# ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ

*И.В. Алименков*

*Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева*

***Аннотация***

Получены точные трехмерные решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих в различных приближениях прохождение линейно-поляризованного оптического излучения в нелинейном изотропном диэлектрике. Показано, что найденные трехмерные решения содержат в себе, как частный случай, известные двумерные решения.

***Введение***

Многие математические модели физических, технических, биологических задач могут быть описаны с помощью нелинейных уравнений в частных производных. Наиболее доступными для анализа являются решения в виде уединенных волн, не испытывающих дисперсионного уширения, и сохраняющих свою форму и скорость. Прогресс в изучении нелинейных уравнений в частных производных, достигнутый в последние десятилетия, представляется одним из самых важных и интересных достижений современной науки. Перечень практических приложений нелинейных уравнений и их решений в виде уединенных волн в настоящее время чрезвычайно обширен. Так, например, нелинейное уравнение Шредингера и связанные с ним уравнения описывают многие явления в нелинейной оптике, теории волн на глубокой воде, физике плазмы, физике низких температур, а комплексные уравнения типа Гинзбурга-Ландау находят применение в теории нелинейных волн, описывают на качественном, а иногда и на количественном уровне, такие явления, как фазовые переходы второго рода, сверхпроводимость, сверхтекучесть, конденсацию Бозе-Эйнштейна, жидкие кристаллы, зарождение турбулентности в гидродинамике и так далее. В одном пространственном и одном временном измерениях теория таких уравнений детально разработана. Известны также стационарные решения в двух пространственных измерениях. Большинство реальных систем требуют описания в трех пространственных измерениях, но на сегодняшний день не существует ни одного систематического метода нахождения трехмерных решений.

Единичные точные трехмерные решения некоторых сложных систем получены лишь благодаря изощренным приемам, приводящим к упрощению полевых уравнений, только для данных систем. Для подавляющего большинства реальных моделей приходится изучать общие свойства решений, не решая полевых уравнений.

Объектом исследования в данной статье являются нелинейные уравнения, описывающие комплексное скалярное поле в трехмерном пространстве на примере уравнений нелинейной оптики.

Целью работы является разработка прямого метода нахождения точных аналитических решений некоторых модельных эволюционных уравнений для комплексного скалярного поля типа нелинейного уравнения Шредингера и волнового уравнения типа Гинзбурга-Ландау, когда естественной постановкой задачи является получение решений в виде модулированной периодической волны.

В данной работе рассматриваются нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие в различных приближениях распространение оптического излучения в нелинейных изотропных средах. Получены точные трехмерные аналитические решения таких уравнений в виде уединенных волн. Для некоторых из рассматриваемых уравнений такие решения известны, однако они зависят всего от двух пространственных переменных, т.е. исходные уравнения, записанные в реальном трехмерном пространстве, редуцируются на пространство меньшей размерности, где разработаны методы решения таких уравнений.

Рассмотрим прохождение вдоль оси $x$ линейно поляризованного оптического излучения через изотропный диэлектрик. Электрическое поле $\mathbf{E}$ представим в виде произведения медленно меняющейся функции $\mathbf{E}_0$ $(\mathbf{r},t)$ и быстро осциллирующей функции $e^{i(k_0x-\omega t)}$, где $k_0$ – модуль волнового вектора $\mathbf{k}_0$, направленного вдоль оси $x$, $\omega$ – циклическая частота, т.е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t)\,e^{i(k_0x-\omega t)}.$$

Медленная изменяемость функции $E_0$ $(\mathbf{r},t)$ означает, что мало ее относительное изменение на интервалах времени $\sim 1/\omega$ и расстояниях $\sim 1/k_0$. Входящие в Фурье-разложение этого поля волновые векторы распределены в небольшом интервале значений вокруг вектора $\mathbf{k}_0$, направленного вдоль оси $x$.

Для поля $\mathbf{E}_0=(0,0,E_0)$ линейно поляризованного вдоль оси $z$ получено [1] приближенное уравнение:

$$ik_0\left(\frac{\partial E_0}{\partial x}+\frac{1}{u}\frac{\partial E_0}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\nabla^2_{y,z}E_0+\eta(\omega)\left|E_0\right|^2E_0=0\,,\quad(1)$$

где $\eta(\omega)$ – коэффициент нелинейности, $u$ – групповая скорость $1/u=\mathrm{d}k_0/\mathrm{d}\omega$, причем принято $k_0^2=(\omega/c)^2\varepsilon(\omega)$ согласно линейной теории, $\varepsilon(\omega)$ – линейная проницаемость среды.

Следуя [1], рассмотрим стационарную задачу о пространственном развитии возмущений вдоль направления распространения волны, т.е. рассмотрим уравнение

$$i2k_0\frac{\partial E_0}{\partial x}+\nabla^2_{y,z}E_0+2\eta\left|E_0\right|^2 E_0=0\,. \qquad (2)$$

Приведем вкратце некоторые известные результаты.

Если считать, что поле **E** зависит только от одной поперечной координаты *y*, то (2) упрощается:

$$i2k_0\frac{\partial E_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2}+2\eta\left|E_0\right|^2 E_0=0\,. \qquad (3)$$

Решение этого уравнения в виде

$$E_0=F(y)e^{i\gamma x}\,, \qquad (4)$$

где $\gamma$ – малая поправка к волновому вектору $\mathbf{k}_0$, $F(y)$ – вещественная функция, найдено в [1]:

$$F(y)=\frac{\sqrt{2\gamma k_0/\eta}}{ch\left(\sqrt{2\gamma k_0}\;y\right)}\,.$$

Решение имеет смысл при положительных значениях $\gamma$. Тогда (4) принимает вид:

$$E_0=\frac{\sqrt{2\gamma k_0/\eta}}{ch\left(\sqrt{2\gamma k_0}\,y\right)}\exp\{i\gamma x\}\,. \qquad (5)$$

Таким образом, уравнение (3) допускает решение в виде стационарного нерасширяющегося пучка (отвлекаясь от того обстоятельства, что пучок имеет бесконечную ширину в направлении оси *z*). Такое самоканалирование или самофокусировка – специфический нелинейный эффект, возникающий на частоте $\omega$ первичной волны, проходящей через нелинейную среду. В линейной среде всякий ограниченный по сечению пучок расходится из-за дифракции. В нелинейной же среде дифракция может точно скомпенсироваться фокусирующими свойствами среды. Этот эффект возникает от кубичной нелинейности по полю **E**, так как квадратичные члены содержат [1] частоты $2\,\omega$ и 0.

Обратим внимание на то, что уравнение (3) является *нелинейным одномерным уравнением Шредингера*, в котором роль времени играет $x/2k_0$. Теория нелинейного одномерного уравнения Шредингера детально разработана [2]-[4]. Если записать его в форме [4]

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\beta\varphi\left|\varphi\right|^2=0\,, \qquad (6)$$

то решение, представляющее собой уединенную волну, имеет вид [4]:

$$\varphi=\frac{a\sqrt{\dfrac{2}{\beta}}\exp\left\{i\left[\dfrac{1}{2}bx-(\dfrac{1}{4}b^2-a^2)t\right]\right\}}{ch\,a(x-bt)}\,, \qquad (7)$$

где *a* и *b* – произвольные константы.

Осциллирующая часть имеет огибающую

$$1/ch\,a(x-bt)\,.$$

Если в (6) положить

$$\varphi=E_0,\,t=x/2k_0,\,x=y,\,\beta=2\eta\,,$$

то получим уравнение (3). Проделав то же с (7), находим:

$$E_0=\frac{\dfrac{a}{\sqrt{\eta}}\exp\left\{i\left[\dfrac{1}{2}by-(\dfrac{1}{4}b^2-a^2)\dfrac{x}{2k_0}\right]\right\}}{ch\,a\left(y-\dfrac{bx}{2k_0}\right)}\,. \qquad (8)$$

Прямой подстановкой в уравнение (3) легко убедиться, что найденная функция (8) является его решением.

### *1. Точные трехмерные решения исходной математической модели*

В этой главе будут найдены точные решения уравнений (1) и (2) в аналитической форме, как функции трех пространственных переменных.

Начнем с более простого уравнения (2):

$$i2k_0\frac{\partial E_0}{\partial x}+\nabla^2_{y,z}E_0+2\eta\left|E_0\right|^2 E_0=0\,. \qquad (1.1)$$

Его решение ищем в виде

$$E_0=\varphi(y,z)e^{i\gamma x}\,, \qquad (1.2)$$

где $\varphi(y,z)$ – вещественная функция, $\gamma$ – малая поправка к волновому вектору $\mathbf{k}_0$. Подстановка (1.2) в (1.1) дает

$$\nabla^2_{y,z}\varphi=2k_0\gamma\varphi-2\eta\varphi^3\,. \qquad (1.3)$$

Будем искать решение уравнения (1.3) в виде сложной функции

$$\varphi=\varphi\left(u(y,z)\right),$$

где

$$u(y,z)=\frac{b_y(y-y_0)+b_z(z-z_0)}{\sqrt{b_y^2+b_z^2}}\,. \qquad (1.4)$$

Здесь $b_y$, $b_z$, $y_0$, $z_0$ – произвольные постоянные.

Подставляя $\varphi=\varphi\left(u(y,z)\right)$, где $u(y,z)$ определяется формулой (1.4), в (1.3), получим

$$\varphi''(u)=2k_0\gamma\varphi(u)-2\eta\varphi^3(u)\,. \qquad (1.5)$$

Перепишем уравнение (1.5) в виде

$$\varphi''(u)=\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi}\,, \qquad (1.6)$$

где

$$V(\varphi)=k_0\gamma\varphi^2-\eta\varphi^4/2=\varphi^2(k_0\gamma-\eta\varphi^2/2)\,. \qquad (1.7)$$

«Потенциал» $V(\varphi)$ положителен при $\left|\varphi\right|<\sqrt{2k_0\gamma/\eta}$ и имеет нули $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\sqrt{2k_0\gamma/\eta}$, $\varphi_3=-\sqrt{2k_0\gamma/\eta}$, поэтому [5] граничными условиями для уравнения (1.3) примем

$\varphi(y,z)=\varphi_i$, $i=1,2,3;$ $\partial\varphi/\partial y=\partial\varphi/\partial z=0$
при $|y|=\infty$, $|z|=\infty$ .

Так как

$$\partial\varphi/\partial y=\varphi'(u)a/\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\partial\varphi/\partial z=\varphi'(u)b/\sqrt{a^2+b^2},$$

то из граничных условий следует, что $\varphi'(u)=0$ при $|u|=\infty$.

Умножим (1.6) на $\varphi'(u)$ и проинтегрируем. Получим

$$\frac{\varphi'^2(u)}{2}=V(\varphi)+C .$$

Из граничных условий следует, что $C$=0.

Интегрируя еще раз, находим

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}}=u ,$$

или с учетом (1.4) и (1.7)

$$\int\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{2k_0\gamma-\eta\varphi^2}}=\frac{b_y(y-y_0)+b_z(z-z_0)}{\sqrt{b_y^2+b_z^2}} .$$

Вычисляя интеграл [6] и обращая полученное выражение, имеем

$$\varphi(y,z)=$$
$$=\frac{\sqrt{2k_0\gamma/\eta}}{ch\left[\sqrt{2k_0\gamma}\left(b_y(y-y_0)+b_z(z-z_0)\right)/\sqrt{b_y^2+b_z^2}\right]} .$$

В силу симметрии уравнений (1.3) и (1.5) относительно преобразования $\varphi\leftrightarrow-\varphi$, решением будет также $\varphi_a=-\varphi$ . Очевидно, что

$$|\varphi|\le\sqrt{2k_0\gamma/\eta} .$$

Итак, окончательно решение (1.2) имеет вид:

$$E_0(x,y,z)=$$
$$=\frac{\pm\sqrt{2k_0\gamma/\eta}\exp\{i\gamma x\}}{ch\left[\sqrt{\frac{2k_0\gamma}{b_y^2+b_z^2}}\left(b_y(y-y_0)+b_z(z-z_0)\right)\right]} . \qquad (1.8)$$

Полагая здесь $b_z$=0, $y_0$=0, получим известное решение (5), модуль которого зависит только от одной поперечной координаты $y$.

В решении (1.8), как и в (5), учтена только продольная поправка $\gamma$ к волновому вектору $\mathbf{k}_0$. Решение, учитывающее поперечные поправки $q_y$ и $q_z$, запишем в виде:

$$E_0=\varphi(y,z)\exp\left\{i(\gamma x+q_y y+q_z z)\right\}, \qquad (1.9)$$

где $\varphi(y,z)$ – вещественная функция.

Подстановка (1.9) в (1.1) дает

$$-2k_0\gamma\varphi+\nabla^2_{y,z}\varphi+i2\left(q_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)-$$
$$-\left(q_y^2+q_z^2\right)\varphi+2\eta\varphi^3=0.$$

Приравнивая к нулю мнимую и вещественную части этого уравнения, получим:

$$q_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 , \qquad (1.10)$$

$$\nabla^2_{y,z}\varphi=(2k_0\gamma+q_y^2+q_z^2)\varphi-2\eta\varphi^3 . \qquad (1.11)$$

Уравнения (1.10) и (1.11) совместны, так как (1.10) является линейным однородным уравнением первого порядка, теория которых хорошо разработана [7]. Как известно из теории таких уравнений, решением уравнения (1.10) является любая дифференцируемая функция $\varphi=\varphi\left(s(y,z)\right)$, где $s(y,z)$ – полный интеграл уравнения

$$q_y\frac{\partial s}{\partial y}+q_z\frac{\partial s}{\partial z}=0 . \qquad (1.12)$$

Для нахождения полного интеграла этого уравнения применим метод уравнений характеристик (метод Коши) [7]:

$$\frac{dy}{q_y}=\frac{dz}{q_z} \text{ или } \frac{dz}{dy}=\frac{q_z}{q_y} .$$

Решение последнего уравнения при начальном условии $z(y_0)=z_0$ имеет вид:

$$z=\frac{q_z}{q_y}(y-y_0)+z_0 .$$

Выражаем отсюда $z_0=\psi(y,y_0,z)$:

$$z_o=z-\frac{q_z}{q_y}(y-y_0) .$$

Искомый полный интеграл имеет вид:

$$s(y,z)=b\psi(y,y_0,z)+b_0$$

или

$$s(y,z)=b\left(z-(y-y_0)q_z/q_y\right)+b_0 ,$$

где $b$ и $b_0$ – произвольные постоянные.

Аддитивную произвольную постоянную $b_0$ выберем в виде $b_0$=-$bz_0$. Тогда

$$s(y,z)=b\left(z-z_0-(y-y_0)q_z/q_y\right),$$

или, приводя к общему знаменателю и обозначая $b/q_y=c$, окончательно находим

$$s(y,z)=c\left[q_y(z-z_0)-q_z(y-y_0)\right]. \qquad (1.13)$$

Прямой подстановкой (1.13) в (1.12) легко убедиться, что (1.13) является решением уравнения (1.12).

Теперь подставим $\varphi=\varphi\left(s(y,z)\right)$, где $s(y,z)$ выражается формулой (1.13), в уравнение (1.11)

$$\varphi''(s)c^2(q_y^2+q_z^2)=$$
$$=(2k_0\gamma+q_y^2+q_z^2)\varphi(s)-2\eta\varphi^3(s). \qquad (1.14)$$

Положим

$$c=\frac{1}{\sqrt{q_y^2+q_z^2}},$$

тогда (1.13) и (1.14) примут вид:

$$s(y,z)=\frac{q_y(z-z_0)-q_z(y-y_0)}{\sqrt{q_y^2+q_z^2}}, \qquad (1.15)$$

$$\varphi''(s)=(2k_0\gamma+q_y^2+q_z^2)\varphi(s)-2\eta\varphi^3(s). \qquad (1.16)$$

Перепишем (1.16) в виде:

$$\varphi''(s)=\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi}, \qquad (1.17)$$

где

$$V(\varphi)=(2k_0\gamma+q_y^2+q_z^2)\varphi^2/2-\eta\varphi^4/2.$$

Для краткости введем обозначение

$$a^2=2k_0\gamma+q_y^2+q_z^2. \qquad (1.18)$$

Тогда

$$V(\varphi)=(a^2-\eta\varphi^2)\varphi^2/2. \qquad (1.19)$$

«Потенциал» $V(\varphi)$ положителен при $|\varphi|<a\sqrt{\eta}$ и имеет нули $\varphi_1=0,\ \varphi_2=a/\sqrt{\eta},\ \varphi_3=-a/\sqrt{\eta}$, поэтому граничными условиями для (1.11) примем

$$\varphi(y,z)=\varphi_i,\ i=1,2,3;\ \partial\varphi/\partial y=\partial\varphi/\partial z=0$$

при $|y|=\infty,\ |z|=\infty$.

Умножим (1.17) на $\varphi'(s)$ и проинтегрируем, получим:

$$\varphi'^2/2=V(\varphi)+C.$$

Из граничных условий следует, что C=0.

Интегрируя еще раз, находим

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}}=s,$$

или с учетом (1.19)

$$\int\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{a^2-\eta\varphi^2}}=s.$$

Вычисляя интеграл и обращая полученное выражение, имеем

$$\varphi=\frac{a}{\sqrt{\eta}\,ch\,as}. \qquad (1.20)$$

Прямой подстановкой легко убедиться, что (1.20) является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi''(s)=a^2\varphi(s)-2\eta\varphi^3(s). \qquad (1.21)$$

В силу симметрии уравнений (1.11) и (1.21) относительно преобразования $\varphi\leftrightarrow-\varphi$, решением будет также $\varphi_a=-\varphi$.

Итак, с учетом (1.15) и (1.18) решение (1.9) принимает окончательный вид:

$$E_0=$$
$$=\frac{\pm\sqrt{(2k_0\gamma+q_y^2+q_z^2)/\eta}\exp\left\{i(\gamma x+q_y y+q_z z)\right\}}{ch\left\{\left[q_y(z-z_0)-q_z(y-y_0)\right]\sqrt{\dfrac{(2k_0\gamma+q_y y+q_z z)}{\left(q_y^2+q_z^2\right)}}\right\}} \qquad (1.22)$$

Отметим тот факт, что решение в форме (1.22) не содержит в себе решения (1.8), имеющего две произвольные постоянные $b_y$ и $b_z$.

Найдем теперь решение, в котором $|E_0|$ зависит от всех трех пространственных координат, т.е.

$$E_0=f(\mathbf{r})e^{i\mathbf{qr}}. \qquad (1.23)$$

Подставляя (1.23) в (1.1) и приравнивая к нулю мнимую и вещественную части полученного уравнения, имеем

$$k_0\frac{\partial f}{\partial x}+q_y\frac{\partial f}{\partial y}+q_z\frac{\partial f}{\partial z}=0, \qquad (1.24)$$

$$\nabla_{y,z}^2 f=(2k_0q_x+q_y^2+q_z^2)f-2\eta f^3. \qquad (1.25)$$

Так как ось $x$ является направлением распространения волны, то запишем (1.24) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{q_y}{k_0}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{q_z}{k_0}\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Это линейное однородное уравнение первого порядка имеет своим решением любую дифференцируемую функцию $f=f\left(s(\mathbf{r})\right)$, где $s(\mathbf{r})$ – полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{q_y}{k_0}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{q_z}{k_0}\frac{\partial s}{\partial z}=0. \qquad (1.26)$$

Его уравнения характеристик

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{q_y/k_0}=\frac{dz}{q_z/k_0}\ \text{или}\ \frac{dy}{dx}=\frac{q_y}{k_0};\quad \frac{dz}{dx}=\frac{q_z}{k_0}.$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений при начальных условиях $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$ имеет решения

$$y=\frac{q_y}{k_0}(x-x_0)+y_0;\quad z=\frac{q_z}{k_0}(x-x_0)+z_0,$$

откуда

$$y_0=y-\frac{q_y}{k_0}(x-x_0);\quad z_0=z-\frac{q_z}{k_0}(x-x_0).$$

Полный интеграл уравнения (1.26)

$$s(\mathbf{r})=b_y y_0+b_z z_0+b_0$$

или

$$s(\mathbf{r}) = b_y\left(y - \frac{q_y}{k_0}(x - x_0)\right) +$$

$$+ b_z\left(z - \frac{q_z}{k_0}(x - x_0)\right) + b_0,$$

где $b_y, b_z, b_0$ – произвольные постоянные.

Положим $b_0 = -b_y y_0 - b_z z_0$. Тогда

$$s(\mathbf{r}) = b_y\left(y - y_0 - \frac{q_y}{k_0}(x - x_0)\right) +$$

$$+ b_z\left(z - z_0 - \frac{q_z}{k_0}(x - x_0)\right)$$

или

$$s(\mathbf{r}) = \frac{b_y\left(y - y_0 - \frac{q_y}{k_0}(x - x_0)\right)}{B} + \frac{b_z\left(z - z_0 - \frac{q_z}{k_0}(x - x_0)\right)}{B}, \tag{1.27}$$

где, в силу линейности уравнения (1.26), постоянная $B$ введена для удобства.

Подставляя $f = f(s)$, где $s(\mathbf{r})$ определяется формулой (1.27) в (1.25), находим

$$f''(s)\left(b_y^2 + b_z^2\right)/B^2 =$$

$$= \left(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2\right) f(s) - 2\eta f^3(s).$$

Выберем $B = \sqrt{b_y^2 + b_z^2}$, тогда

$$f''(s) = \left(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2\right) f(s) - 2\eta f^3(s).$$

Вводя обозначение

$$a = \sqrt{2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2},$$

последнее уравнение приводим к виду

$$f''(s) = a^2 f(s) - 2\eta f^3(s),$$

совпадающему с (1.21) и, следовательно, имеющему решение, согласно (1.20)

$$f(\mathbf{r}) = \frac{a}{\sqrt{\eta}\, ch\, as(\mathbf{r})},$$

где из (1.27)

$$s(\mathbf{r}) = \frac{b_y\left[k_0(y - y_0) - q_y(x - x_0)\right]}{k_0\sqrt{b_y^2 + b_z^2}} +$$

$$+ \frac{b_z\left[k_0(z - z_0) - q_z(x - x_0)\right]}{k_0\sqrt{b_y^2 + b_z^2}}.$$

В силу симметрии (1.25) относительно преобразования $f \leftrightarrow -f$, решением будет также $f_a = -f$.

Окончательно решение (1.23) принимает вид:

$$E_0 = \frac{\pm\sqrt{(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2)/\eta}\, \exp\{i\mathbf{qr}\}}{ch\left\{s(\mathbf{r})\sqrt{2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2}\right\}}. \tag{1.28}$$

Заметим, что решение (1.28) содержит в себе решение (1.8). Если в (1.28) положить $q_y = q_z = 0$, а $q_x = \gamma$, то получим (1.8). Покажем, что (1.28) содержит и известное решение (8). Полагая в (1.28) $b_z=0$, $y_0=x_0=0$, $q_z=0$, имеем

$$E_0 = \frac{\sqrt{2k_0 q_x + q_y^2}\, \exp\{i(q_x x + q_y y)\}}{\sqrt{\eta}\, ch\left[\sqrt{2k_0 q_x + q_y^2}\left(u - \frac{q_y x}{k_0}\right)\right]}.$$

Введем обозначение $a = \sqrt{2k_0 q_x + q_y^2}$, откуда $q_x = (a^2 - q_y^2)/2k_0$. Тогда

$$E_0 = \frac{a \exp\left\{i\left[(a^2 - q_y^2)\frac{x}{2k_0} + q_y y\right]\right\}}{\sqrt{\eta}\, ch\, a\left(y - \frac{q_y x}{k_0}\right)}.$$

Полагая здесь $q_y=b/2$, получим (8).

Итак, для уравнения (1.1) мы нашли три точных решения, выражающихся формулами (1.8), (1.22) и (1.28), причем, при переходе к низшим размерностям (1.28) трансформируется в известные решения (5) и (8).

Представляет также интерес особый интеграл [7] уравнения (1.26), имеющий вид

$$s(\mathbf{r})\sqrt{\left(y - y_0 - \frac{q_y}{k_0}(x - x_0)\right)^2 + \left(z - z_0 - \frac{q_z}{k_0}(x - x_0)\right)^2}$$

нелинейной функции от пространственных переменных.

Подстановка $f = f(s)$ в (1.25) дает:

$$f''(s) + \frac{f'(s)}{s} = a^2 f(s) - 2\eta f^3(s).$$

Точные аналитические решения этого обыкновенного дифференциального уравнения автору неизвестны, однако легко найти приближенное решение при больших значениях $s$, выраженных в единицах длин волн. Тогда вторым слагаемым в левой части последнего уравнения можно пренебречь, и мы получим уже известное уравнение:

$$f''(s) = a^2 f(s) - 2\eta f^3(s),$$

имеющее решение $f\left(s(r)\right) = \frac{a/\sqrt{\eta}}{ch\, as(\mathbf{r})}$ с нелинейной функцией $s(\mathbf{r})$.

Займемся теперь нестационарным решением уравнения (1):

$$ik_0\left(\frac{\partial E_0}{\partial x}+\frac{1}{u}\frac{\partial E_0}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\nabla^2_{yz}E_0+ \\ +\eta(\omega)|E_0|^2 E_0=0, \quad (1.29)$$

Функцию $\mathbf{E}_0\,(r,\,t)$ будем искать в виде

$$E_0(\mathbf{r},t)=f(\mathbf{r},t)e^{i\mathbf{qr}}\,, \quad (1.30)$$

где $f\ (\mathbf{r},t)$ – вещественная функция, $\mathbf{q}$ – малая поправка к волновому вектору $\mathbf{k}_0$. Подстановка (1.30) в (1.29) дает:

$$i2k_0\left(\frac{\partial f}{\partial x}+iq_x f+\frac{1}{u}\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\nabla^2_{yz}f+ \\ +i2\left(q_y\frac{\partial f}{\partial y}+q_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)-(q_y^2+q_z^2)f+2\eta f^3=0.$$

Приравнивая к нулю мнимую и вещественную части этого уравнения, получим

$$k_0\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{k_0}{u}\frac{\partial f}{\partial t}+q_y\frac{\partial f}{\partial y}+q_z\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

$$\nabla^2_{yz}f-2k_0q_xf-(q_y^2+q_z^2)f+2\eta f^3=0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{uq_y}{k_0}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{uq_z}{k_0}\frac{\partial f}{\partial z}=0, \quad (1.31)$$

$$\nabla^2_{yz}f=(2k_0q_x+q_y^2+q_z^2)f-2\eta f^3\,. \quad (1.32)$$

Положим в (1.31) $f=f\left(s(\mathbf{r},t)\right)$. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial t}=f'(s)\frac{\partial s}{\partial t};\quad \frac{\partial f}{\partial x_i}=f'(s)\frac{\partial s}{\partial x_i}\,,$$

то, подставляя это в (1.31) и сокращая на $f'(s)$, находим

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{uq_y}{k_0}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{uq_z}{k_0}\frac{\partial s}{\partial z}=0\,. \quad (1.33)$$

Записываем уравнения характеристик для (1.33):

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{u}=\frac{dy}{uq_y/k_0}=\frac{dz}{uq_z/k_0}\,,$$

или

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u;\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{uq_y}{k_0};\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{uq_z}{k_0}\,.$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений при начальных условиях $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $z(0)=z_0$ элементарно интегрируется:

$$x=ut+x_0;\quad y=\frac{uq_y}{k_0}t+y_0;\quad z=\frac{uq_z}{k_0}t+z_0\,.$$

Выражаем отсюда начальные координаты

$$x_0=x-ut;\ y_0=y-\frac{uq_y}{k_0}t;\ z_0=z-\frac{uq_z}{k_0}t\,. \quad (1.34)$$

Согласно методу Коши полный интеграл уравнения (1.33) имеет вид

$$s(\mathbf{r},t)=b_xx_0+b_yy_0+b_zz_0+b_0\ ,$$

где $b_x$, $b_y$ , $b_z$ – произвольные постоянные, $b_0$ – аддитивная произвольная постоянная, а $x_0$, $y_0$ и $z_0$ выражаются формулой (1.34), т.е.

$$s(\mathbf{r},t)=b_x(x-ut)+b_y\left(y-\frac{uq_y}{k_0}t\right)+b_z\left(z-\frac{uq_z}{k_0}t\right)+b_0.$$

Аддитивную постоянную $b_0$ выберем в виде $b_0=-b_xx_0-b_yy_0-b_zz_0$.

Тогда

$$s(\mathbf{r},t)=b_x(x-x_0-ut)+ \\ +b_y\left(y-y_0-\frac{uq_y}{k_0}t\right)+b_z\left(z-z_0-\frac{uq_z}{k_0}t\right),$$

что можно записать в векторной форме

$$s(\mathbf{r},t)=\mathbf{b}\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-\mathbf{v}t)\,, \quad (1.35)$$

где $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}_\perp$ – вектор скорости с проекциями

$$\mathbf{v}=(u;\,uq_y/k_0;\,uq_z/k_0)\,. \quad (1.36)$$

В силу линейности уравнения (1.33), его решение (1.35) можно умножить на любой числовой множитель $1/A$, что сделано для дальнейшего удобства. Итак, окончательно полный интеграл уравнения (1.33) имеет вид:

$$s(\mathbf{r},t)=\mathbf{b}\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-\mathbf{v}t)/A\,. \quad (1.37)$$

Решим теперь уравнение (1.32).

Подставляем $f$=$f\,(s)$, где $s$ – определяется формулой (1.37), в уравнение (1.32). Так как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''(s)b_y^2/A^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=f''(s)b_z^2/A^2\,,$$

то из (1.32) получим

$$f''(s)\left(b_y^2+b_z^2\right)\Big/A^2= \\ =(2k_0q_x+q_y^2+q_z^2)f(s)-2\eta f^3(s)\,. \quad (1.38)$$

Выберем $A=\sqrt{b_y^2+b_z^2}$. Тогда (1.37) и (1.38) принимают вид

$$s=\mathbf{b}\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-\mathbf{v}t)/\sqrt{b_y^2+b_z^2}\ , \quad (1.39)$$

$$f''(s)=(2k_0q_x+q_y^2+q_z^2)f(s)-2\eta f^3(s)\,. \quad (1.40)$$

Введем, как и ранее, обозначение $a=\sqrt{2k_0q_x+q_y^2+q_z^2}$. Тогда (1.40) принимает вид: $f''(s)=a^2f(s)-2\eta f(s)$, совпадающий с уравнением (1.21), и, согласно (1.20), имеет решение:

$$f(\mathbf{r},t)=\frac{a}{\sqrt{\eta}ch\left(as(\mathbf{r},t)\right)},$$

где $s(\mathbf{r},t)$ выражается формулой (1.39). В силу симметрии уравнений (1.32) и (1.40) относительно преобразования $f \leftrightarrow -f$, решением будет также $f_a=-f$.

Окончательно решение (1.30) имеет вид:

$$E_0(\mathbf{r},t) = \frac{\pm\sqrt{\left(2k_0q_x + q_y^2 + q_z^2\right)/\eta}\exp\{i\mathbf{qr}\}}{ch\left[\sqrt{\dfrac{2k_0q_x + q_y^2 + q_z^2}{b_y^2 + b_z^2}}\mathbf{b}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-\mathbf{v}t)\right]}.$$

## 2. Математическая модель нелинейного волнового уравнения

Уравнение (1) выведено в [1] при предположениях, что $\partial^2 E_0/\partial x^2$ много меньше поперечных производных, а также, что можно воспользоваться приближенной формулой

$$\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2} \approx -\omega^2\varepsilon(\omega)\mathbf{E} - i\frac{d(\omega^2\varepsilon(\omega))}{d\omega}\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}e^{-i\omega t}.$$

В этом разделе мы откажемся от этих предположений и выведем нелинейное волновое уравнение.

Рассмотрим прохождение интенсивного лазерного луча с частотой $\omega$ через прозрачный однородный изотропный диэлектрик с плавным распределением центрально-симметричных атомов с плотностью $n$ атомов на кубический сантиметр.

Будем исходить из уравнений Максвелла, исключив из них магнитное поле [1]:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial\mathbf{t}^2} = 0,$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0.$$

Подставив сюда $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$ – вектор поляризации, получим:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2} = 0, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} + 4\pi\,\mathrm{div}\,\mathbf{P} = 0. \tag{2.2}$$

Поляризацию $\mathbf{P}$ представим в виде [3]:

$$\mathbf{P} = \alpha_1 n\mathbf{E} + \alpha_3 n|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}, \tag{2.3}$$

где $\alpha_1(\omega)$ – линейная, а $\alpha_3(\omega)$ – нелинейная поляризуемость.

Подстановка (2.3) в (2.1) и (2.2) даёт

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{\alpha}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + 2\gamma\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}\right) = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{\alpha}{c^2}\mathrm{div}\,\mathbf{E} + 2\gamma\,\mathrm{div}|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} = 0, \tag{2.5}$$

где $\alpha = 1 + 4\pi n\alpha_1$; $\gamma = 2\pi n\alpha_3/c^2$. Для слабонелинейных диэлектриков $\gamma$ – малая величина.

Воспользовавшись формулой

$$\mathrm{div}\,f\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\,\mathrm{grad}\,f + f\,\mathrm{div}\,\mathbf{a},$$

перепишем (2.5) в виде

$$\left(\frac{\alpha}{c^2} + 2\gamma|\mathbf{E}|^2\right)\mathrm{div}\,\mathbf{E} + 2\gamma\mathbf{E}\,\mathrm{grad}|\mathbf{E}|^2 = 0. \tag{2.6}$$

Пусть луч распространяется вдоль оси $x$. Поле $\mathbf{E}$ будем искать в виде произведения быстро осциллирующей функции $e^{i(k_0x-\omega t)}$ и медленно меняющейся функции $\mathbf{E}_0(r,t)$, т.е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r},t)e^{i(k_0x-\omega t)}.$$

Тогда в (2.6) последним слагаемым можно пренебречь, так как $2\gamma\,\mathbf{E}\,\mathrm{grad}|\mathbf{E}|^2 = 2\gamma\,\mathbf{E}\,\mathrm{grad}|\mathbf{E}_0|^2$ является малой величиной за счёт производных от медленно меняющейся функции $\mathbf{E}_0$ ($\mathbf{r}$, $t$) и дополнительно мала в силу малости коэффициента нелинейности $\gamma$. Следовательно, из (2.6) имеем $\mathrm{div}\,\mathbf{E} \approx 0$, т.е. поле остается поперечным, как в линейной теории. Далее

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} - \nabla^2 E \approx -\nabla^2\mathbf{E},$$

$$2\gamma\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}\right) = 2\gamma\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(|\mathbf{E}_0|^2\mathbf{E}_0 e^{i(k_0x-\omega t)}\right) \approx$$

$$\approx -2\gamma\omega^2|\mathbf{E}_0|^2\mathbf{E}_0\,e^{i(k_0x-\omega t)} = -2\gamma\omega^2|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}.$$

Тогда (2.4) примет вид:

$$\frac{\alpha}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{E} - 2\eta|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} = 0, \tag{2.7}$$

где $\eta = \gamma\omega^2$.

Пусть поле $\mathbf{E}$ поляризовано вдоль оси $z$, т.е. $\mathbf{E}$= (0,0,$E$). Тогда, подставляя $E = E_0(\mathbf{r},t)e^{i(k_0x-\omega t)}$ в уравнение

$$\frac{\alpha}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \nabla^2 E - 2\eta|E|^2 E = 0,$$

получим

$$\begin{gathered}\frac{\alpha}{c^2}\frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} - \nabla^2 E_0 + \left(k_0^2 - \frac{\alpha\omega^2}{c^2}\right)E_0 - \\ -2\eta|E_0|^2 E_0 - i2\left(\frac{\alpha\omega}{c^2}\frac{\partial E_0}{\partial t} + k_0\frac{\partial E_0}{\partial x}\right) = 0\end{gathered}. \tag{2.8}$$

Функцию $E_0(\mathbf{r},t)$ ищем в виде

$$E_0(\mathbf{r},t) = \varphi(\mathbf{r},t)e^{i\mathbf{qr}}, \tag{2.9}$$

где $\varphi(\mathbf{r},t)$ – вещественная функция, $\mathbf{q}$ – малая поправка к волновому вектору $\mathbf{k}_0$ =($k_0$ ,0,0). Подставляя (2.9) в (2.8) и приравнивая к нулю мнимую и вещественную части полученного уравнения, находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{c^2k_0}{\alpha\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{c^2}{\alpha\omega}(\mathbf{q}\nabla\varphi) = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\alpha}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\nabla^2\varphi+ \\ +\left(k_0^2+q^2+2k_0 q_x-\frac{\alpha\omega^2}{c^2}\right)\varphi-2\eta\varphi^3=0. \tag{2.11}$$

Уравнения (2.10) и (2.11) совместны, так как (2.10) является линейным однородным уравнением первого порядка. Как известно из теории таких уравнений [7], решением уравнения (2.10) является любая дважды дифференцируемая функция $\varphi=\varphi(s)$, где $s(\mathbf{r},\ t)$ – полный интеграл уравнения (2.10), если в нем $\varphi$ заменить на $s$.

Раскрывая скалярное произведение $(\mathbf{q}\nabla\varphi)$, перепишем (2.10) в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\frac{c^2k_0}{\alpha\omega}+\frac{c^2q_x}{\alpha\omega}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+ \\ +\frac{c^2q_y}{\alpha\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{c^2q_z}{\alpha\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \tag{2.12}$$

Заметим, что каждый множитель перед $\partial\varphi/\partial x_i$ имеет размерность скорости, и примем обозначения

$$\frac{c^2k_0}{\alpha\omega}=u_0,\quad \frac{c^2q_x}{\alpha\omega}=\delta u_x, \\ \frac{c^2q_y}{\alpha\omega}=\delta u_y,\quad \frac{c^2q_z}{\alpha\omega}=\delta u_z \quad . \tag{2.13}$$

Тогда (2.12) можно записать в векторной форме

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\mathbf{u}\nabla\varphi)=0\,, \tag{2.14}$$

где $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\delta\mathbf{u}$, с проекциями на оси координат

$$\mathbf{u}_0=(u_0,0,0),\quad \delta\mathbf{u}=(\delta u_\mathbf{x},\delta u_\mathbf{y},\delta u_\mathbf{z}), \\ \mathbf{u}=(u_0+\delta u_\mathbf{x},\delta u_\mathbf{y},\delta u_\mathbf{z}) \quad .$$

Положим $\varphi=\varphi(s)$.

Поскольку $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=\varphi'(s)\dfrac{\partial s}{\partial t},\quad \nabla\varphi=\varphi'(s)\nabla s$, то, подставляя это в (2.14) и сокращая на $\varphi'(s)$, находим:

$$\frac{\partial s}{\partial t}+(\mathbf{u}\nabla s)=0\,,$$

или в развернутом виде:

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u_x\frac{\partial s}{\partial x}+u_y\frac{\partial s}{\partial y}+u_z\frac{\partial s}{\partial z}=0\,. \tag{2.15}$$

Запишем уравнения характеристик [7] для (2.15):

$$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}x}{u_x}=\frac{\mathrm{d}y}{u_y}=\frac{\mathrm{d}z}{u_z}\,,$$

откуда

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u_x;\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u_y;\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=u_z\,.$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений элементарно интегрируется при начальных условиях $x(0)=x_0,\quad y(0)=y_0,\quad z(0)=z_0$:

$$x=u_xt+x_0,\quad y=u_yt+y_0,\quad z=u_zt+z_0.$$

Выражаем отсюда начальные координаты:

$$x_0=x-u_xt;\quad y_0=y-u_yt;\quad z_0=z-u_zt.$$

Согласно методу Коши [7] полный интеграл уравнения (2.15) имеет вид:

$$s=b_xx_0+b_yy_0+b_zz_0+b_0\,,$$

где $b_x$, $b_y$, $b_z$ – произвольные постоянные, $b_0$ – аддитивная произвольная постоянная, т.е.

$$s=b_x(x-u_xt)+b_y(y-u_yt)+b_z(z-u_zt)+b_0.$$

Аддитивную произвольную постоянную $b_0$ выберем в виде

$$b_0=-b_xx_0-b_yy_0-b_zz_0\,,$$

тогда

$$s=b_x(x-x_0-u_xt)+ \\ +b_y(y-y_0-u_yt)+b_z(z-z_0-u_zt),$$

что можно записать в векторной форме:

$$s=\mathbf{b}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-\mathbf{u}t). \tag{2.16}$$

В том, что (2.16) является решением уравнения (2.15) легко убедиться прямой подстановкой.

В силу линейности уравнения (2.15) его решение (2.16) можно умножить на любой числовой множитель $1/A$, что сделано для дальнейшего удобства. Итак, окончательно

$$s(\mathbf{r},t)=\mathbf{b}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-\mathbf{u}t)/A\,. \tag{2.17}$$

Займемся теперь решением уравнения (2.11).

Подставляя в уравнение (2.11) $\varphi=\varphi(s)$, где $s$ определяется формулой (2.17), находим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\varphi''(s)\frac{(\mathbf{bu})^2}{A^2};$$

$$\nabla^2\varphi=\varphi''(s)\frac{b_x^2+b_y^2+b_z^2}{A^2}=\varphi''(s)\frac{b^2}{A^2};$$

тогда (2.11) принимает вид:

$$\frac{\varphi''(s)}{A^2}\left[\frac{\alpha}{c^2}(\mathbf{bu})^2-b^2\right]+ \\ +a^2\varphi(s)-2\eta\varphi^3(s)=0, \tag{2.18}$$

где принято обозначение

$$a^2=k_0^2+q^2+2k_0q_x-\alpha\omega^2/c^2. \tag{2.19}$$

Положим $A=\sqrt{b^2c^2-\alpha(\mathbf{bu})^2}/c$. Тогда (2.17) и (2.18) примут вид:

$$s(\mathbf{r},t)=\frac{c\mathbf{b}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-\mathbf{u}t)}{\sqrt{b^2c^2-\alpha(\mathbf{bu})^2}}\,, \tag{2.20}$$

$$\varphi''(s)=a^2\varphi(s)-2\eta\varphi^3(s)\,, \tag{2.21}$$

или

$$\varphi''=\partial V(\varphi)/\partial\varphi\,,$$

где

$$V(\varphi)=a^2\varphi^2/2-\eta\varphi^4/2=(a^2-\eta\varphi^2)\varphi^2/2\,.$$

Нулями функции $V(\varphi)$ являются $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = a/\sqrt{\eta}$ и $\varphi_3 = -a/\sqrt{\eta}$, поэтому граничными условиями для (2.11) примем:

$$\varphi = \varphi_i,\ i{=}1{,}2{,}3;\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

при $|\mathbf{r}| \to \infty$.

Уравнение (2.21) элементарно интегрируется. Умножив его на $\varphi'(s)$ и проинтегрировав, получим

$$\varphi'^2/2 = a^2\varphi^2/2 - \eta\varphi^4/2 + C_1.$$

Из принятых граничных условий следует, что $C_1 = 0$. Тогда

$$\partial\varphi/\partial s = \varphi\sqrt{a^2 - \eta\varphi^2},$$

откуда

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{a^2 - \eta\varphi^2}} = s.$$

Выполняя интегрирование и обращая полученное выражение, находим

$$\varphi = \varphi\big(s(\mathbf{r},t)\big) = \frac{a/\sqrt{\eta}}{ch\big(a\,s(\mathbf{r},t)\big)}, \qquad (2.22)$$

где $a$ и $s(\mathbf{r},\ t)$ определяются формулами (2.19) и (2.20).

С учетом (2.20) приходим к выводу, что найденное решение (2.22) является гладкой функцией, локализованной вдоль направления $\mathbf{r}(t)$=$\mathbf{r}_0$+$\mathbf{u}t$ и его центр движется с постоянной скоростью $\mathbf{u}$.

В силу симметрии уравнения (2.18) относительно преобразования $\varphi \leftrightarrow -\varphi$, решением будет также $\varphi_a = -\varphi$.

Таким образом, огибающая, имеющая форму гиперболического секанса, модулирует монохроматическую несущую волну в последовательность sech-импульсов, каждый из которых отклонен от оси $x$ на угол

$$\beta^i = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{(\delta u_y^i)^2 + (\delta u_z^i)^2}}{u_0 + \delta u_x^i} \approx$$

$$\approx \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{(q_y^2)^i + (q_z^2)^i}}{k_0}.$$

Средняя скорость импульсов $\langle\mathbf{u}\rangle = \mathbf{u}_0 = \dfrac{c^2\mathbf{k}_0}{\alpha\omega}$ направлена вдоль оси $x$.

Установим дисперсионное соотношение. Полный волновой вектор $\mathbf{k}$=$\mathbf{k}_0$+$\mathbf{q}$ имеет проекции ($k_0$+$q_x$, $q_y$, $q_z$) и равенство (2.19) записывается в виде

$$a^2 = (k_0 + q_x)^2 + q_y^2 + q_z^2 - \alpha\omega^2/c^2$$

или

$$a^2 = k^2 - \alpha\omega^2/c^2. \qquad (2.23)$$

С другой стороны, из (2.22) следует, что $|\mathbf{E}_0|_{\max} = a/\sqrt{\eta}$. Отсюда $a = \sqrt{\eta}\,|\mathbf{E}_0|_{\max}$ и из (2.23) находим

$$k^2 = \frac{\alpha\omega^2}{c^2} + \eta|\mathbf{E}_0|^2_{\max},$$

что и является дисперсионным соотношением.

Установим область значений волнового вектора $k$, где среда обладает фокусирующими свойствами.

Во-первых, из (2.23) имеем:

$$a^2 = \frac{k^2c^2 - \alpha\omega^2}{c^2} > 0,$$

откуда

$$kc > \sqrt{\alpha}\omega. \qquad (2.24)$$

Во-вторых, скорость движения огибающей $\mathbf{u}$ должна быть меньше скорости света в вакууме:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u} = \frac{c^2\mathbf{k}_0}{\alpha\omega} + \frac{c^2\mathbf{q}}{\alpha\omega} = \frac{c^2}{\alpha\omega}(\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}) = \frac{c^2\mathbf{k}}{\alpha\omega},$$

следовательно, $c^2k/\alpha\omega < c,$ откуда:

$$kc < \alpha\omega. \qquad (2.25)$$

Объединяя (2.24) и (2.25), имеем:

$$\sqrt{\alpha}\omega/c < k < \alpha\omega/c.$$

Это и есть дозволенная область значений волнового вектора.

Функция $s(\mathbf{r},\ t)$ из (2.20) должна быть вещественной. Следовательно, $b^2c^2 - \alpha(\mathbf{bu})^2 > 0$ или $b^2c^2 - \alpha b^2u^2\cos^2(\mathbf{b}\^\mathbf{u}) > 0.$ Учитывая, что $u = c^2k/\alpha\omega$, отсюда имеем $kc < \sqrt{\alpha}\omega/\left|\cos(\mathbf{b}\^\mathbf{u})\right|$. Разрешая это неравенство совместно с (2.25) находим $\left|\cos(\mathbf{b}\^\mathbf{u})\right| \le 1/\sqrt{\alpha},$ что можно записать в виде $|\mathbf{bu}|/bu \le 1/\sqrt{\alpha},$ или $|\mathbf{bk}|/bk \le 1/\sqrt{\alpha}$.

Последнее неравенство налагает ограничение на произвольные постоянные $b_x$, $b_y$, $b_z$.

### *Заключение*

Разработан прямой метод решения модельных эволюционных уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера и волнового уравнения типа Гинзбурга-Ландау на примере уравнений нелинейной оптики.

Найдены точные решения нелинейного уравнения Шредингера в виде гладких стационарных и нестационарных функций, содержащих полные интегралы линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка.

Из уравнений Максвелла выведено нелинейное волновое уравнение типа Гинзбурга-Ландау, описывающее распространение оптического излучения в нелинейном однородном изотропном диэлектрике, и найдены его точные аналитические решения для стационарного и нестационарного случаев.

Показано, что использование особого интеграла линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка приводит к неавтономному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, для которого найдены асимптотические и численные решения.

Огибающие всех найденных решений имеют форму гиперболического секанса, аргументом которого являются различные функции, порой достаточно громоздкие.

***Благодарности***

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, правительства Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE, REC N 14).

***Литература***

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред // М.: «Наука», 1982.
2. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов // М.: Наука, 1986.
3. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения // М.: Мир, 1988.
4. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике // М.: Мир, 1989.
5. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля // М.: «Мир», 1985.
6. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы // М.: Наука, 1977.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений // М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.