

АЛГОРИТМЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ СИГНАЛА НА ОСНОВЕ НЕРАЗДЕЛИМЫХ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ХААРА

А.М. Белов^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева, Самара, Россия

Аннотация

В работе рассматриваются два алгоритма декомпозиции сигнала построенные на основе обобщенных неразделимых вейвлет-преобразований Хаара. Особенностью таких вейвлет преобразований является то, что они строятся на фундаментальных областях канонических систем счислений в мнимых квадратичных полях.

Введение

В настоящее время вейвлет-преобразование нашло широкое применение в обработке изображений, особенно в задачах компрессии цифровых изображений. Большинство вейвлетов, используемых в обработке изображений, являются разделимыми, что влечет появление различных артефактов на изображении, включая блочные и линейные, к которым глаз человека особенно чувствителен [1]. В связи с этим возникает вопрос о необходимости разработки методики построения неразделимых вейвлет-базисов.

В работе [2] был рассмотрен вопрос о конструировании многомерных неразделимых аналогов базиса Хаара. Такой вейвлет-базис был определен, как вейвлет-базис над $L^2(\mathbf{R}^n)$ с компактным носителем, соответствующий кратномасштабному анализу, порожденному масштабирующей функцией вида, где $\chi_Q(x)$ – характеристическая (индикаторная) функция компактного множества Q :

$$\chi_Q(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q, \\ 0 & x \notin Q. \end{cases}$$

В этой же работе показано, что такой вейвлет-базис над $L^2(\mathbf{R}^n)$ может быть построен на основе характеристической функции $\chi_Q(x)$ компактного множества Q , тогда и только тогда, когда Q – интегральное самоподобное покрытие \mathbf{R}^n с единичной мерой Лебега.

Построение таких преобразований, а именно, отыскание масштабирующей функции, является довольно сложной задачей, что затрудняет использование этого метода. В работах [1], [3] был предложен метод построения таких вейвлет-базисов над $L^2(\mathbf{R}^2)$ с использованием систем счислений, основаниями которых являются целые Гауссовы числа.

В работе [4] было представлено обобщение метода построения неразделимых двумерных вейвлет-базисов Хаара, которое стало возможным после разработки венгерскими математиками Катаем и Ковачем теории так называемых канонических систем счисления (КСС) в квадратичных полях [5, 6, 7]. В настоящей работе предлагаются алгоритмы деком-

позиции исходного сигнала для таких обобщенных вейвлет-базисов Хаара.

Структура статьи следующая: В разделе 1 приведены необходимые данные из теории КСС. В разделе 2 представлены сведения об обобщенных вейвлет-базисах Хаара. В разделе 3 приведена общая идея алгоритмов декомпозиции сигнала для таких преобразований. Два алгоритма декомпозиции рассмотрены в разделах 4 и 5, соответственно.

1. Канонические системы счисления в квадратичных полях

Пусть $Q(\sqrt{d})$ – квадратичное поле $Q(\sqrt{d}) = \{z = a + b\sqrt{d}; a, b \in \mathbf{Q}\}$, $d \in \mathbf{Z}$, свободное от квадратов. В работе будем рассматривать мнимые квадратичные поля, т.е. $d \leq -1$.

Определение 1: Если для элемента $z = a + b\sqrt{d} \in Q(\sqrt{d})$ норма и след – целые числа:

$$Norm(z) = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2 \in \mathbf{Z},$$

$$Tr(z) = (a + b\sqrt{d}) + (a - b\sqrt{d}) = 2a \in \mathbf{Z},$$

то элемент называется целым алгебраическим числом поля $Q(\sqrt{d})$. Целое алгебраическое число $z = a + b\sqrt{d}$ называется целым Гауссовым числом, если $a \in \mathbf{Z}$ и $b \in \mathbf{Z}$.

В работах [5], [6] введено понятие канонической системы счисления в кольце $S(\sqrt{d})$ целых элементов поля $Q(\sqrt{d})$.

Определение 2: Целое алгебраическое число называется основанием канонической системы счисления в кольце целых поля $Q(\sqrt{d})$, если любой целый элемент поля однозначно представим в форме конечной суммы:

$$z = \sum_{j=0}^{k(z)} z_j \alpha^j, \quad z_j \in D = \{0, 1, \dots, |Norm(\alpha)| - 1\}.$$

Определение 3: Пара (α, D) называется канонической системой счисления в кольце $S(\sqrt{d})$ целых поля $Q(\sqrt{d})$.

Обычно, для представления некоторого числа $z \in S(\sqrt{d})$ в КСС (α, D) используют так называемую позиционную запись этого числа (или адрес числа): $z = (z_{k(z)}, z_{k(z)-1} \dots z_0)_\alpha$, где $z_j \in D$. В работе [7] описаны рекуррентные соотношения, позволяющие получить такое представление произвольного числа $z \in S(\sqrt{d})$ в КСС (α, D) .

Теорема 1: Пусть $d \leq -2$.

(а) При $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ пусть $\alpha = A \pm \sqrt{d}$ является основанием канонической системы счисления в кольце $S(\sqrt{d})$; пусть далее для $z = z_1 + z_2 \sqrt{d} \in S(\sqrt{d})$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ целые рациональные $s_k(z)$ определены рекуррентными соотношениями:

$$s_{k+1}(z) = 2A \left[\frac{s_k(z)}{Norm(\alpha)} \right] - \left[\frac{s_{k-1}(z)}{Norm(\alpha)} \right], k \geq 0,$$

$$s_{-1}(z) = \mp z_2 Norm(\alpha), s_0(z) = z_1 \mp z_2 A.$$

(б) При $d \equiv 1 \pmod{4}$ пусть $\alpha = \frac{1}{2}(B \pm \sqrt{d})$ является основанием канонической системы счисления в кольце $S(\sqrt{d})$; пусть далее для $z = z_1 + \frac{1+\sqrt{d}}{2} z_2 \in S(\sqrt{d})$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ целые рациональные $s_k(z)$ определены рекуррентными соотношениями:

$$s_{k+1}(z) = B \left[\frac{s_k(z)}{Norm(\alpha)} \right] - \left[\frac{s_{k-1}(z)}{Norm(\alpha)} \right], k \geq 0,$$

$$s_{-1}(z) = \mp z_2 Norm(\alpha), s_0(z) = z_1 \mp z_2 \frac{B-1}{2}.$$

Тогда

$$z = \sum_{j=0}^{k(z)} z_j \alpha^j, \text{ где } z_j \equiv s_j(z) \pmod{Norm(\alpha)}.$$

Определение 4: Фундаментальной областью $T(\alpha, D) \in \mathbb{C}$ КСС (α, D) в кольце $S(\sqrt{d})$ целых элементов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, называется множество комплексных чисел с нулевой целой частью, т.е.:

$$T(\alpha, D) = \sum_{j=-\infty}^{-1} d_j \alpha^j, d_j \in D.$$

2. Обобщенные вейвлет-базисы Хаара

Пусть задана КСС (α, D) , ее основание – целое алгебраическое число $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $\alpha \in S(\sqrt{d})$, алфавит – множество $D = \{d_0, d_1, d_2, \dots, d_{|Norm(\alpha)-1}\}$, и $T(\alpha, D)$ – фундаментальная область этой КСС.

Положим $\Gamma = \Gamma_{S(\sqrt{d})}$. Матрица умножения произвольного числа $z \in S(\sqrt{d})$ на основание системы счисления α имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix},$$

Тогда можно построить кратномасштабный анализ (КМА), ассоциированный с парой (A, Γ) , причем масштабирующей функцией будет характеристическая функция фундаментальной области КСС (α, D) – $\phi = \chi_{T(\alpha, D)}$. Множество D образует полную систему вычетов $\pmod{\alpha}$. Пусть $|\det A| = q$, тогда вейвлет-базис искомого преобразования будем искать в виде:

$$\psi^i = \sum_{j=1}^q u_{i+1,j} \phi_{1,d_j},$$

где $u_{i,j}$ – элементы унитарной матрицы U , в которой $u_{i,j} = q^{-1/2}$, $j = 1 \dots q$, $d_j \in D$. Здесь элементы нулевой строки матрицы соответствуют фильтрам h_j , а элементы остальных строк – фильтрам $g_{i,j}$.

3. Общая идея алгоритмов декомпозиции сигнала

Основная идея алгоритмов декомпозиции базируется на интерпретации точек двумерной целочисленной решетки (растра изображения) как элементов кольца целых алгебраических чисел квадратичного поля, т.е. переход от двумерной целочисленной решетки $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ к решетке целых алгебраических чисел $\Gamma_{S(\sqrt{d})}$ некоторого квадратичного поля. Дадим определение решетки.

Определение 5: Пусть $a = (\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1})$ – множество линейно независимых векторов пространства \mathbb{R}^k . Линейная оболочка с целыми коэффициентами Γ векторов $(\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1})$ называется решеткой над \mathbb{R}^k порождаемой базисом $a = (\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1})$.

$$\Gamma = \vec{\xi} | \vec{\xi} = \{\xi_0 \vec{a}_0 + \xi_1 \vec{a}_1 + \dots + \xi_{k-1} \vec{a}_{k-1}\},$$

где $\xi_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Определим решетки целых алгебраических чисел квадратичного поля.

Лемма 1: Решетка целых алгебраических чисел $\Gamma_{S(\sqrt{d})}$ порождается базисом $a = \left((1, 0), (0, \sqrt{d}) \right)$, при $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ и базисом $a = \left(\left(\frac{1}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{\sqrt{d}}{2} \right) \right)$, при $d \equiv 1 \pmod{4}$.

Утверждение данной Леммы является следствием теоремы 1.

Покажем, что решетки целых алгебраических чисел изоморфны целочисленным решеткам.

Лемма 2: Решетка $\Gamma_{S(\sqrt{d})}$ над кольцом $S(\sqrt{d})$ изоморфна целочисленной решетке $\Gamma_{\mathbf{Z}}$, для всех d .

Доказательство:

Пусть целочисленная решетка $\Gamma_{\mathbf{Z}}$ над \mathbf{R}^2 определяется базисом $a_{\mathbf{Z}} = (\vec{a}_{\mathbf{Z}}^0, \vec{a}_{\mathbf{Z}}^1)$, а решетка $\Gamma_{S(\sqrt{d})}$ над кольцом $S(\sqrt{d})$ – базисом $a_{S(\sqrt{d})} = (\vec{a}_{S(\sqrt{d})}^0, \vec{a}_{S(\sqrt{d})}^1)$. Поставим в соответствие произвольному элементу $\xi = \xi_0 \vec{a}_{\mathbf{Z}}^0 + \xi_1 \vec{a}_{\mathbf{Z}}^1$ решетки $\Gamma_{\mathbf{Z}}$ элемент $\xi' = \xi_0 \vec{a}_{S(\sqrt{d})}^0 + \xi_1 \vec{a}_{S(\sqrt{d})}^1$ решетки $\Gamma_{S(\sqrt{d})}$, который имеет относительно базиса $a_{S(\sqrt{d})}$ те же самые координаты, что элемент ξ относительно базиса $a_{\mathbf{Z}}$.

Покажем, что установленное соответствие является взаимно однозначным. Каждому элементу ξ в решетке $\Gamma_{\mathbf{Z}}$ однозначно соответствуют координаты ξ_0, ξ_1 (согласно определению базиса), которые, в свою очередь, однозначно определяют элемент ξ' в решетке $\Gamma_{S(\sqrt{d})}$. В силу равноправности решеток $\Gamma_{\mathbf{Z}}$ и $\Gamma_{S(\sqrt{d})}$ каждому элементу ξ' в решетке $\Gamma_{S(\sqrt{d})}$ соответствует единственный элемент ξ в решетке $\Gamma_{\mathbf{Z}}$.

Поскольку параметр d определяет лишь базис $\Gamma_{S(\sqrt{d})}$ в пространстве \mathbf{R}^2 , то приведенные рассуждения могут быть обобщены для всех d .

Виду утверждения леммы 2 переход к рассмотрению исходного растрового сигнала на решетке алгебраических целых чисел обоснован.

После перехода к другой решетке двумерная индексация отсчетов исходного сигнала заменяется одномерной, в силу того факта, что каждое алгебраическое целое число имеет уникальный адрес в КСС. После этого отсчеты исходного сигнала рассматриваются как точки фундаментальной области КСС, и здесь возможно два варианта: либо исходный сигнал полностью покрывается фундаментальной областью, либо – ее фрагментом. В данной работе рассмотрены оба этих случая.

4. Алгоритм с полным деревом декомпозиции

Данный алгоритм разработан для случая, когда фундаментальная область полностью покрывает все отсчеты исходного сигнала.

Пусть заданы КСС с основанием $\alpha \in S(\sqrt{d})$, $Norm(\alpha) = q$ и изображение, $I(m, n)$, содержащее $N \times N$ точек. При этом выполняется следующее $L = \log_q N^2, L \in \mathbf{Z}$, т.е. число отсчетов исходного изображения совпадает с числом точек фундаментальной области размерности L .

Шаг 0: Рассчитывается минимальная длина адресов $L = \log_q N^2$.

Шаг 1: Строится множество D^L всех возможных адресов длины L . Всем адресам $a_{(\alpha, D)}^L \in D^L$ ставятся в соответствие числа решетки $S(\sqrt{d})$, т.е. $a_{(\alpha, D)}^L \leftrightarrow k + l\sqrt{d}$, или $a_{(\alpha, D)}^L \leftrightarrow (k, l)$. Трактую исходное изображение как заданное на решетке $S(\sqrt{d})$, осуществляется переход от двумерной индексации отсчетов изображения, к одномерной, т.е. $I(k, l) \leftrightarrow I(a_{(\alpha, D)}^L)$.

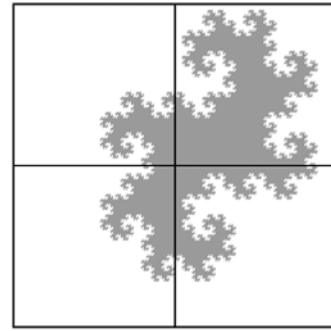


Рис. 1. Полное покрытие исходного сигнала фундаментальной областью

Шаг 2: Рассчитываются фильтры $h_d, g_d, d \in D$.

Шаг 3: Полагается $s_{0, a_{(\alpha, D)}^L} = I(a_{(\alpha, D)}^L)$.

Шаг 4: Для всех $l = 1 \dots L$ выполняется вейвлет-декомпозиция:

$$s_{-l, (l) a_{(\alpha, D)}^L} = \sum_{d \in D} h_d s_{-l+1, (l) a_{(\alpha, D)}^L d},$$

$$w_{-l, (l) a_{(\alpha, D)}^L} = \sum_{d \in D} g_d s_{-l+1, (l) a_{(\alpha, D)}^L d}.$$

В результате работы описанного алгоритма получается полное дерево декомпозиции, т.е. не содержащее пустых узлов.

5. Алгоритм с частичным деревом декомпозиции

Данный алгоритм разработан для случая, когда исходный сигнал покрывается фрагментом фундаментальной области.

Пусть заданы КСС с основанием $\alpha \in S(\sqrt{d})$, $Norm(\alpha) = q$ и изображение $I(m, n)$, содержащее $M \times N$ точек.

Шаг 0: Исходное изображение трактуется, как заданное на решетке $S(\sqrt{d})$, т.е. каждой точке изображения ставится в соответствие элемент решетки над кольцом $S(\sqrt{d})$, а именно, $I(k, l) \leftrightarrow k + l\sqrt{d}$. Каждому числу $k + l\sqrt{d}$ из кольца $S(\sqrt{d})$ соответствует адрес $a_{(\alpha, D)}^{L(k, l)}$ длины $L(k, l)$.

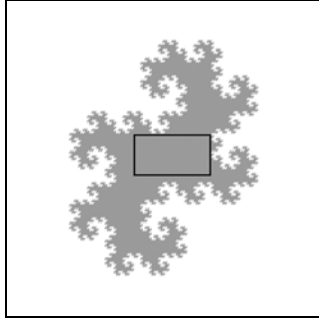


Рис. 2. Частичное покрытие исходного сигнала фундаментальной областью

Шаг 1: Рассчитывается длина минимального адреса как

$$L = \max\{L^{(k, l)}\}, k = 0 \dots M - 1, l = 0 \dots N - 1.$$

Шаг 2: Строится множество D^L всех возможных адресов длины L (при этом адреса длины меньшей, чем L , дополняются нулями слева до длины L), которое разбивается на два подмножества \hat{D}^L и \tilde{D}^L . Причем множество \hat{D}^L состоит из адресов $a_{(\alpha, D)}^L$ чисел $k + l\sqrt{d}$, для которых справедливо $0 \leq k < M, 0 \leq l < N$, а в множество \tilde{D}^L включаются все остальные адреса, т.е. $\tilde{D}^L = D^L \setminus \hat{D}^L$.

Шаг 3: Исходное изображение трактуется, как заданное на решетке $S(\sqrt{d})$, и осуществляется переход от двумерной индексации отсчетов изображения к одномерной, т.е. $I(k, l) \leftrightarrow I(a_{(\alpha, D)}^L)$ при $a_{(\alpha, D)}^L \in \hat{D}^L$.

Шаг 4: Рассчитываются фильтры $h_d, g_d, d \in D$.

Шаг 5: Полагается $s_{0, a_{(\alpha, D)}^L} = I(a_{(\alpha, D)}^L)$, при $a_{(\alpha, D)}^L \in \hat{D}$ и $s_{0, a_{(\alpha, D)}^L} = 0$, при $a_{(\alpha, D)}^L \in \tilde{D}^L$.

Шаг 6: Для всех $l = 1 \dots L$ выполняется следующее:

Конструируются множества \hat{D}^{L-l} и \tilde{D}^{L-l} : $\hat{D}^{L-l} = \{(l)a_{(\alpha, D)}^L : (l-1)a_{(\alpha, D)}^L \in \hat{D}^{L-(l-1)}\}$ и $\tilde{D}^{L-l} = D^{L-l} \setminus \hat{D}^{L-l}$.

Выполняется вейвлет-декомпозиция для всех $s_{-l, (l)a_{(\alpha, D)}^L}$ таких, что $(l)a_{(\alpha, D)}^L \in \hat{D}^{L-l}$:

$$s_{-l, (l)a_{(\alpha, D)}^L} = \sum_{d \in D} h_d s_{-l+1, (l)a_{(\alpha, D)}^L d},$$

$$w_{-l, (l)a_{(\alpha, D)}^L} = \sum_{d \in D} g_d s_{-l+1, (l)a_{(\alpha, D)}^L d}.$$

В результате работы описанного алгоритма получается неполное дерево декомпозиции, т.е. содержащее пустые узлы.

Заключение

В работе предложены алгоритмы декомпозиции сигналов для обобщенных вейвлет-преобразований Хаара для случаев с полным и частичным покрытием исходного сигнала фундаментальными областями КСС. Эти алгоритмы позволяют применять обобщенные вейвлеты Хаара в задачах обработки изображений и, в частности, в задаче компрессии цифровых изображений.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ, Правительства Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (грант RUX0-014-SA-06) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант № 05-01-96501, 06-01-00722.

Литература

1. Mendivil F., Piché D. Two Algorithms for Non-Separable Wavelet Transforms and Applications to Image Compression // Fractals: Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, 1999.
2. Grochenig K., Madych W.R. Multiresolution Analysis, Haar Bases, and Self-Similar Tilings of \mathbb{R}^n // IEEE Trans. Inform. Theory, 1992. 38. P. 556-568.
3. Piché D.G. Complex Bases, Number Systems and Their Application to Fractal-Wavelet Image Coding // PhD in Applied Mathematics thesis. Ontario, Canada: University of Waterloo, 2002.
4. Белов А.М. Применение канонических систем счисления в задаче построения неразделимых хаароподобных вейвлетов // Компьютерная оптика, Самара-Москва, 2006. №28. С. 119-123
5. Katai I., Kovacs B. Canonical number systems in imaginary quadratic fields // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 1981. 37. P. 159-164.
6. Katai I., Szabo J. Canonical number systems for complex integers // Acta Sci. Math. (Szeged), 1975. 37. P. 255-260.
7. Kovacs A. Generalized binary number systems // Annales univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 2001. 20. P. 195-206.

SIGNAL DECOMPOSITION ALGORITHMS BASED ON NONSEPARABLE WAVELET TRANSFORMS

A.M. Belov^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of the RAS,

²Samara State Aerospace University (SSAU)

Abstract

This paper considers two signal decomposition algorithms based on generalized nonseparable Haar wavelet transforms. A peculiar feature of these wavelet transforms is that they are based on fundamental domains of conical number systems in imaginary quadratic fields.

Keywords: Haar wavelet transform, conical number systems, signal decomposition

Citation: Belov AM. Signal decomposition algorithms based on nonseparable wavelet transforms [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(1): 63-66.

Acknowledgements: The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, the Government of Samara Region and American Civilian Research and Development Foundation (grant CRDF RUX0-014-SA-06), within the framework of the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (BRHE) and was also supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) grant No. 05-01-96501, 06-01-00722.

References:

Mendivil F, Piché D. Two Algorithms for NonSeparable Wavelet Transforms and Applications to Image Compression. Fractals: Theory and Applications in Engineering. Springer-Verlag, 1999.

Grochenig K, Madych WR. Multiresolution Analysis, Haar Bases and Self-Similar Tilings of \mathbb{R}^n . IEEE Trans. Inform. Theory 1992; 38: 556-568.

Piché DG. Complex Bases, Number Systems and Their Application to Fractal-Wavelet Image Coding. PhD in Applied Mathematics thesis. Ontario, Canada: University of Waterloo, 2002.

Belov AM. Application of canonical number systems in the construction of non-separable Haar-type wavelets [In Russian]. Computer Optics 2006; 28: 119-123.

Katai I, Kovacs B. Canonical number systems in imaginary quadratic fields. Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 1981; 37: 159-164.

Katai I, Szabo J. Canonical number systems for complex integers. Acta Sci. Math. (Szeged) 1975; 37: 255- 260.

Kovacs A. Generalized binary number systems. Annales univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 2001; 20: 195-206.