ПРИМЕНЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРАЗДЕЛИМЫХ ХААРО-ПОДОБНЫХ ВЕЙВЛЕТОВ

А.М. Белов

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева
Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

В работе обобщается способ построения хааро-подобного (Haar-type) ортонормального вейвлет-базиса над $L^2(\mathrm{R}^n)$ на основе характеристических функций фундаментальных областей систем счислений. В прототипной работе построение Хааро-подобного вейвлет-базиса основывалось на существовании позиционной системы счисления в кольце целых гауссовых чисел. В настоящей работе рассмотрено построение Хааро-подобного вейвлет-базиса над $L^2(\mathrm{R}^2)$ ассоциированных с каноническими системами счисления в других квадратичных полях.

Введение

В настоящее время вейвлет-преобразование нашло широкое применение в обработке изображений, особенно в задачах компрессии цифровых изображений. Большинство вейвлетов, используемых в обработке изображений являются разделимыми, что влечет появление различных артефактов на изображении, включая блочные и линейные, к которым глаз человека особенно чувствителен [1]. В связи с этим, возникает вопрос о необходимости, разработки методики построения неразделимых вейвлет базисов.

В работе [2] был рассмотрен вопрос о конструировании многомерных неразделимых аналогов базиса Хаара. Такой вейвлет был определен, как вейвлет-базис над $L^2(\mathrm{R}^n)$ с компактным носителем, соответствующий кратномасштабному анализу, порожденному масштабирующей функцией вида, где $\chi_Q(x)$ характеристическая (индикаторная) функция компактного множества Q:

$$\chi_Q(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q, \\ 0 & x \notin Q. \end{cases}$$

В этой же работе показано, что такой вейвлет-базис над $L^2(\mathrm{R}^n)$ может быть построен на основе характеристической функции $\chi_Q(x)$ компактного множества Q, только тогда, когда Q – интегральное самоподобное покрытие R^n с единичной мерой Лебега.

Построение таких преобразований, а именно отыскание масштабирующей функции является довольно сложной задачей, что затрудняет использование этого метода. В работах [1], [3] был предложен эффективный и простой метод построения таких вейвлет-базисов над $L^2(\mathrm{R}^2)$ с использованием результатов теории канонических систем счисления (КСС). В этой работе была рассмотрена возможность построения таких вейвлет-базисов, только для систем счисления, основаниями которых являются целые Гауссовы числа.

В настоящей работе представлено обобщение метода построения неразделимых Хааро-подобных вейвлет-преобразований для всех мнимых квадратичных полей, в которых существуют позиционные системы счисления.

Структура статьи следующая. В разделе 2 будут даны необходимые определения из теорий кратномасштабного анализа [2] (КМА). В разделе 3 представлены сведения из теории канонических систем счисления. Далее, в разделе 4 приведено теоретическое обоснование предложенного обобщения метода построения неразделимых вейвлет-преобразований. Методика построения неразделимых хааро-подобных вейвлет-базисов для произвольной системы счисления приведена в разделе 5. В разделе 6 приведены примеры.

2. Некоторые определения из теории кратномасштабного анализа

Определение 1: Линейное преобразование A, определенное на множестве R^n, является допустимым растяжением для решетки $\Gamma = \mathrm{Z}^2$ на множестве R^n если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $A\mathrm{Z}^2 \subset \mathrm{Z}^2$, где $A\Gamma = \left\{ y : y = Ax, x \in \mathrm{Z}^2 \right\}$;
2) Для всех собственных чисел λ_i преобразование выполняется $|\lambda_i| > 1$.

Другими словами, матрица преобразования A должна быть целочисленной матрицей расширяющего преобразования.

Определение 2: Вейвлет-базис B, связанный с матрицей допустимого растяжения A, это семейство функций, из $L^2(\mathrm{R}^2)$, членами которого являются A – растяжения и Z^n – сдвиги конечного ортонормированного множества

$$S = \{\psi^1 \dots \psi^m\} \subset L^2(\mathrm{R}^n), \text{ где } m \in \mathrm{N}^+.$$

3. Канонические системы счисления в квадратичных полях

Пусть $\mathrm{Q}(\sqrt{d})$ есть квадратичное поле $\mathrm{Q}(\sqrt{d}) = \left\{ z = a + b\sqrt{d}; a, b \in \mathrm{Q} \right\}$, $d \in \mathrm{Z}$, свободно от квадратов. В работе будем рассматривать мнимые квадратичные поля, т.е. $d \le -1$.

Определение 3: Если для элемента $z = a + b\sqrt{d} \in Q(\sqrt{d})$ норма и след – целые числа:

$$Norm(z) = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = \\ = a^2 - db^2 \in Z, \quad (1)$$

$$Tr(z) = (a + b\sqrt{d}) + (a - b\sqrt{d}) = 2a \in Z, \quad (2)$$

то элемент называется целым алгебраическим числом поля $Q(\sqrt{d})$. Целое алгебраическое число $z = a + b\sqrt{d}$ называется целым Гауссовым числом, если $a \in Z$ и $b \in Z$.

В работах [5], [6] введено понятие канонической системы счисления в кольце $S(\sqrt{d})$ целых элементов поля $Q(\sqrt{d})$.

Определение 4: Целое алгебраическое число называется основанием канонической системы счисления в кольце целых поля $Q(\sqrt{d})$, если любой целый элемент поля однозначно представим в форме конечной суммы:

$$z = \sum_{j=0}^{k(z)} z_j \alpha^j, \quad z_j \in D = \left\{0, 1, \ldots, \left|Norm(\alpha)\right| - 1\right\}.$$

Определение 5: Пара (α, D) называется канонической системой счисления в кольце $S(\sqrt{d})$ целых поля $Q(\sqrt{d})$.

Иногда для представления некоторого числа z в КСС (α, D) используют, так называемую позиционную запись: $z = (z_{k(z)}, z_{k(z)-1} \ldots z_0)_\alpha$, где $z_j \in D$.

Лемма 1: Пусть D – множество цифр некоторой КСС в кольце $S(\sqrt{d})$ целых элементов поля $Q(\sqrt{d})$, α – ее основание, тогда D – полная система вычетов по модулю α для кольца $S(\sqrt{d})$ и содержит $Norm(\alpha)$ элементов.

Доказательство: Согласно определению КСС, любое число представимо в форме $z = \sum_{j=0}^{t} a_j \alpha^j, a_j \in D$, тогда $z \equiv a_0 \bmod(\alpha)$, следовательно, множество D является системой вычетов по модулю α. Покажем, что эта система является полной: предположим, что существуют такие $c, d \in D$, такие, что $c \neq d$ но $c \equiv d \bmod(\alpha)$. Возьмем $e = \sum_{j=0}^{t} a_j \alpha^j, a_j \in D$, такое, что $c - d = e\alpha$, тогда $(c)_\alpha$ и $(a_t \ldots a_0 d)_\alpha$ – две различные записи числа c в позиционной КСС, что противоречит однозначности представления чисел в системе счисления.

Лемма 2: Пусть (α, D) – КСС в кольце $S(\sqrt{d})$, ее основание – число $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $a, b \in Q$ а множество $D = \left\{d_0, d_1, d_2 \ldots d_{|Norm(\alpha)|-1}\right\}$ – набор цифр, тогда:

a) матрица умножения $A = \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix}$ произвольного числа $z \in S(\sqrt{d})$ на основание системы счисления α будет являться матрицей допустимого растяжения для Z^2, либо сводится к таковой умножением на 2;

b) множество $K = \left\{k_0, k_1 \ldots k_{|Norm(\alpha)|-1}\right\}$, состоящее из $Norm(\alpha)$ элементов и построенное по правилу $k_l = d_l$, будет полной системой вычетов для множества классов эквивалентности Z^2 / AZ^2.

Доказательство:

а) Покажем, что элементы матрицы A целые числа. Пусть $d \equiv 2, 3 \bmod(4)$, тогда из (1) и (2) следует что $a \in Z$. Перепишем (1) в виде $b^2 d = Norm(\alpha) - a^2$, здесь правая часть – целое число, следовательно, левая часть также должна быть целым числом. Так как $b \in Q$, то $b = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N$. Переписав равенство, получим $\frac{m^2}{n^2} d = Norm(\alpha) - a^2$. Левая часть $\frac{m^2}{n^2} d$ будет целой, только когда $n^2 \mid d$, поскольку, по определению КСС, число d – свободно от квадратов, то единственно возможный случай: $n = 1$. Тогда $b = \frac{m}{1} = m, m \in Z$.

Пусть $d \equiv 1 \bmod(4)$, тогда из (1) и (2) следует, что $2a \in Z$. Перепишем (1) в виде $4b^2 d = 4Norm(\alpha) - 4a^2$, здесь правая часть – целое число, следовательно, левая часть также должна быть целым числом. Так как $b \in Q$, то $b = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N$. Переписав равенство, получим $4\frac{m^2}{n^2} d = 4Norm(\alpha) - 4a^2$. Левая часть $4\frac{m^2}{n^2} d$ будет целой, только когда $n^2 \mid 4d$, поскольку по определению КСС число d - свободно от квадратов, то возможны только два случая: $n = 1$, тогда $b = \frac{m}{1} = m, m \in Z$ и $n = 2$, тогда $b = \frac{m}{2}, m \in Z$.

Для обоих рассмотренных случаев матрица A – либо целочисленная, либо сводится к таковой умножением всех элементов на два.

Покажем, что матрица A – матрица расширяющего преобразования. Рассмотрим

$\det(A) = a^2 - b^2 d = Norm(\alpha) \geq 2$. Собственные значения матрицы определяются из уравнения

$$0 = \det(A - \lambda I) = (a-\lambda)^2 - b^2 d =$$

$$= (\lambda - (a + b\sqrt{d}))(\lambda - (a - b\sqrt{d}))$$

и равны $\lambda = a \pm b\sqrt{d}$. Так как $Norm(\alpha) \geq 2$, то $|\lambda| = |a \pm b\sqrt{d}| > 1$. Нетрудно видеть, что для матрицы $A' = 2A$, это неравенство также справедливо, т.к. для этого случая $\lambda = 2(a \pm b\sqrt{d})$ и, следовательно, $|\lambda| > 1$.

Таким образом, матрица A – целочисленная матрица расширяющего преобразования, следовательно, является матрицей допустимого растяжения согласно ***определению 1***.

b) Покажем, что K будет полной системой вычетов для множества классов эквивалентности Z^2 / AZ^2. Пусть $\nu = (x, y)^T \in Z^2$, где T – символ транспонирования, тогда $z = x + y\sqrt{d} \in S(\sqrt{d})$. Так как (α, D) – КСС, то D – полная система вычетов для множества $S(\sqrt{d}) / \alpha S(\sqrt{d})$, согласно ***лемме 1***. Тогда существует единственное $d_l \in D$, такое, что, $z = m\alpha + d_l$ для некоторого $m = s + t\sqrt{d} \in S(\sqrt{d})$, поэтому $\nu = A(s,t)^T + k_l$, $k_l \in K$ и число k_l уникально. Если это не выполняется, то должен существовать элемент $d_p \in D, d_p \neq d_l$, такой, что $z = n\alpha + d_p$, для некоторого $n \in S(\sqrt{d})$, что противоречит однозначности представления z в системе счисления (α, D).

Пусть задана система счисления (α, D), тогда произвольное комплексное число $z \in C$ будет иметь вид [7]:

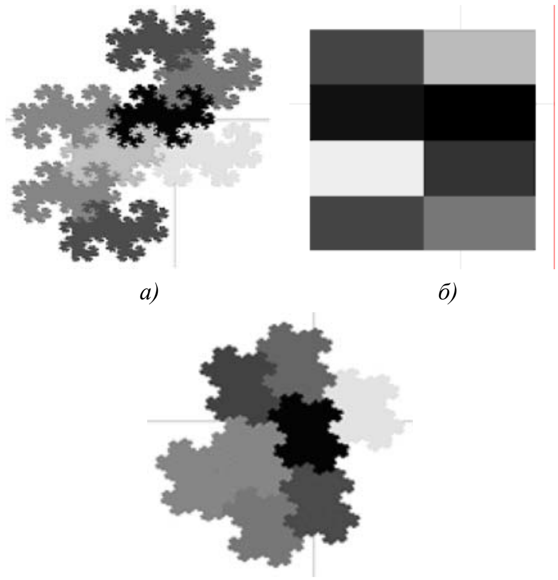
$$z = \sum_{j=0}^{k(z)} z_j \alpha^j + \sum_{j=-\infty}^{-1} z_j \alpha^j, \; z_j \in D,$$

где первой сумме соответствует целая часть z, а второй – дробная часть z.

Определение 6: Фундаментальной областью $T(\alpha, D) \in C$ КСС (α, D) в кольце $S(\sqrt{d})$ целых элементов поля $Q(\sqrt{d})$, назовем множество комплексных чисел с нулевой целой частью, т.е:

$$T(\alpha, D) = \sum_{j=-\infty}^{-1} d_j \alpha^j, d_j \in D.$$

Так, например, в кольцах $S(\sqrt{-1})$, $S(\sqrt{-2})$, $S(\sqrt{-7})$ существуют бинарные системы счисления, основания которых, соответственно: $\alpha = -1 + i$, $\alpha = i\sqrt{2}$ и $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$. Фундаментальные области этих систем счисления представлены на рис. 1.



а) *б)* *в)*

Рис. 1. Фундаментальные области, бинарных канонических систем счисления:
а) $\alpha = -1 + i$ *б)* $\alpha = i\sqrt{2}$ *в)* $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$

Покажем, что фундаментальные области КСС образуют непересекающееся самоподобное покрытие комплексной плоскости:

Теорема 1: Пусть пара (α, D) КСС - в кольце $S(\sqrt{d})$ целых элементов поля $Q(\sqrt{d})$, тогда сдвиги фундаментальной области $T(\alpha, D)$ этой КСС на слагаемое из кольца $S(\sqrt{d})$, образуют непересекающееся покрытие комплексной плоскости C, т.е. выполняется следующее:

$$C = \bigcup_{s \in S(\sqrt{d})} (T(\alpha, D) + s)$$

$$(T(\alpha, D) + s_1) \bigcap (T(\alpha, D) + s_2) = \varnothing,$$

$$s_1 \neq s_2, \quad s_1, s_2 \in S(\sqrt{d}).$$

Доказательство*:* Любое число $z \in C$ представимо в КСС (α, D) в виде бесконечной суммы и может быть представлено в виде $z = \sum_{j=0}^{k(z)} z_j \alpha^j + T(\alpha, D), z_j \in D$. Следовательно, варьируя целую часть $\sum_{j=0}^{k(z)} z_j \alpha^j, z_j \in D$, можем покрыть сдвигами фундаментальной области $T(\alpha, D)$ всю комплексную плоскость C. Поскольку $\sum_{j=0}^{k(z)} z_j \alpha^j, z_j \in D$ есть запись целого числа $s \in S(\sqrt{d})$, получим, что $T(\alpha, D)$ покрывает комплексную плоскость C посредством сдвигов на слагаемое из $S(\sqrt{d})$. Исходя из единственности представления числа $z \in \mathrm{C}$ в КСС (α, D), можем утверждать, что фундаментальные области не пересекаются, т.к. предположение обратного приводит к противоречию.

4. Теоретическое обоснование обобщения метода построения неразделимого вейвлет-преобразования

1) В работе [3] сформулированы следующие три теоремы, которые можно рассматривать как критерии построения КМА, ассоциированного с парой (Z^n, A):

Теорема 2: [3] Пусть A допустимое растяжение для Z^n и Q – измеримое подмножество R^n. Тогда функция $\phi = |Q|^{-1}\chi_Q$ является масштабирующей функцией КМА ассоциированного с парой (Z^n, A), и только если выполняются условия:

1) Q покрывает R^n посредством целочисленных сдвигов;
2) $AQ = \bigcup_{k \in K}(Q+k)$ для некоторой полной системы вычетов K для $\mathrm{Z}^n / A\mathrm{Z}^n$;

Теорема 3:[3] Пусть K – полная система вычетов для множества классов эквивалентности $\mathrm{Z}^n / A\mathrm{Z}^n$. Тогда любое интегрируемое решение уравнения $\phi(x) = \sum_{k \in K}\phi(Ax-k)$ единственно вплоть до умножения на константу и имеет носитель в компактном множестве вида

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} A^{-i}k_i : \quad k_i \in K \right\}.$$

Теорема 4: [3] Пусть A допустимое растяжение для Z^n и $Q \subset \mathrm{R}^n$. Тогда функция $\phi = \chi_Q$ является масштабирующей функцией КМА, ассоциированного с парой (Z^n, A) тогда и только тогда, когда $|Q| = 1$ и Q имеет вид данный в ***теореме 3*** для некоторой полной системы вычетов множества классов эквивалентности $\mathrm{Z}^n / A\mathrm{Z}^n$.

С учетом этих критериев сформулируем и докажем основную теорему:

Теорема 5: Пусть задан КСС (α, D), ее основание $\alpha = a + b\sqrt{d}$, матрица A определена как $A = \begin{pmatrix} a & -bd \\ b & a \end{pmatrix}$, множество $K = \left\{k_0, k_1 \ldots k_{|Norm(\alpha)|-1}\right\}$, построено по правилу $k_l = d_l \in D$ и множество Q имеет вид $Q = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} A^{-i}k_i : \quad k_i \in K \right\}$, тогда функция является масштабирующей функцией для КМА, ассоциированного с парой (Z^2, A).

Доказательство: Согласно ***лемме 2*** матрица A является допустимым растяжением для Z^2, а множество K – полной системой вычетов для множества классов эквивалентности $\mathrm{Z}^2 / A\mathrm{Z}^2$. Выберем фундаментальную область $T(\alpha, D)$ КСС (α, D) множеством Q, которое является множеством дробных частей и имеет единичную меру Лебега. Его сдвиги образуют непересекающееся покрытие плоскости R^2. Тогда по ***теоремам 2, 3*** и ***4*** следует утверждение.

5. Построение вейвлет-базиса Хааро-подобного вейвлет-преобразования для произвольной КСС

Пусть задана КСС (α, D) и ее основание $\alpha = a + b\sqrt{d}$. Основным этапом построения искомого вейвлет базиса ассоциированного с данной КСС будет формирование матрицы допустимого растяжения A для Z^2. Согласно и ***лемме 2***, искомой матрицей будет матрица умножения произвольного числа $z \in \mathrm{S}(\sqrt{d})$ на основание системы счисления α, которая имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix}, \tag{3}$$

а полной системой вычетов будет множество вида:

$$K = \left\{0, 1, \ldots, |Norm(\alpha)| - 1\right\}, \tag{4}$$

Пусть $|\det A| = q$, тогда, как показано в [2] вейвлет-базис искомого преобразования будет задаваться следующим соотношением:

$$\psi^i = \sum_{j=1}^{q} u_{i+1,j}\phi_{1,k_j}, \tag{5}$$

где $u_{i,j}$ – элементы унитарной матрицы U в которой $u_{1,j} = q^{-1/2}$, $j = 1 \ldots q$, $k_j \in K$ $\phi = \chi_Q$ – характеристическая функция фундаментальной области КСС (α, D).

6. Примеры

Здесь рассмотрим примеры построения матрицы растяжения A и полной системы вычетов K для трех бинарных систем счисления, фундаментальные области которых представлены на рис. 1.

1) $\alpha = -1 + i$, $K = D = \{0, 1\}$, согласно (4), тогда согласно (3), получим $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2) $\alpha = i\sqrt{2}$, $K = D = \{0, 1\}$, согласно (4), тогда, согласно (3), получим $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$, $K = D = \{0,1\}$, согласно (4), тогда, согласно (3), имеем $A = \begin{pmatrix} -1/2 & -7/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, и, проведя нормировку, получим $K' = \{0, 2\}$ и $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Вейвлет-функция, для трех рассмотренных случаев, согласно (5), будет иметь вид:

$$\psi(x) = \chi_Q(Ax - k_1) - \chi_Q(Ax - k_2),$$

где χ_Q – характеристическая функция фундаментальной области, A – матрица допустимого растяжения, k_i – элементы множества K, соответствующих КСС.

Заключение

В работе показано, что метод построения неразделимых хааро-подобных вейвлетов, предложенный в прототипной работе может быть обобщен для всех мнимых квадратичных полей, в которых существуют позиционные системы счисления. Даны практические рекомендации по построению матрицы допустимого растяжения и полной системы вычетов для построения вейвлет-преобразований такого типа. Предложенный подход значительно расширяет класс неразделимых вейвлет опреобразований, и найдет свое применение в задачах компрессии цифровых изображений.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ, Администрации Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), а также при поддержке гранта Президента РФ № НШ-1007.2003.01 и гранта РФФИ № 05-01-96501.

Литература

1. Mendivil F., Piché D. Two Alghoritms for Non-Separable Wavelet Transforms and Applications to Image Compression // Fractals: Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, 1999.
2. Grochenig K., Madych W.R. Multiresolution Analysis, Haar Bases, and Self-Similar Tilings of R^n // IEEE Trans. Inform. Theory, 1992. 38. P. 556-568.
3. Piché D.G. Complex Bases, Number Systems and Their Application to Fractal-Wavelet Image Coding // PhD in Applied Mathematics thesis. Ontario, Canada: University of Waterloo, 2002.
4. Mallat S. Multiresolution analysis and wavelets // Trans. Amer. Math. Soc., 1989. 315. P. 69-88.
5. Katai I., Kovacs B. Canonical number systems in imaginary quadratic fields // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 1981. 37. P. 159-164.
6. Katai I., Szabo J. Canonical number systems for complex integers // Acta Sci. Math.(Szeged), 1975. 37. P. 255-260.
7. Gilbert W. Complex Based Number Systems (Manuscript). Ontario, Canada: University of Waterloo, 2002.