СИНТЕЗ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

В.Х. Багманов, А.Х.Султанов

Уфимский государственный авиационный технический университет

Аннотация

Рассматриваются методологические подходы к построению оптимальных фильтров для оценки сигналов на фоне помех, имеющих стохастическую масштабно-инвариантную структуру. Предлагаемые подходы могут быть использованы при обработке спутниковых изображений.

Введение

Одним из подходов к обработке изображений является подход, основанный на преобразовании изображений (двумерных сигналов) в одномерные сигналы с помощью рекурсивных квазинепрерывных разверток типа Пеано-Гильберта [1]. В ряде работ [2, 3, 4] показано, что существует класс изображений, имеющих стохастическую фрактальную (масштабно-инвариантную) структуру. К данному типу изображений относятся в частности спутниковые изображения земных ландшафтов и их одномерные аналоги – развертки.

Целью данной работы является разработка методологических подходов к синтезу оптимальных фильтров для обнаружения и оценки сигналов на фоне помех со стохастической фрактальной структурой.

1. Фильтр на основе приближения Кирквуда

Рассмотрим постановку задачи, связанной с оценкой и обнаружением сигналов на случайном фоне.

Пусть задана развертка изображения в виде совокупности дискретных значений $\{z_n\}, n = \overline{1, N}$, являющихся адаптивной смесью сигнала S_n и шума ξ_n:

$$z_n = \xi_n + s_n \tag{1}$$

Оптимальной оценкой сигнала $\hat{S}_n$ будет оценка

$$\mathrm{E}\,\hat{s}_n = z_n - \hat{\xi}_n \,. \tag{2}$$

Предположим, что заданная последовательность $\{\xi_n\}$, представляющая собой фон, на котором необходимо обнаружить и оценить сигнал S_n, имеет фрактальную структуру. В соответствии с представлением (2), задача оценки неизвестного сигнала сводится к задаче оценки фона. Значение фона ξ_n оценим в условиях, когда считаются известными n-1 предшествующих значений $\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_1$. Оптимальной статистической оценкой $\hat{\xi}_n$ случайной величины ξ_n в данном случае является условное среднее [5]:

$$\hat{\xi}_n = \int \xi_n \, P(\xi_n | \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_1) d\xi_n \,. \tag{3}$$

Квазиоптимальной оценкой по стратегии максимума апостериорной вероятности служит величина

$$\hat{\xi}_n = \arg\max_{\xi_n} \{P(\xi_n | \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_1)\}. \tag{4}$$

В выражениях (3) и (4) $P(\xi_n | \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_1)$ - условная плотность вероятности события ξ_n, при условии, что осуществилась доступная измерению совокупность событий $\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_1$.

Для определения вероятностных характеристик многообразия $\{\xi_n\}$ рассмотрим применение идеи подхода, используемого в статистической физике. А именно, введем в рассмотрение бинарные функции распределения $P(\xi_i \, \xi_j)$ и определим совместную многомерную плотность вероятности событий $\xi_n, \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_1$ в конфигурационном приближении Кирквуда [6]

$$P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = c \cdot \prod_{i=1,\, j=1,\, i>j}^{M} \{P(\xi_i \, \xi_j)\}, \tag{5}$$

где $\prod$ – знак произведения, выполняемого по всевозможным бинарным связям $i \to j, i > j$, общее число которых равно $M = \dfrac{n(n+1)}{2}$, с – константа, обеспечивающая условие нормировки

$$\int P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n = 1 \,. \tag{6}$$

Используя приближение (5), определим условную плотность вероятности на основании теоремы Байеса:

$$P(\xi_n | \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_1) = \frac{P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})}.$$

В результате найдем

$$P(\xi_n | \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_1) = a \cdot \prod_{i=1}^{n-1} P(\xi_n \xi_i). \tag{7}$$

Здесь a – постоянная нормировки.

Выразив в (7) совместные бинарные плотности вероятностей через условные $P(\xi_i | \xi_j)$,

$$P(\xi_i \, \xi_j) = P(\xi_i | \xi_j) P(\xi_i), \tag{8}$$

где $P(\xi_i)$ – плотность вероятности случайной величины ξ, с учетом условия нормировки

$$\mathrm{E}\int P\left(\xi_n \middle| \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_1\right) d\xi_n = 1,$$

получим следующее выражение для постоянной a

$$a = \left[\prod_{i=1}^{n} P(\xi_i)\right]^{-1}. \tag{9}$$

Из соотношений (7), (8), (9) следует

$$P\left(\xi_n \middle| \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_1\right) = \prod_{i=1}^{n-1} P\left(\xi_n \middle| \xi_i\right). \tag{10}$$

Как показано в работах [1, 4], разности $(\xi_i - \xi_j)$ для широкого класса изображений подчиняются Гауссовскому распределению:

$$\omega\left(\xi_i - \xi_j\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} \exp\left\{-\frac{\left(\xi_i - \xi_j\right)^2}{2\sigma_{ij}^2}\right\}. \tag{11}$$

В случае фрактального процесса дисперсии σ_{ij}^2, удовлетворяют скейлинговому соотношению [7]

$$\sigma_{ij}^2 = \sigma_0^2 (i - j)^{2H}, \tag{12}$$

где H – показатель Херста, определяющий фрактальную природу изображения, σ_0^2 – дисперсия разностей соседних элементов развертки. Вопросы, связанные с практическим определением показателя Херста H для изображений, рассматривались в работах [3, 4], как правило, этот показатель для спутниковых изображений изменяется в диапазоне 0,6 ÷ 0,7.

В силу выполнения условий нормировки

$$\int \omega\left(\xi_i - \xi_j\right) d\xi_i = 1,$$

$$\int \omega\left(\xi_i - \xi_j\right) d\xi_j = 1,$$

при фиксированных значениях ξ_j можно положить

$$P\left(\xi_i \middle| \xi_j\right) = \omega\left(\xi_i - \xi_j\right)$$

и представить условную плотность вероятности (7) в форме

$$P\left(\xi_n \middle| \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_1\right) = \prod_{i=1}^{n-1} \omega\left(\xi_n - \xi_i\right). \tag{13}$$

Используя соотношения (11), (12), (13) и вычислив интеграл (3), для решения экстремальной задачи (4) можно найти, что оптимальная статистическая оценка случайной величины ξ_n в данном случае совпадает с квазиоптимальной оценкой по максимуму апостериорной вероятности (4) и равна

$$\hat{\xi}_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{k^{2H}}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2H}}\right)^{-1}. \tag{14}$$

В случае бесконечного числа наблюдений $n = \infty$, оптимальная оценка будет определяется соотношением:

$$\hat{\xi}_\infty = \frac{1}{\zeta(2H)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k^{2H}}, \tag{15}$$

где $\zeta(z)$ – дзета-функция Римана [8].

Фрактальные фильтры, задаваемые выражениями (14) и (15), могут быть применены не только для разверток изображений, но и непосредственно к самим изображениям. В этом случае фильтр будет иметь, следующий вид:

$$\hat{\xi}_n = \left(\sum_{k \in M} \frac{\xi_k}{d_{kn}^{2H}}\right) \cdot \left(\sum_{k \in M} \frac{1}{d_{kn}^{2H}}\right)^{-1},$$

где суммирование выполняется по некоторой маске *M*, состоящей из пикселей, окружающих пиксель с номером *n*; d_{kn} – расстояние в Евклидовой метрике от пикселя *n* до пикселя *k*, принадлежащего маске *M*.

2. Фильтры на основе вейвлетных разложений

Рассмотрим более общий подход к решению задачи оценки сигнала на случайном фоне с фрактальной структурой.

Пусть $\xi(t)$ – случайная функция, описывающая развертку изображения (случайный фон). Предположим, что $\xi(t)$ – фрактальная функция и, следовательно, допускает представление в форме интеграла по траекториям винеровского случайного процесса $w(t)$:

$$\xi(t) = \int_0^t (t - t')^{H - 1/2} \, dw(t'). \tag{16}$$

Представим $\xi(t)$ в виде вейвлетного разложения

$$\xi(t) = \sum_j \sum_k d_{jk} \, \Psi_{jk}(t), \tag{17}$$

где $\Psi_{jk}(t)$ – какая-либо система ортогональных вейвлетов [9].

Докажем следующее утверждение: коэффициенты вейвлет-разложения фрактальной функции являются масштабно-инвариантными случайными величинами.

Действительно, согласно [9], коэффициенты вейвлетного разложения определяются соотношением:

$$d_{kj} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) \Psi_{jk}(t) dt, \tag{18}$$

где

$$\Psi_{jk}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi\left(2^j t - k\right). \tag{19}$$

Из (16) и (18) следует

$$d_{kj} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t (t - t')^{H - 1/2} \psi_{jk}(t) dw(t') dt. \tag{20}$$

Произведем в интеграле (20) замену переменных $t = \tau \cdot 2^{-j}, t' = \tau' \cdot 2^{-j}$ и, учитывая масштабные свойства винеровского гауссовского процесса, выражающееся соотношением $dw(at) = a^{\frac{1}{2}} dw(t)$, можно получить представление

$$d_{jk} = 2^{-j\left(H+\frac{1}{2}\right)} \int \xi(\tau) \psi_{0,k}(\tau) d\tau . \qquad (21)$$

Из соотношения (21) следует свойство масштабного самоподобия вейвлет-коэффициентов

$$d_{j,k} = 2^{-j\left(H+\frac{1}{2}\right)} d_{0,k} . \qquad (22)$$

Равенство (22) следует понимать в статистическом смысле, а именно, любые статистические моменты случайной величины d_{jk} на масштабном уровне j масштабно-самоподобны (самоаффинны) и выражаются через соответствующие моменты на некотором исходном масштабном уровне j=0. В частности, для дисперсий, из соотношения (22) следует равенство:

$$\left\langle d_{j,k}^2 \right\rangle = \frac{\left\langle d_{0,k}^2 \right\rangle}{2^{j(2H+1)}} , \qquad (23)$$

где $\langle \ \rangle$ – знак усреднения по статистическому ансамблю.

Равенство (23) показывает, что при переходе на более детальные уровни, то есть с увеличением j, флуктуации вейвлет-коэффициентов уменьшаются.

Вейвлет-разложение (17) можно трактовать, как разложение случайной функции по системе некоррелирующих случайных процессов $\xi_{j,k}(t)$, определяемых равенством

$$\xi_{j,k}(t) = d_{j,k} \Psi_{j,k}(t) .$$

Некоррелируемость следует из предположения об эргодичности процессов $\xi_{j,k}(t)$ и ортогональности системы вейвлетов $\Psi_{j,k}(t)$. В предположении об эргодичности, можно отождествить усреднение по ансамблю реализаций усреднением по позиционной координате t. В результате, в силу ортогональности системы вейвлетов, получим

$$\left\langle \xi_{j,k}(t) \cdot \xi_{i,m}(t) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Psi_{j,k}(t) \Psi_{i,m}(t) dt \cdot d_{j,k} d_{i,m} =$$
$$= d_{j,k} d_{i,m} \delta_{j,i} \delta_{k,m} .$$

Полагая, что коэффициенты $d_{j,k}$ подчиняются Гауссовскому распределению, для многомерной плотности вероятности системы случайных процессов $\xi_{j,k}(t)$, получим:

$$\omega\left\{\xi_{j,k}(t)\right\} = c \cdot \exp\left\{\left[\sum_j \sum_k \frac{d_{j,k}^2}{2\left\langle d_{j,k}^2 \right\rangle}\right]\right\} , \qquad (24)$$

где с – нормировочная константа.

Как следует из выражения (24), распределение ω не зависит от координаты. Используя данный факт, для оптимальной оценки случайного процесса, не нарушая общности, выберем в качестве исходной точки t=0.

Пусть, как и ранее, множество $\{\xi_n\}, n = \overline{1,N}$ представляет фон с фрактальной структурой. Будем считать, что множество $\{\xi_n\}$ – результат дискретизации процесса $\xi(t)$ на масштабном уровне j=0 и положим $\xi(0) = \xi_n$. Задача состоит в оптимальной оценке $\hat{\xi}(0)$ случайной величины $\xi(0)$ на основе реализовавшихся значений $\{\xi_i\}, i = \overline{1,N-1}$.

Алгоритм оценки состоит в следующем.

1. Инициируем процесс дискретного вейвлет-преобразования, положив

$$\lambda_{0,i} = \xi_i , i = \overline{1,N} .$$

2. Определим совокупность коэффициентов $d_{0,k}$ с помощью преобразования

$$d_{0,k} = \sqrt{2} \sum_m g_{m-k} \lambda_{0,k} ,$$

где $\{g_i\}$ – коэффициенты фильтра, соответствующие выбранной системе вейвлетов $\{\Psi_{j,k}\}$.

3. Произведя статистическую обработку массива $\{d_{0,k}\}, k = \overline{1,N}$, определим дисперсии коэффициентов $d_{0,k}$ равные $\left\langle d_{0,k}^2 \right\rangle$.

4. С помощью масштабного соотношения

$$\left\langle d_{j,k}^2 \right\rangle = 2^{j(2H+1)} \left\langle d_{0,k}^2 \right\rangle, \ j = \overline{1,J} \qquad (25)$$

определим дисперсии на всех оставшихся масштабных уровнях, включая максимально возможный уровень, равный $J \approx \log_2 N$.

Следует заметить, что на масштабном уровне J массив $\{d_{J,k}\}$ составляет единственный элемент, и статистическим методом дисперсию определить невозможно. В этой связи, установленное соотношение (25), играет принципиальную роль и дает возможность находить соответствующие дисперсии.

5. Присваивая оцениваемой величине ξ_n некоторое начальное числовое значение

$$\xi_n = \xi ,$$

произведем быстрое дискретное вейвлет-преобразование, формируя совокупность коэффициентов $\{d_{j,k}\}$ с помощью рекуррентных соотношений

$$\lambda_{j+1,m} = \sqrt{2} \sum_k h_{k-2m} \lambda_{j,k} ,$$

$$d_{j+1,m} = \sqrt{2} \sum_k g_{k-2m} \lambda_{j,k} .$$

6. Определяем квадратичную форму $\Phi(\xi)$, как функцию параметра ξ

$$\Phi(\xi) = \sum_j \sum_k \frac{d_{j,k}^2}{2\langle d_{j,k}^2 \rangle}.$$

7. Решаем экстремальную задачу:

$$\xi^* = \arg\min_{\xi} \Phi(\xi)$$

и находим значение ξ^*, доставляющее минимум квадратичной форме $\Phi(\xi)$.

8. Определяем оптимальную оценку величины $\xi(0)$, положив

$$\hat{\xi}(0) = \xi^*. \quad (26)$$

Оценка (26) является квазиоптимальной в силу того, что она соответствует максимальному значению плотности вероятности $\omega\{\xi_{j,k}\}$, задаваемой соотношением (24).

Заключение

В данной работе излагаются общие подходы к фильтрации сигналов во фрактальных шумах, что является типичной ситуацией при обработке широкого класса изображений, включая спутниковые. Вопросы, связанные с выбором вейвлетных функций, на основе которых синтезируются фильтры остаются открытыми. Задача поиска оптимальных вейвлетных функций связана с характером оцениваемых сигналов и требуют отдельного рассмотрения.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS № 04-77-7198.

Литература

1. Александров Р.В., Горский И.Д. Представление и обработка изображений: Рекурсивный подход // Л.: Наука, 1985. 102 с.
2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы // М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
3. Потапов А.А., Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки // М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
4. Багманов В.Х., Султанов А.Х., Мешков И.К. Экспериментальное исследование масштабно-инвариантной структуры данных спутниковых систем наблюдения // Материалы IV МНТК «Проблемы техники и технологии телекоммуникаций» Уфа. 2005. С. 96-98.
5. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника // М.: Радио и связь. 1982. 624 с.
6. Исихара А. Статистическая физика // М.: Мир. 1973. 471 с.
7. Федер Е. Фракталы // М.: Мир. 1991.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.Л. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений // М.: Наука. 1971. 1108 с.
9. Дремин И.М., Иванов У.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // УФН. 2001. Т.171. №5. С. 465-501.