляющий волновод с радиусом сердечника $r_{co} = 3 \mu m$ и показателями преломления $n_{co} = 1,47$ и $n_{cl} = 1,463$ в сердечнике и в оболочке, соответственно. Расчет производится для длины волны излучения $\lambda_0 = 1,3 \mu m$. Так как волноводный параметр для данной модели $V = 2,078 < 2,405$, то волокно является одномодовым. Результаты расчета константы распространения и эффективного индекса

моды HE_{11} , конечно-разностным и аналитическим методами показаны в таблице 3.

Распределение основной поперечной составляющей моды $HE_{11} - E_y$, показаны на рис. 1.

Таблица 3. Значения параметров моды HE_{11} для слабонаправляющего волокна, описанного в тексте, рассчитанных разными методами

Параметр	Конечно-разностный метод, $n_x \times n_y = 52 \times 52$	Аналитическое решение
$k_z, \mu m^{-1}$	7,0855	7,0859
n_{eff}	1,4660	1,4661

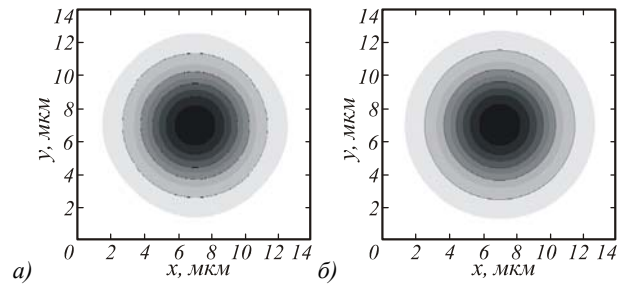


Рис. 1. Графики распределения компоненты E_y моды HE_{11} для слабонаправляющего волокна, описанного в тексте, (а) – конечно-разностный метод $n_x \times n_y = 52 \times 52$, (б) – аналитическое решение

Среднеквадратическое отклонение между двумя решениями для E_y , нормированными по интенсивности на единицу, по области $W_x \times W_y = 14 \mu m \times 14 \mu m$ составило 0,00444.

Далее рассматривается круглое волокно со ступенчатым профилем показателя преломления $n_{co} = 1,5$ – в сердечнике и $n_{cl} = 1$ – в оболочке, с радиусом сердечника $r_{co} = 0,52 \mu m$. Длина волны излучения в вакууме принимается равной $\lambda_0 = 1,55 \mu m$. Это волокно также является одномодовым, так как его волноводный параметр $V = 2,357 < 2,405$. Распределение основной поперечной составляющей моды $HE_{11} - E_y$, показаны на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что, не смотря на круглое сечение сердечника и квадратное сечение оболочки волокна, преимущественная по величине составляющая элек-

трического поля E_y имеет эллиптическую форму. В диапазоне изменения числа узлов сетки по каждой из осей координат от 30 до 68 конечно-разностный метод не демонстрирует равномерной сходимости рассчитываемого эффективного индекса HE_{11} круглого волокна к аналитическому решению (рис. 3).

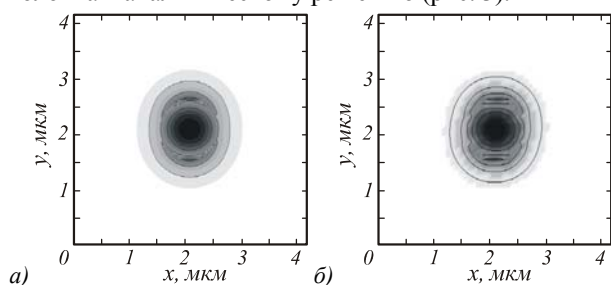


Рис. 2. Графики распределения компоненты E_y моды HE_{11} для круглого волокна, описанного в тексте, (а) – конечно-разностный метод $n_x \times n_y = 52 \times 52$, (б) – аналитическое решение

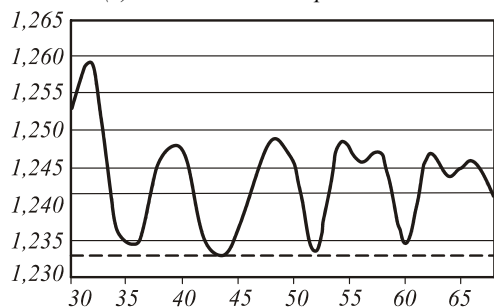


Рис. 3. График зависимости значения эффективного индекса n_{eff} направляемой моды HE_{11} круглого волокна, описанного в тексте от числа узлов сетки по каждой из осей в метода конечных разностей; штриховой линией показана точное значение, полученное аналитическим методом

Из рис. 3 видно, что максимальное относительное отклонение рассчитанного n_{eff} от точного значения $n_{eff} = 1,2333$ при $n_x, n_y \geq 35$ составляет около 1,1%.

Заключение

Таким образом, в работе подробно рассмотрен конечно-разностный подход к решению волновых уравнений. Получены матричные уравнения относительно константы распространения моды отдельно для поперечных электрических и магнитных составляющих моды, отсчеты которых получаются в данном случае как собственные векторы матриц. Проведен расчет основной моды круглых одномодовых волокон методом конечных разностей, и показано, что результирующие константы распространения и распределения полей хорошо согласуются с результатами, полученными аналитически (отклонение около 1%).

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, правительства Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), а также при поддержке гранта Президента РФ № НШ-1007.2003.01 и гранта РФФИ №05-08-50298.

Литература

1. Yang R., Xue W., Huang T, Zhou G. Research on the effect of air hole shape on the properties of microstructured optical fibers // Opt. Eng. 2004 V. 11. N. 43. P. 2701-2706.
2. Park R.N., Lee K.S. Improved effective-index method for analysis of photonic crystal fibers // Optics Letters, 2005, Vol. 30. N. 9. P. 958-960.
3. Daxhelet X., Martineau L., Bures J. Influence of fiber index profile on vectorial fiber modes and application to tapered fiber devices // Journal of Lightwave Technology, 2005. Vol. 23. N. 5. P. 1874-1880.
4. Liang Z., Cao Z., Shen Q., Deng X., Exact eigenvalue equations for weakly guiding optical fibers with arbitrary graded-index profile. // Journal of Lightwave Technology, 2005. Vol. 23. N. 2. P. 1874-1880.
5. Снайдер А., Лав Д. Теория оптических волноводов // М., Радио и связь, 1987.