НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА В ТРЕХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

И.В. Алименков

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева

Найдены в аналитической форме гладкие решения нелинейного уравнения Шредингера в виде уединенных волн для случая трех пространственных измерений. Рассмотрено явление оптической самофокусировки.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, линейное однородное уравнение первого порядка, полный интеграл, уравнения характеристик, уединенные волны, оптическая самофокусировка.

Введение

Нелинейное уравнение Шредингера находит широкое применение в различных областях физики, например, в нелинейной оптике, физике плазмы, теории сверхпроводимости, физике низких температур. Для одного пространственного измерения теория нелинейного уравнения Шредингера детально разработана [1-3]. В этой статье рассматривается случай трехмерного пространства, т.е. изучается уравнение

$$i\,\partial\psi/\partial t+\nabla^2\psi+2\eta\psi|\psi|^2=0\,, \tag{1}$$

где $\psi(\boldsymbol{r},t)$ – комплексная функция, η – вещественный параметр нелинейности.

Основной формализм

Найдем «стационарные» решения вида:

$$\psi(\mathbf{r},t)=\varphi(\mathbf{r})e^{i\varepsilon t}\,, \tag{2}$$

где ε – свободный параметр. Подставляя (2) в (1), получим

$$\nabla^2\varphi-\varepsilon\varphi+2\eta\varphi|\varphi|^2=0\,. \tag{3}$$

Уравнение (3) допускает решения в классе вещественных функций, где оно принимает вид

$$\nabla^2\varphi=\varepsilon\varphi-2\eta\varphi^3\,. \tag{4}$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде сложной функции $\varphi=\varphi(u(\mathbf{r}))$, где $u(\mathbf{r})=\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)/k$. Здесь $\mathbf{k}$ – произвольная векторная постоянная $\mathbf{k}=(k_x,k_y,k_z)$, $k=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$. Подстановка $\varphi=\varphi(u(\mathbf{r}))$ в (4) даёт

$$\varphi''(u)=\varepsilon\varphi(u)-2\eta\varphi^3(u)\,. \tag{5}$$

Перепишем (5) в виде

$$\varphi''(u)=\partial V(\varphi)/\partial\varphi\,,$$

где $V(\varphi)=(\varepsilon-\eta\varphi^2)\varphi^2/2$. «Потенциал» $V(\varphi)$ неотрицателен при $|\varphi|<\sqrt{\varepsilon/\eta}$ и имеет нули $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\sqrt{\varepsilon/\eta}$, $\varphi_3=-\sqrt{\varepsilon/\eta}$, поэтому [4] граничными условиями для (4) примем $\varphi(\mathbf{r})=\varphi_i$, $i=1,2,3$; $\partial\varphi/\partial x_i=0$ при $|\mathbf{r}|$=∞.

Так как $\partial\varphi/\partial x_i=\varphi'(u)\partial u/\partial x_i=\varphi'(u)k_i/k=0$ при $|\boldsymbol{r}|$=∞, то это означает, что $\varphi'(u)=0$ при $|u|$=∞.

Умножим последнее уравнение на $\varphi'(u)$ и проинтегрируем. Получим $\varphi'^2/2=V(\varphi)+C$. Из граничных условий следует, что C=0. Интегрируя ещё раз, находим

$$\int d\varphi/\sqrt{2V(\varphi)}=u\,,$$

или

$$\int\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{\varepsilon-\eta\varphi^2}}=\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)/k\,.$$

Вычисляя интеграл и обращая полученное выражение, имеем

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{\sqrt{\varepsilon/\eta}}{ch\left(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)/k\right)}\,.$$

Очевидно $|\varphi|\le\sqrt{\varepsilon/\eta}$. В силу симметрии (4) и (5) относительно преобразования $\varphi\leftrightarrow-\varphi$, решением будет также $\varphi_a=-\varphi$. Итак, окончательно

$$\psi(\mathbf{r},t)=\frac{\pm\sqrt{\varepsilon/\eta}\,e^{i\varepsilon t}}{ch\left(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)/k\right)}\,,$$

или, введя обозначение $a=\sqrt{\varepsilon/\eta}$, откуда $\varepsilon=a^2\eta$,

$$\psi(\mathbf{r},t)=\frac{\pm a\exp\{ia^2\eta t\}}{ch\left(a\sqrt{\eta}\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)/k\right)}\,.$$

Если $\eta<0$, т.е. $\eta=-|\eta|$, то (5) принимает вид

$$\varphi''(u)=\varepsilon\varphi(u)+2|\eta|\varphi^3(u)\,,$$

или

$$\varphi''(u)=\partial V(\varphi)/\partial\varphi,$$

где

$$V(\varphi)=(\varphi^2+\varepsilon/2|\eta|)^2|\eta|/2\,.$$

Несингулярное решение последнего уравнения существует только при $\varepsilon<0$, т.е. $\varepsilon=-|\varepsilon|$,

$$\varphi''(u)=2|\eta|\varphi^3(u)-|\varepsilon|\varphi(u)\,. \tag{6}$$

Интегрируя (6) тем же способом, что и (5), получим

$$\pm\frac{1}{\sqrt{|\eta|}}\int\frac{d\varphi}{\varphi^2-|\varepsilon|/2|\eta|}=\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)/k\,.$$

Вычисляя интеграл и обращая полученное выражение, находим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \pm\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2|\eta|}}th\left[\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)/k\right].$$

Вводя обозначение $\sqrt{|\varepsilon|/2|\eta|} = a$, откуда $\varepsilon = -2a^2|\eta|$, окончательно имеем

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \pm a\,th\left[a\sqrt{|\eta|}\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)/k\right]\exp\left\{-i2a^2|\eta|t\right\}.$$

В классе комплексных функций решение уравнения (3) ищем в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})e^{i\mathbf{qr}}, \tag{7}$$

где $f(\mathbf{r})$ – вещественная функция, $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ - свободный векторный параметр. Подставляя (7) в (3) и приравнивая к нулю мнимую и вещественную части полученного уравнения, находим

$$(\mathbf{q}\nabla f) = 0, \tag{8}$$

$$\nabla^2 f = (q^2+\varepsilon)f - 2\eta f^3. \tag{9}$$

Уравнения (8) и (9) совместны, т.к. (8) является линейным однородным уравнением первого порядка и, как известно [5] из теории таких уравнений, решением уравнения (8) является любая дифференцируемая функция $f = f(s(\mathbf{r}))$, где $s(\mathbf{r})$ – полный интеграл уравнения

$$(\mathbf{q}\nabla s) = 0,$$

или

$$q_x\frac{\partial s}{\partial x} + q_y\frac{\partial s}{\partial y} + q_z\frac{\partial s}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Если одна из координатных осей, например ось *x*, является выделенной среди других, то выбираем переменную *x* в качестве параметра уравнений характеристик для (10), записав его в виде

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{q_y}{q_x}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{q_z}{q_x}\frac{\partial s}{\partial z} = 0.$$

Уравнения характеристик

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{q_y/q_x} = \frac{dz}{q_z/q_x}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q_y}{q_x},\quad \frac{dz}{dx} = \frac{q_z}{q_x}$$

элементарно интегрируются при начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$:

$$y = \frac{q_y}{q_x}(x-x_0) + y_0,\quad z = \frac{q_z}{q_x}(x-x_0) + z_0.$$

Для нахождения полного интеграла выражаем отсюда начальные данные

$$y_0 = y - \frac{q_y}{q_x}(x-x_0),\quad z_0 = z - \frac{q_z}{q_x}(x-x_0). \tag{11}$$

Согласно методу Коши [5], полный интеграл уравнения (10) имеет вид:

$$s(\mathbf{r}) = k_y y_0 + k_z z_0 + k_0,$$

где k_y, k_z – произвольные постоянные, k_0 – аддитивная произвольная постоянная, а y_0 и z_0 выражаются формулой (11), т.е.

$$s(\mathbf{r}) = k_y\left[y - \frac{q_y}{q_x}(x-x_0)\right] + k_z\left[z - \frac{q_z}{q_x}(x-x_0)\right] + k_0.$$

Аддитивную произвольную постоянную k_0 выберем в виде

$$k_0 = -k_y y_0 - k_z z_0,$$

тогда

$$s(\mathbf{r}) = k_y\left[y - y_0 - \frac{q_y}{q_x}(x-x_0)\right] + k_z\left[z - z_0 - \frac{q_z}{q_x}(x-x_0)\right].$$

В силу линейности уравнения (10) его полный интеграл можно умножить на любой числовой множитель 1/*C*, что сделано для дальнейшего удобства. Итак,

$$s(\mathbf{r}) = \frac{k_y\left(y - y_0 - (x-x_0)q_y/q_x\right)}{C} + \frac{k_z\left(z - z_0 - (x-x_0)q_z/q_x\right)}{C}. \tag{12}$$

Подставляя $f = f(s(\mathbf{r}))$ в (9), получим

$$f''(s)\left[\frac{(k_y q_y + k_z q_z)^2}{q_x^2} + k_y^2 + k_z^2\right]/C^2 = (q^2+\varepsilon)f(s) - 2\eta f^3(s). \tag{13}$$

Положим

$$C = \sqrt{(k_y q_y + k_z q_z)^2 + q_x^2(k_y^2 + k_z^2)}/q_x.$$

Тогда (12) и (13) примут вид:

$$s(\mathbf{r}) = \frac{k_y\left[q_x(y-y_0) - q_y(x-x_0)\right]}{\sqrt{(k_y q_y + k_z q_z)^2 + q_x^2(k_y^2+k_z^2)}} + \frac{k_z\left[q_x(z-z_0) - q_z(x-x_0)\right]}{\sqrt{(k_y q_y + k_z q_z)^2 + q_x^2(k_y^2+k_z^2)}}, \tag{14}$$

$$f''(s) = (q^2+\varepsilon)f(s) - 2\eta f^3(s). \tag{15}$$

При $\eta > 0$ несингулярное решение уравнения (15) существует только, если $q^2 + \varepsilon = a^2$. Тогда (15) примет вид:

$$f''(s) = a^2 f(s) - 2\eta f^3(s), \tag{16}$$

совпадающий по форме с уравнением (5). Повторяя ход решения уравнения (5), получим

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\pm a/\sqrt{\eta}}{ch\,a\,s(\mathbf{r})},$$

где $s(\mathbf{r})$ выражается громоздкой формулой (14). Так как $\varepsilon = a^2 - q^2$, то окончательно

$$\psi(\mathbf{r},t) = \frac{\pm a/\sqrt{\eta}}{ch\, a\, s(\mathbf{r})} \exp\left\{ i\left[\mathbf{qr} + (a^2 - q^2)t \right] \right\}.$$

Если $\eta < 0$, т.е. $\eta = -|\eta|$, то несингулярное решение уравнения (15) существует только при $q^2 + \varepsilon = -a^2$ и (15) принимает вид:

$$f''(s) = 2|\eta| f^3(s) - a^2 f(s), \qquad (17)$$

совпадающий по форме с уравнением (6). Интегрируя (17) тем же способом, что и (6), находим

$$f(\mathbf{r}) = \pm \frac{a}{\sqrt{2|\eta|}} th \frac{a\, s(\mathbf{r})}{\sqrt{2}}.$$

Учитывая, что $\varepsilon = -(a^2 + q^2)$, окончательно имеем

$$\psi(\mathbf{r},t) = \pm \frac{a}{\sqrt{2|\eta|}} th\left[\frac{a\, s(\mathbf{r})}{\sqrt{2}} \right] \left\{ i\left[\mathbf{qr} - (a^2 + q^2)t \right] \right\}.$$

Нестационарные решения уравнения (1) будем искать в виде

$$\psi(\mathbf{r},t) = \varphi(\mathbf{r},t) \exp\{ i(\mathbf{qr} - \omega t + \varphi_0) \}, \qquad (18)$$

где $\varphi(\mathbf{r},t)$ – вещественная функция, $\mathbf{q}, \omega$ и φ_0 – свободные параметры. Подставляя (18) в (1) и приравнивая к нулю мнимую и вещественную части полученного уравнения, находим

$$\partial\varphi/\partial t + 2(\mathbf{q}\nabla\varphi) = 0, \qquad (19)$$

$$\nabla^2\varphi = (q^2 - \omega)\varphi - 2\eta\varphi^3. \qquad (20)$$

Линейное однородное уравнение первого порядка (19) имеет своим решением любую дифференцируемую функцию $\varphi = \varphi(s(\mathbf{r},t))$, где $s(\mathbf{r},t)$ - полный интеграл уравнения

$$\partial s/\partial t + 2(\mathbf{q}\nabla s) = 0,$$

или в развёрнутой форме

$$\frac{\partial s}{\partial t} + 2\left(q_x \frac{\partial s}{\partial x} + q_y \frac{\partial s}{\partial y} + q_z \frac{\partial s}{\partial z} \right) = 0. \qquad (21)$$

Уравнения характеристик для (21) имеют вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2q_x} = \frac{dy}{2q_y} = \frac{dz}{2_z},$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = 2q_x, \quad \frac{dy}{dt} = 2q_y, \quad \frac{dz}{dt} = 2q_z.$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений элементарно интегрируется при начальных условиях $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$:

$$x = 2q_x t + x_0, \quad y = 2q_y t + y_0, \quad z = 2q_z t + z_0.$$

Выражаем отсюда начальные данные

$$x_0 = x - 2q_x t, \quad y_0 = y - 2q_y t, \quad z_0 = z - 2q_z t. \qquad (22)$$

Согласно методу Коши, полный интеграл уравнения (21) имеет вид:

$$s = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 + k_0,$$

где k_x, k_y, k_z – произвольные постоянные, k_0 – аддитивная произвольная постоянная, а x_0, y_0, z_0 – выражены согласно (22), т.е.

$$s = k_x(x - 2q_x t) + k_y(y - 2q_y t) + k_z(z - 2q_z t) + k_0.$$

Аддитивную произвольную постоянную k_0 выберем в виде

$$k_0 = -k_x x_0 - k_y y_0 - k_z z_0,$$

тогда

$$s = k_x(x - x_0 - 2q_x t) + k_y(y - y_0 - 2q_y t) + \\ + k_z(z - z_0 - 2q_z t),$$

что можно записать в векторной форме

$$s = \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t). \qquad (23)$$

В силу линейности уравнения (21) его решение (23) можно умножить на любой числовой множитель 1/С, что сделано для дальнейшего удобства. Итак, окончательно

$$s(\mathbf{r},t) = \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t)/C. \qquad (24)$$

Подставляя $\varphi = \varphi(s(\mathbf{r},t))$, где $s(\mathbf{r},t)$ - определяется формулой (24) в (20), получим

$$\varphi''(s)\frac{k^2}{C^2} = (q^2 - \omega)\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s). \qquad (25)$$

Положим $C = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Тогда (24) и (25) примут вид

$$s(\mathbf{r},t) = \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t)/k, \qquad (26)$$

$$\varphi''(s) = (q^2 - \omega)\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s). \qquad (27)$$

При $\eta > 0$ полагаем $q^2 - \omega = a^2$ и (27) принимает вид:

$$\varphi''(s) = a^2\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s),$$

совпадающий с уравнением (16), и мы можем сразу записать его решение

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{\pm a/\sqrt{\eta}}{ch\, a\, s(\mathbf{r},t)} = \frac{\pm a/\sqrt{\eta}}{ch\left[a\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t)/k \right]}.$$

Так как $\omega = q^2 - a^2$, то окончательно

$$\psi(\mathbf{r},t) = \frac{\pm a \exp\left\{ i\left[\mathbf{qr} - (q^2 - a^2)t + \varphi_0 \right] \right\}}{\sqrt{\eta}\, ch\left[a\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t)/k \right]}.$$

Если принять здесь $\mathbf{q} = (q, 0, 0)$, $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$, то получим известное решение одномерного нелинейного уравнения Шредингера.

При $\eta < 0$, т.е. $\eta = -|\eta|$ полагаем $q^2 - \omega = -a^2$ и (27) принимает вид:

$$\varphi''(s) = 2|\eta|\varphi^3(s) - a^2\varphi(s),$$

совпадающий с уравнением (17). Следовательно,

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{\pm a}{\sqrt{2|\eta|}}th\frac{a}{\sqrt{2}}s(\mathbf{r},t)=$$
$$=\frac{\pm a}{\sqrt{2|\eta|}}th\frac{a\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-2\mathbf{q}t)}{\sqrt{2}k}.$$

Учитывая, что $\omega=q^2+a^2$, окончательно имеем

$$\psi(\mathbf{r},t)=\frac{\pm a}{\sqrt{2|\eta|}}th\frac{a\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-2\mathbf{q}t)}{\sqrt{2}k}\times$$
$$\times\exp\left\{i\left[\mathbf{qr}-(q^2+a^2)t+\varphi_0\right]\right\}.$$

В приведенных решениях амплитудные функции имеют вид гиперболических секанса и тангенса, аргументами которых являются линейные функции s($\mathbf{r}$) или s($\mathbf{r}$,t). Для нахождения решений, зависящих от нелинейных функций s($\mathbf{r}$) или s($\mathbf{r}$,t) нужно вместо полных интегралов линейных однородных уравнений первого порядка использовать особые интегралы.

Проиллюстрируем сказанное на примере решений вида (18), сводящихся к уравнениям (19) и (20). Найдем особый интеграл уравнения (19). Для этого исключим стандартным способом [5] произвольные постоянные k_x, k_y, k_z из полного интеграла (26). Дифференцируя (26) по k_x, k_y, k_z и приравнивая производные к нулю, найдем

$$s(\mathbf{r},t)=$$
$$=\sqrt{(x-x_0-2q_xt)^2+(y-y_0-2q_yt)^2+(z-z_0-2q_zt)^2}. \tag{28}$$

Подставив $\varphi=\varphi(s)$ в (20), получим

$$\varphi''(s)+\frac{2\varphi'(s)}{s}=a^2\varphi-2\eta\varphi^3. \tag{29}$$

Аналитические решения этого обыкновенного дифференциального уравнения автору неизвестны, однако легко найти приближенное решение при больших значениях s (что является оправданным в нелинейной оптике, где расстояния измеряются в единицах длин волн). Тогда вторым слагаемым в левой части (29) можно пренебречь и получим уже знакомое уравнение

$$\varphi''(s)=a^2\varphi(s)-2\eta\varphi^3(s),$$

имеющее решение

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{a/\sqrt{\eta}}{ch\,as(\mathbf{r},t)},$$

где $s(\mathbf{r},t)$ выражается формулой (28).

В стационарной теории оптической самофокусировки ключевую роль играет уравнение [6]

$$i2k_0\frac{\partial E_0}{\partial x}+\nabla^2_{y,z}E_0+2\eta|E_0|^2E_0=0, \tag{30}$$

где $E_0(\mathbf{r})$ – комплексная огибающая электрического поля, k_0 − главная часть волнового вектора $\mathbf{k}=(k_0+q_x,\ q_y,\ q_z)$, q_x, q_y, q_z – малые поправки к $\mathbf{k}_0=(k_0,0,0)$, η – коэффициент нелинейности среды.

Уравнение (30) является «двумерным» нелинейным уравнением Шредингера, в котором роль «времени» играет $x/2\,k_0$. Другими словами, (30) записано на $\mathbb{R}^3$, тогда как (1) на $\mathbb{R}^{3+1}$.

Если искать решение в виде

$$E_0(\mathbf{r})=f(\mathbf{r})e^{iqr}, \tag{31}$$

где $f(\mathbf{r})$ – вещественная функция, то подстановка (31) в (30) приводит к двум уравнениям:

$$k_0\frac{\partial f}{\partial x}+q_y\frac{\partial f}{\partial y}+q_z\frac{\partial f}{\partial z}=0, \tag{32}$$

$$\nabla^2_{y,z}f=(2k_0q_x+q_y^2+q_z^2)f-2\eta f^3. \tag{33}$$

Уравнение (32) имеет своим решением любую дифференцируемую функцию $f=f\left(s(\mathbf{r})\right)$, где $s(\mathbf{r})$ – полный или особый интеграл уравнения

$$\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{q_y}{k_0}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{q_z}{k_0}\frac{\partial s}{\partial z}=0. \tag{34}$$

Полный $s(\mathbf{r})$ и особый $s_0(\mathbf{r})$ интегралы уравнения (34) найдены в [7]:

$$s(\mathbf{r})=\frac{b_y\left[k_0(y-y_0)-q_y(x-x_0)\right]}{k_0\sqrt{b_y^2+b_z^2}}+$$
$$+\frac{b_z\left[k_0(z-z_0)-q_z(x-x_0)\right]}{k_0\sqrt{b_y^2+b_z^2}}, \tag{35}$$

$$s_0(\mathbf{r})\sqrt{\left(y-y_0-\frac{q_y}{k_0}(x-x_0)\right)^2+\left(z-z_0-\frac{q_z}{k_0}(x-x_0)\right)^2}, \tag{36}$$

где x_0 , y_0 , z_0 – координаты центра пучка, b_y, b_z – произвольные постоянные. Подстановка $f=f\left(s(\boldsymbol{r})\right)$ в (33) дает

$$f''(s)=\left(2k_0q_x+q_y^2+q_z^2\right)f(s)-2\eta f^3(s).$$

Вводя обозначение

$$a=\sqrt{2k_0q_x+q_y^2+q_z^2},$$

последнее уравнение приводим к виду (16), имеющему решение

$$f(\boldsymbol{r})=\frac{\pm a}{\sqrt{\eta}\,ch\,as(\boldsymbol{r})}. \tag{37}$$

Направим ось x через центр пучка. Тогда $y_0=z_0=0$. С учетом (35) приходим к выводу, что вещественная огибающая (37) в любом сечении пучка $x=const$ является гладкой ограниченной функцией, быстро стремящейся к нулю при удалении от оси x по всем направлениям, кроме прямой $y=c_1z+c_2$, определяемой из уравнения $s(\boldsymbol{r})=0$, вдоль которой поле остается постоянным. В центральном сечении $x=x_0$ эта прямая имеет вид $b_yy+b_zz=0$. Таким образом, решение (37) описывает частично сфокусированный пучок.

Подстановка $f = f\left(s_0(\boldsymbol{r})\right)$ в (33) приводит к неавтономному уравнению

$$f''(s_0) + \frac{f'(s_0)}{s_0} = a^2 f(s_0) - 2\eta f^3(s_0)\,, \qquad (38)$$

имеющему при больших значениях s_0 (в единицах длин волн) асимптотическое решение

$$f\left(s_0(\boldsymbol{r})\right) = \frac{\pm a}{\sqrt{\eta}\; ch\; a\, s_0(\boldsymbol{r})}\;, \qquad (39)$$

которое в любом сечении пучка $x=const$ быстро стремится к нулю при удалении от оси x по всем направлениям, т.е. пучок является полностью сфокусированным. Однако, поскольку (39) является асимптотическим решением, остается открытым вопрос о поведении функции (39) вблизи центра пучка. Точное решение уравнения (38) не должно иметь сингулярностей, чтобы быть физически допустимым решением.

Для численного решения, уравнение (38) с помощью преобразования $\xi = as_0$, $f = \frac{a}{\sqrt{\eta}}u$ приводим к безразмерному виду

$$u''(\xi) + \frac{u'(\xi)}{\xi} = u(\xi) - 2u^3(\xi)\,. \qquad (40)$$

На рис. 1 и 2 представлены численные решения уравнения (40) и их производные. Выходящие из начала координат кривые – графики производных $u'(\xi)$ соответствующих решений $u(\xi)$.

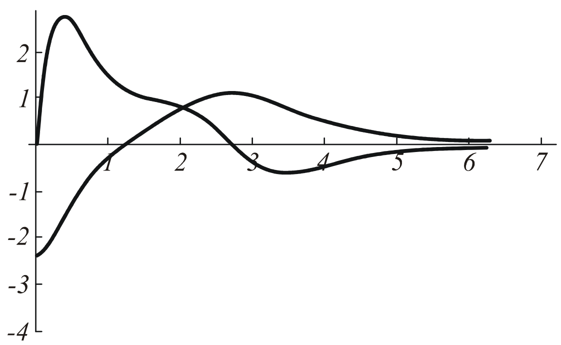

Рис. 1

Из графиков следует, что решения уравнения (40) являются гладкими ограниченными функциями, асимптотически стремящимися к нулю, а также, что уравнение (40) обладает симметрией относительно преобразования $u \leftrightarrow -u$.

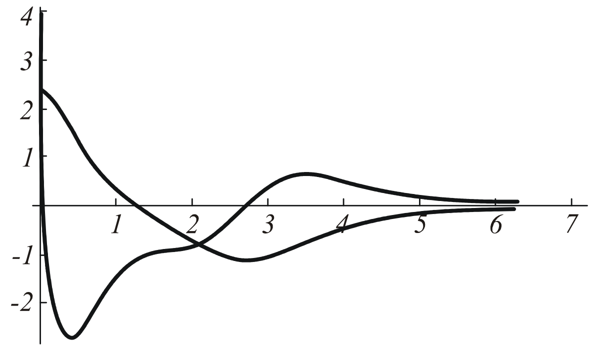

Рис. 2

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, правительства Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE, REC N 14).

Заключение

Найдены в аналитической форме гладкие решения нелинейного уравнения Шредингера в виде уединенных волн для случая трех пространственных измерений. Рассмотрено явление оптической самофокусировки.

Литература

1. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов // М.: Наука, 1986.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: «Мир», 1988.
3. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике // М.: «Мир», 1989.
4. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля // М.: «Мир», 1985.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений // М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред // М.: «Наука», 1982.
7. Алименков И.В. Точно решаемые математические модели в нелинейной оптике // Компьютерная оптика. 2005. № 28. С. 45.