ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ НАБОРОМ ЭЛЛИПСОИДОВ

А.Г. Храмов, А.О. Корепанов

Институт систем обработки изображений РАН

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева

Аннотация

В работе рассмотрен подход к анализу геометрических характеристик двух- и трехмерных изображений на основе представления последних набором геометрических примитивов – эллипсоидов. Рассмотрены основные характеристики эллипсоидов в n-мерном аффинном пространстве, определены операция сложения эллипсоидов и их взвешенная сумма.

Введение

Всякое преобразование в обработке изображений направлено на выявление тех или иных свойств изображений. Преобразование Фурье, например, выявляет частотные характеристики изображений, представление изображения в виде векторного поля позволяет проанализировать дифференциальные свойства первого порядка. В работе рассмотрен подход к выявлению и анализу геометрических характеристик двух- и трехмерных изображений на основе представления последних набором геометрических примитивов – эллипсоидов.

Подход к построению представлений двумерных форм в виде набора аппроксимирующих геометрических примитивов предложен в работе [4]. Развитие такого подхода в сочетании с методами рекурсивной декомпозиции образов на сегменты предложено в работах [3], посвященных разработке древовидных инвариантных представлений образов геометрическими примитивами заданной формы. В отличие от перечисленных работ вводится арифметика геометрических примитивов, рассматриваются методы фильтрации и интерполяции изображений на основе анализа их геометрических характеристик.

Рассматриваемые представления изображений являются сжатыми описаниями образов с требуемой точностью, которая определяется заданной допустимой погрешностью аппроксимации сегментов примитивами, что делает такой подход приемлемым для обработки изображений со структурной избыточностью [6].

В работе рассмотрены основные характеристики эллипсоидов в n-мерном аффинном пространстве, определена операция сложения эллипсоидов и их взвешенная сумма. За рамками работы остались методы представления изображений набором эллипсоидов, а также интерпретация и анализ мнимых эллипсоидов.

Характеристики эллипсоидов в n-мерном аффинном пространстве

Пусть A – n -мерное аффинное пространство, ассоциированное с вещественным векторным пространством V. Определим прямоугольную систему координат $\left\{\dot{o}, e_1, \dots e_n\right\}$, $\dot{o} \in A$, $e_i \in V$. Квадрика вида

$$E\left(Q\right) = \left\{\dot{p} \in A : Q\left(\dot{p}\right) = 0\right\} \quad (1)$$

где $Q\left(x\right) = x^T B x + b^T x + c$ – аффинно-квадратичная функция, B – положительно, либо отрицательно определенная матрица квадратичной формы, b – вектор, $c \in \mathbf{R}$, определяет один из следующих видов геометрических объектов [1]:

(I) эллипсоид

В этом случае $-c_0^{-1} B$ – положительно определенная матрица, где $c_0 = c - \frac{1}{4} b^T B^{-1} b$. К данному типу отнесем также вырожденный эллипсоид (множество, состоящее из одной точки), получаемый в случае, когда B – положительно определенная матрица и $c_0 = 0$.

(II) мнимый эллипсоид

В этом случае $-c_0^{-1} B$ – отрицательно определенная матрица. К данному типу отнесем также вырожденный эллипсоид, получаемый в случае, когда B – отрицательно определенная матрица и $c_0 = 0$.

(III) множество точек аффинного пространства A, которое может быть получено из (1) в случае, когда все коэффициенты аффинно-квадратичной функции равны нулю $E\left(0\right)$.

(IV) пустое множество ι, которое получается из (1) при $B = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$.

Далее будем рассматривать множество E^n, элементами которого являются квадрики указанного вида в n-мерном аффинном пространстве. Определим операцию сложения элементов множества E^n. Рассмотрим множество эллипсоидов $\left\{E\left(Q^m\right)\right\}_{m=\overline{1,M}} \subset E^n$ и запишем формальную сумму вида

$$E\left(Q_\Sigma\right) = E\left(\sum_{m=1}^{M} Q^m = 0\right) \quad (2)$$

которая в нашем случае имеет смысл только, если $E\left(Q_\Sigma\right) \subset E^n$, что определяется видом функций Q^m. Ясно, что рассмотренное множество E^n является незамкнутым относительно рассматриваемой операции сложения (2).

В случае, когда выражение (2) имеет смысл, будем называть его суммой элементов пространства E^n. Следует отметить, что элемент III типа играет роль нулевого элемента относительно операции сложения (2). Рассмотренная операция сложения, в случае, когда выражение (2) имеет смысл, является коммутативной и ассоциативной.

Утверждение 1. Пусть имеется пара эллипсоидов I типа (II типа) $E(Q_i)$, $Q_i = (x - r_1)^T B_1 (x - r_1) + c_1$, $i = 1, 2$. Результатом сложения пары эллипсоидов является: эллипсоид I типа (соответственно, II типа), если его центр g, определяемый выражением $g^T = (r_1^T B_1 + r_2^T B_2)(B_1 + B_2)^{-1}$, принадлежит множеству решений системы $\begin{cases} Q_1 \le 0 \\ Q_2 \le 0 \end{cases}$ (то есть лежит в пересечении внутренностей и граничных точек слагаемых эллипсоидов). Эллипсоид II типа (соответственно, I типа), если его центр g принадлежит множеству решений системы $\begin{cases} Q_1 > 0 \\ Q_2 > 0 \end{cases}$. Примеры суммы пар и троек эллипсоидов в двумерном случае представлены на рис. 1 (результирующий эллипсоид показан темным цветом).

Очевидно, что само по себе умножение эллипсоида на произвольное неотрицательное число $\alpha E(Q) = E(\alpha Q)$, $\alpha \ge 0$ не имеет смысла, однако можно записать вполне осмысленное выражение

$$E(Q_\Sigma) = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m E(Q^m) = E\left(\sum_{m=1}^{M} \alpha_m Q^m\right) \qquad (3)$$

для $\forall \alpha_k \ge 0$, $k = \overline{1, M}$, которое будем называть взвешенной суммой эллипсоидов. Взвешенная сумма аффинно-квадратичных функций имеет очевидный смысл. Примеры взвешенной суммы пары эллипсоидов в двумерном случае приведены на рис. 2. Далее суммой эллипсоидов будем называть именно взвешенную сумму.

Утверждение 2. Пусть имеется пара эллипсоидов I типа (II типа) $E(Q_1)$, $E(Q_2)$, множество Ω точек пересечения внутренностей которых не пусто. Тогда результатом сложения является эллипсоид $E(Q_\Sigma)$ такой, что множество решений неравенства $Q_\Sigma \le 0$ целиком содержит множество Ω. То есть внутренность $E(Q_\Sigma)$ в совокупности с граничными точками содержит множество Ω.

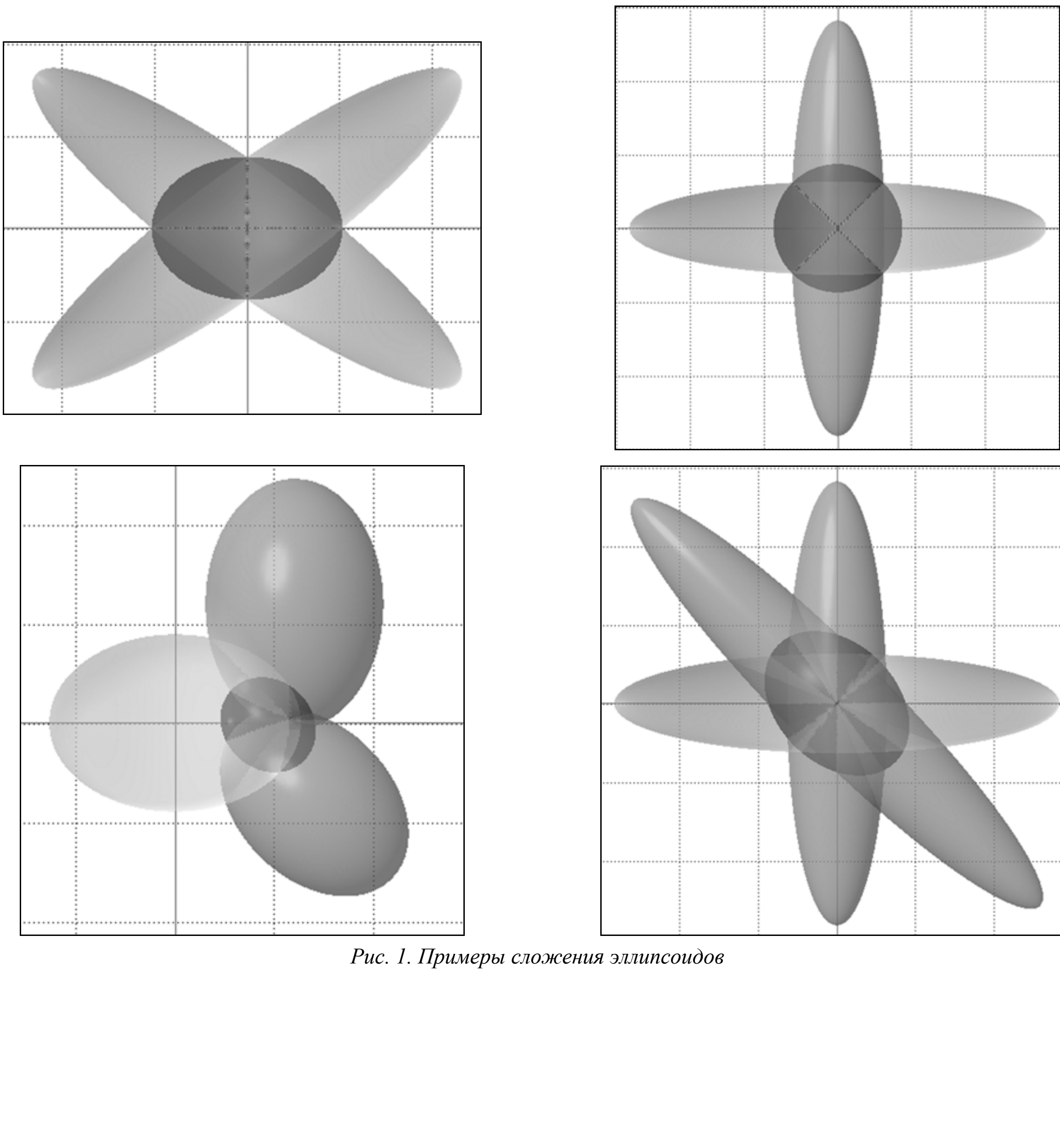
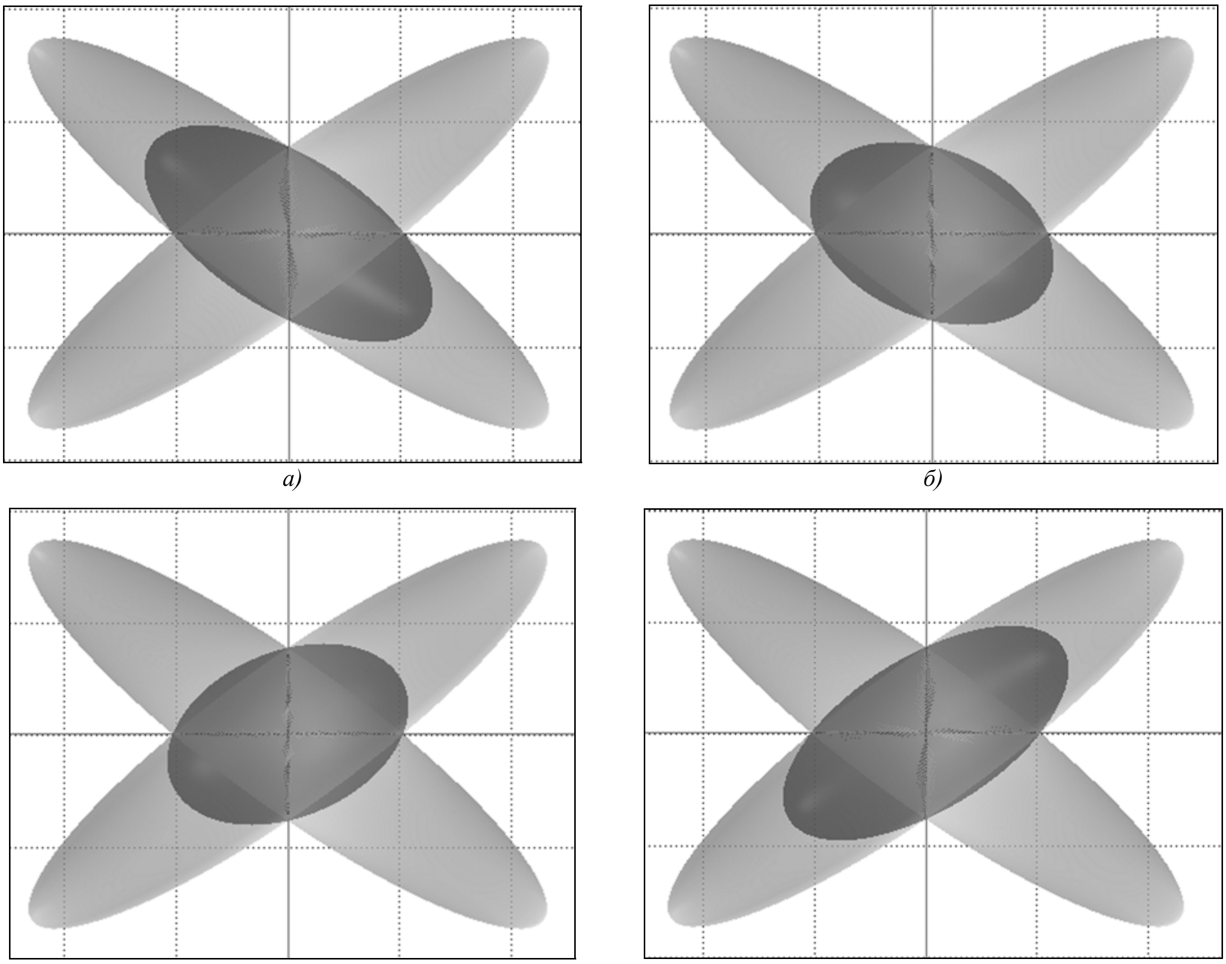


Рис. 1. Примеры сложения эллипсоидов



а) б) в) г)

Рис. 2. Примеры взвешенной суммы эллипсоидов с отношением весов: а) 6:1; б) 2:1; в) 1:2; г) 1:6

Утверждение 3. Пусть имеется пара эллипсоидов I типа (II типа) $E(Q_1)$, $E(Q_2)$ и Ω – множество точек объединения их внутренностей и граничных точек. Тогда результатом сложения является эллипсоид $E(Q_\Sigma)$ такой, что множество решений неравенства $Q_\Sigma \le 0$ целиком содержится во множество Ω.

Представление изображений в виде набора эллипсоидов

Пусть имеется функция $f(x)$, $x = (x_1, ..., x_n) \in D$, где $D \subset \mathbf{R}^\mathbf{n}$ – область определения функции. Положим, что в каждой точке $x \in D$ изображения каким-либо способом определен эллипсоид I типа с центром в данной точке:

$$E(Q(x)) = \left\{ y \in \mathbf{R}^\mathbf{n} : y^T A(x) y - 2b^T(x) x + c(x) = 0 \right\} \quad (4)$$

где $A(x)$ – положительно определенная симметричная матрица, $b^T = x^T A(x)$, $c(x) = x^T A x - 1$. Таким образом, функция f представляется набором эллипсоидов (4). В случае, когда имеется дискретное изображение в выражении (4) изменится лишь то, что x будет принимать дискретные значения.

Эффективный подход к построению представлений двумерных форм на основе их аппроксимации геометрическими примитивами рассмотрен в работах Voss, Suesse [4]. Различные методы древовидных инвариантных представлений образов геометрическими примитивами заданной (в том числе и эллиптической) формы предложены в работах Ланге М.М., Ганебных С.Н. [3].

Рассмотренное представление изображений является сжатым описанием образов с требуемой точностью, которая определяется заданной допустимой погрешностью аппроксимации сегментов примитивами. Достоинством такого представления является то, что при обработке и анализе изображений, представленных в виде (4), одновременно учитывается как форма геометрического примитива, так и его пространственное положение.

Фильтрация изображений, представленных набором эллипсоидов

Представление изображений в виде набора эллипсоидов (4) позволяет производить фильтрацию по различным геометрическим характеристикам. В качестве примеров, в работе рассмотрены два вида:

фильтрация множества эллипсоидов по направлениям (аналогично фильтрации поля направлений [5]) и фильтрация по линейному эксцентриситету – в двумерном случае (для выделения протяженных участков изображений).

Для фильтрации множества эллипсоидов по направлению необходимо задать некоторое направление ℓ и для каждого эллипсоида определить главные направления. Приведем квадратичные функции $Q(x)$ к главным осям разложением матриц $A(x)$ по собственным векторам [2]:

$$A(x) = C^T(x) D(x) C(x) \qquad (5)$$

где $D(x)$ – диагональная матрица собственных чисел матрицы $A(x)$, C – матрица, в столбцах которой стоят координаты собственных векторов. За направление $l(x)$ эллипсоида $E(Q(x))$ принимаем собственный вектор, соответствующий минимальному собственному числу (в случае, если таковой имеется). Тогда в результате фильтрации будут оставлены только те эллипсоиды, угловое отклонение направлений которых от ℓ меньше некоторого наперед заданного угла: $\angle(\ell, l(x)) \le \alpha$. На рис. 3 приведены примеры фильтрации стохастического (по пространственному положению) множества эллипсоидов по направлениям в двух- и трехмерном случае ($\alpha = \pi/18$).

Такой вид фильтрации может быть использован при анализе квазипериодических структур (многомерных данных интерферометрии и пр.) для выделения доминирующих направлений. Для фильтрации «вытянутых» эллипсоидов в работе использовалась характеристика, которая в двумерном случае совпадает с линейным эксцентриситетом: $e = \sqrt{1 - \frac{\min_{1 \le i,j \le n}(a_{ij}(x))}{\max_{1 \le i,j \le n}(a_{ij}(x))}}$. На рис. 4 приведены примеры фильтрации в двух- и трехмерном случае со значением e ограниченным как снизу, так и сверху.

Такой вид фильтрации может быть использован для избавления от структурной избыточности при анализе квазипериодических структур, а также изображений протяженных (например, древовидных) объектов для отделения точек объекта (с показателем e близким к 1) от объектов другой природы.

Совмещение перечисленных видов фильтрации позволяет производить фильтрацию по направлениям объектов с определенными геометрическими характеристиками, например, интерферометрических полос определенной толщины.

В общем случае для анализа и обработки множества эллипсоидов нужно использовать все собственные числа и собственные векторы, получаемые при разложении (5), что существенно повышает возможности анализа изображений по сравнению, например, с анализом векторных полей. Однако платой за это является существенное повышения сложности представления изображения в виде набора геометрических примитивов.

Интерполяция формы объектов на изображении

Пусть по изображению построено некоторое опорное множество эллипсоидов $\left\{E(Q^m)_{m=\overline{1,M}}\right\}$ I типа, соответствующих некоторому геометрическому объекту на изображении. Тогда по заданному набору эллипсоидов могут быть получены эллипсоиды в промежуточных точках изображения посредством определения всевозможных взвешенных сумм вида:

$$E(Q(s)) = \sum_{m=1}^{M} s_m E(Q^m),$$

где $s = (s_1, ..., s_M)$, $s_m \in (0,1]$ – вектор весов, при условии, что рассматриваются только эллипсоиды I типа.

Заключение

В работе рассмотрены:

– подход к выявлению и анализу геометрических характеристик двух- и трехмерных изображений на основе их представления набором геометрических примитивов – эллипсоидов;

– основные характеристики эллипсоидов в n-мерном аффинном пространстве;

– определена операция сложения эллипсоидов и их взвешенная сумма;

– некоторые методы фильтрации множеств эллипсоидов.

Предложенный подход является эффективным:

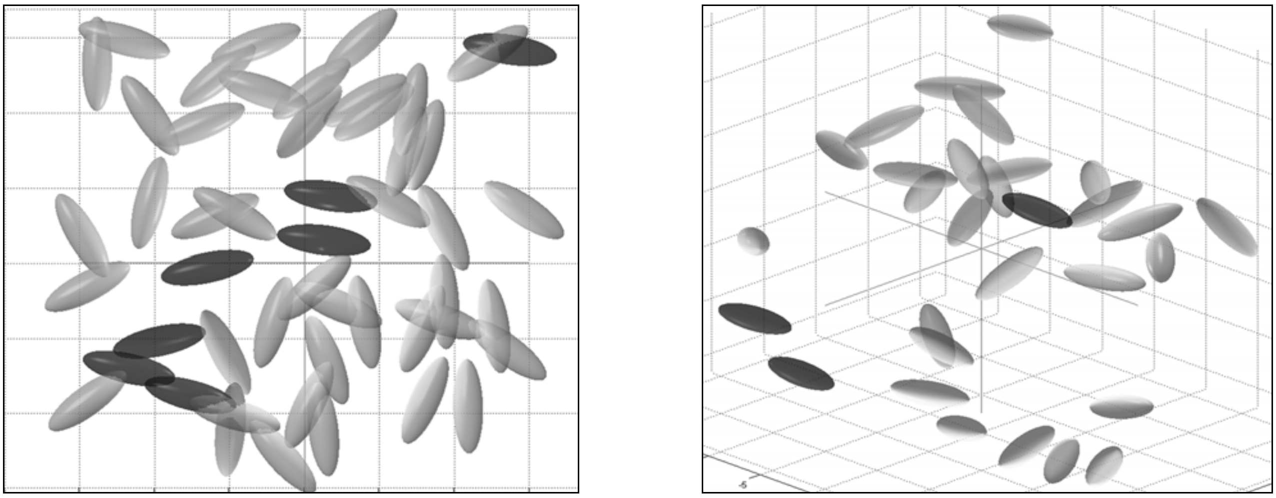
– при анализе геометрической формы протяженных объектов (например, древовидных);

– при анализе квазипериодических структур.

Данный подход к интерпретации изображений обладает большими возможностями для анализа изображений по сравнению, например, с анализом векторных полей и полей направлений, что особенно заметно в многомерном случае. Однако платой за это является существенное повышения сложности представления изображения в виде набора геометрических примитивов.

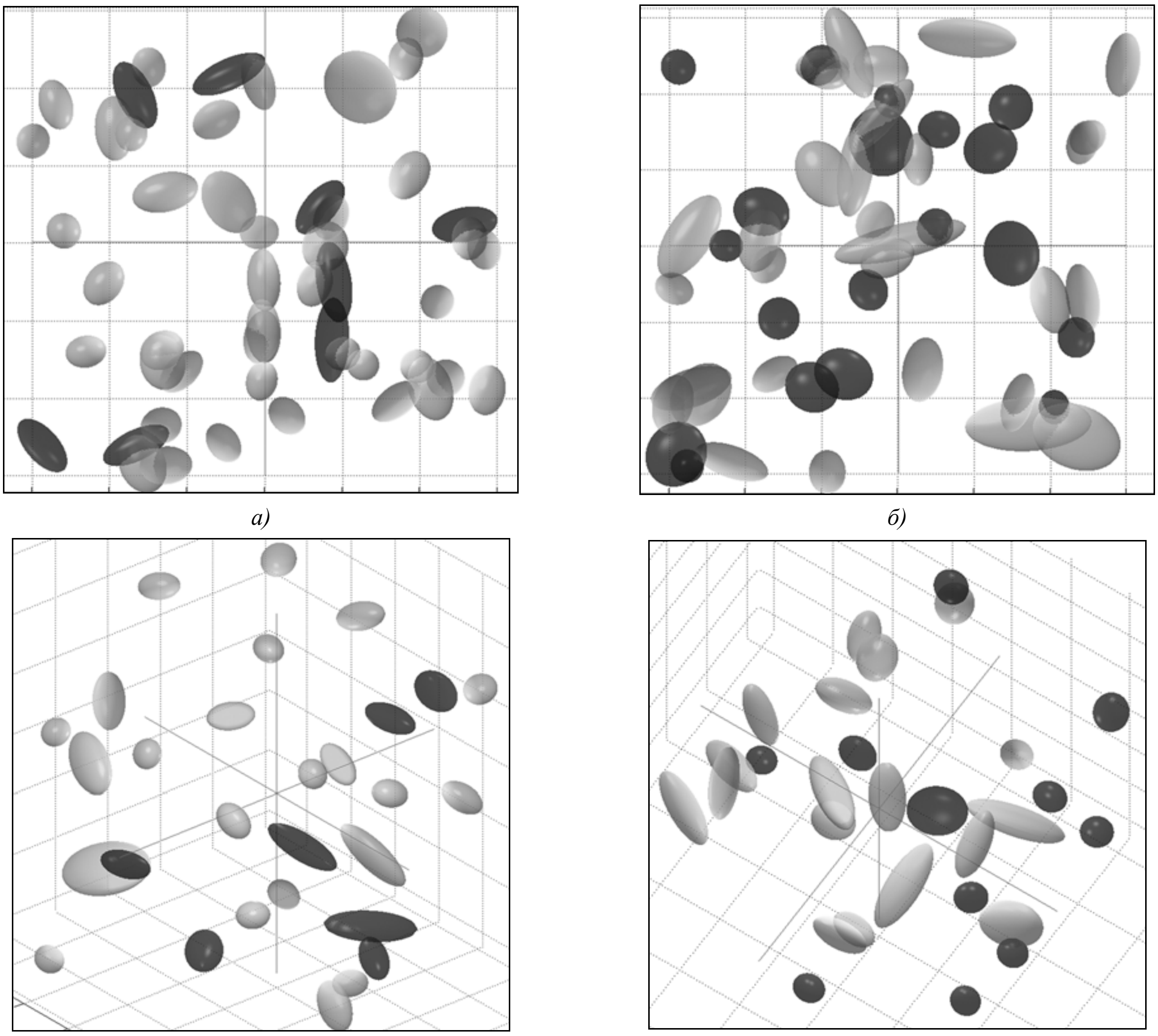
Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, правительства Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), а также при поддержке гранта Президента РФ № НШ-1007.2003.01 и грантов РФФИ № 03-01-00642 и № 05-01-08020.



а) б)

Рис. 3. Примеры фильтрации множества эллипсоидов: а) в двумерном, направляющий вектор $\ell = (1,0)$ *и б) трехмерном случае, направляющий вектор* $\ell = (1,0,0)$



а) б) в) г)

Рис. 4. Примеры фильтрации множества эллипсоидов в двумерном случае: а) $e > 0{,}85$ *; б)* $e < 0{,}5$ *; в трехмерном случае в)* $e > 0{,}9$ *; г)* $e < 0{,}35$

Литература

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры // М.: Факториал пресс, 2002, 544 с.
2. Кострикин А.Э. Введение в алгебру. Часть II. Основы алгебры: Учебник для вузов // М.: Физико-математическая литература, 2001, 369с.
3. Lange M.M., Ganebnykh S.N. Tree-like Data Structures for Effective Recognition of 2-D Solids // IEEE Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition (ICPR- 2004). Cambridge, UK, 2004. Vol. 1. P. 592-595.
4. Voss K., Suesse H. Invariant Fitting of Planar Objects by Primitives // IEEE Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition. ICPR-1996. P. 508-512.
5. Soifer V.A., Khramov A.G., Korepanov A.O. Fuzzy Direction Field Method for Fringe and Tree-like Patterns Analysis // IEEE Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition (ICPR- 2004). Cambridge, UK, 2004. Vol. 2. P. 779-782.
6. Soifer V.A., Kotlyar V.V., Khonina S.N., Khramov A.G., The Method of the Directional Field in the Interpretation and Recognition of the Images with Structure Redundancy // Pattern Recognition and Image Analysis, 1996. Vol. 6. No. 4. P. 710-724.