

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ ОБЩЕГО ВИДА И ИХ ИЗВЕСТНЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

А.А. Ковалев^{1,2}, В.В. Котляр^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений Российской академии наук, Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия

Аннотация

Показано, что полученное недавно трехпараметрическое семейство точных решений парааксиального волнового уравнения (типа Шредингера), которое названо гипергеометрическими лазерными пучками, включает в себя как частные случаи известные семейства лазерных пучков – гауссовы гипергеометрические лазерные пучки и элегантные пучки Лагерра-Гаусса.

Введение

Недавно авторами было рассмотрено новое семейство парааксиальных лазерных пучков, комплексная амплитуда которых описывается конфлюэнтной гипергеометрической функцией [1]. Эти гипергеометрические пучки (ГГ-пучки), описываются трехпараметрическим семейством функций и является обобщением двухпараметрического семейства решений парааксиального волнового уравнения (типа Шредингера), которые рассматривались в [2]. Также, эти ГГ-пучки [1] являются обобщением ранее рассмотренных гипергеометрических мод [3]. ГГ-моды обладают бесконечной энергией как и известные моды Бесселя, и на практике могут быть реализованы только приближенно. Недавно в [4] были рассмотрены гауссовы гипергеометрические пучки, которые обладают конечной энергией (хотя они уже не являются модами, так как при распространении меняют структуру поперечной интенсивности).

В данной работе показано, что ГГ-пучки являются обобщением гауссовых гипергеометрических лазерных пучков (ГГГ-пучков) [4] и хорошо известных элегантных пучков Лагерра-Гаусса (ЭЛГ-пучки) [5].

1. Общий вид гипергеометрических пучков

В работе [1] рассматриваются гипергеометрические лазерные пучки (ГГ-пучки), комплексная амплитуда которых описывается трехпараметрическим семейством функций. Эти пучки являются обобщением гипергеометрических мод [4] и двухпараметрических гипергеометрических пучков [2]. В этом разделе мы кратко, следуя [1], повторим вывод ГГ-пучков.

Рассмотрим световое поле с начальной функцией комплексного пропускания вида:

$$E_{\gamma m}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r}{w}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\gamma \ln \frac{r}{w} + in\varphi\right), \quad (1)$$

где (r, φ) – полярные координаты в начальной плоскости ($z=0$), w и γ – действительные параметры логарифмического аксикона, σ – радиус перетяжки гауссова пучка, n – целый порядок спиральной фазовой пластинки (СФП) (топологический заряд), m – целое число. Комплексная амплитуда (1) описывает световое поле с бесконечной энергией и с особенностью при $r=0$ и $m < 0$. Несмотря на это в любой другой поперечной плоскости на расстоянии z

от начальной плоскости комплексная амплитуда светового поля, порожденная функцией (1), уже не будет иметь особенности и будет конечной.

При парааксиальном распространении светового поля (1) его комплексная амплитуда на расстоянии z будет определяться преобразованием Френеля, которое в полярных координатах имеет вид:

$$E(\rho, \theta, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \iint_{\mathbb{R}^2} E(r, \varphi, 0) \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)]\right\} r dr d\varphi, \quad (2)$$

где (ρ, θ) – полярные координаты в плоскости, отстоящей на расстоянии z от начальной плоскости, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны.

При вихревом поле во входной плоскости, т.е. при $E(\rho, \theta, 0) = A(r) \exp(in\varphi)$, уравнение (2) примет вид:

$$E(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \frac{k}{z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \times \int_0^\infty A(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr. \quad (3)$$

Известен справочный интеграл [6]:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-px^2) J_\nu(cx) dx = c^\nu p^{-\frac{\nu+\alpha}{2}} 2^{-\nu-1} \times \times \Gamma\left(\frac{\nu+\alpha}{2}\right) \Gamma^{-1}(\nu+1) {}_1F_1\left(\frac{\nu+\alpha}{2}, \nu+1, -\frac{c^2}{4p}\right). \quad (4)$$

Тогда преобразование Френеля от (1) имеет вид:

$$E_{\gamma m}(\rho, \theta, z) = \frac{1}{2\pi n! \rho w^{m+i\gamma}} \times \times \left(-\frac{ik\rho}{2z}\right)^{n+1} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \times \times \left(\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{ik}{2z}\right)^{\frac{n+m+2+i\gamma}{2}} \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}\right) \times \times {}_1F_1\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -\frac{\left(\frac{k\rho}{2z}\right)^2}{2\sigma^2 - \frac{ik}{2z}}\right). \quad (5)$$

Обозначим $z_0 = k\sigma^2$, $q = (1 - iz_0/z)^{1/2}$. Тогда вместо (5) получим:

$$E_{\gamma m}(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{zq^2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{wq}\right)^{m+i\gamma} \times \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz}\right)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}\right) \times {}_1F_1\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz}\right)^2\right), \quad (6)$$

Выражение (6) описывает комплексную амплитуду параксиальных гипергеометрических лазерных пучков общего вида. Сокращенно: ГГ-пучки. Модуль комплексной амплитуды (6) пропорционален функции Куммера:

$$|E_{\gamma m}(\rho, \theta, z)| \sim x^{\frac{n}{2}} |{}_1F_1(a, b, -x)|, \quad (7)$$

где x – комплексный аргумент:

$$x = \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz}\right)^2. \quad (8)$$

Функция Куммера или конфлюэнтная гипергеометрическая функция имеет вид [7]:

$${}_1F_1(a, b, -x) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l (-1)^l x^l, \quad (9)$$

где

$$C_l = \frac{\Gamma(a+l)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+l)l!}, \quad (10)$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функция.

2. Гауссовы гипергеометрические пучки

В работе [4] рассмотрены гауссовы гипергеометрические пучки (ГГГ-пучки). Эти пучки обладают конечной энергией, но при распространении в пространстве, в отличие от ГГ-мод [3], они меняют вид поперечного распределения интенсивности, оставаясь радиально-симметричными пучками. Эти пучки не образуют ортогональный базис, в отличие от ГГ-мод. Покажем, что ГГГ-пучки являются частным случаем ГГ-пучков. Перепишем (6) с новым обозначением $w = \sqrt{2}\sigma$:

$$E_{\gamma m}(r', \phi', z) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{zq^2}\right) \left(\frac{1}{q}\right)^{m+i\gamma} \times \left(\frac{kwr'}{2qz}\right)^n \exp\left(\frac{ikr'^2}{2z} + in\phi'\right) \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}\right) \times {}_1F_1\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -\left(\frac{kwr'}{2qz}\right)^2\right). \quad (11)$$

При $\gamma = 0$ вместо (11) получим в безразмерных единицах:

$$E_{0mm}(\rho', \phi', z) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \frac{1}{\zeta - i} \zeta^{\frac{m-n}{2}} (\zeta - i)^{-\frac{m+n}{2}} \times \rho'^m \exp\left(\frac{i\rho'^2}{\zeta} + in\phi'\right) \Gamma\left(\frac{n+m+2}{2}\right) \times {}_1F_1\left(\frac{n+m+2}{2}, n+1, -\frac{\rho'^2}{\zeta(\zeta - i)}\right), \quad (12)$$

где

$$\begin{cases} \rho' = r'/w, \\ \zeta = z/z_0, \\ z_0 = kw^2/2, \\ q^2 = (\zeta - 1)/\zeta. \end{cases} \quad (13)$$

Положим в (13) $m = n + p$ и воспользуемся известным соотношением для конфлюэнтной гипергеометрической функции [7]:

$${}_1F_1(a, b, -x) = \exp(-x) {}_1F_1(b-a, b, x), \quad (14)$$

тогда вместо (12) получим:

$$E_{0,n,n+p}(\rho', \phi', z) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi} \frac{\Gamma\left(n+1+\frac{p}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \times \zeta^{\frac{p}{2}} (\zeta - i)^{-\left(n+1+\frac{p}{2}\right)} \rho'^m \exp\left(\frac{i\rho'^2}{\zeta - i} + in\phi'\right) \times {}_1F_1\left(-\frac{p}{2}, n+1, \frac{\rho'^2}{\zeta(\zeta - i)}\right). \quad (15)$$

Выражение (15) отличается от аналогичного выражения, полученного в [4] (кроме константы), только знаками перед мнимой единицей в $\zeta - i$, $(-i)^{n+1}$ и $i\rho'^2$. Действительно, в [4] рассмотрены ГГГ-пучки с комплексной амплитудой:

$$\begin{aligned} |HyGG\rangle_{pm} &= u_{pm}(\rho, \phi, \zeta) = \\ &= C_{pm} \frac{\Gamma\left(1+|m|+\frac{p}{2}\right)}{\Gamma(1+|m|)} i^{|m|+1} \zeta^{\frac{p}{2}} (\zeta + i)^{-[1+|m|+p/2]} \times \\ &\times \rho^{|m|} \exp[-i\rho^2/(\zeta + i)] \exp(im\phi) \times \\ &\times {}_1F_1\left(-\frac{p}{2}, |m|+1; \frac{\rho^2}{\zeta(\zeta + i)}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

3. Элегантные пучки Лагерра-Гаусса

Для того чтобы показать, что эЛГ-пучки [5] являются частным случаем ГГ-пучков, перепишем выражение для ГГ-пучков общего вида (6) при $m = -1$ и с учетом соотношения (14), выделив явно гауссову экспоненту:

$$\begin{aligned}
 E_{\gamma, n, -1}(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \times \\
 &\times \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{wq} \right)^{-1+i\gamma} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta \right) \times \\
 &\times \Gamma\left(\frac{n+1+i\gamma}{2} \right) \exp\left[-\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right] \times \\
 &\times {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Далее воспользуемся известным соотношением для конфлюэнтной гипергеометрической функции [7]:

$${}_1F_1(-n, \alpha+1, x) = \frac{n!}{(\alpha+1)_n} L_n^{(\alpha)}(x), \tag{18}$$

где $L_n^{(\alpha)}(x)$ - присоединенные многочлены Лагерра, $(\alpha+1)_n$ - символ Похгаммера. Из сравнения (17) и (18) видно, что для того, чтобы получить моду Лагерра-Гаусса с индексами (p, s) , нужно чтобы выполнялись равенства:

$$\begin{cases} n+1 = s+1, \\ \frac{n+1-i\gamma}{2} = -p. \end{cases} \tag{19}$$

При условии (19) вместо (17) получим:

$$\begin{aligned}
 E_{-i(s+1+2p), s, -1}(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{s+1}}{2\pi s!} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \times \\
 &\times \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{wq} \right)^{-1+s+1+2p} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^s \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + is\theta \right) \times \\
 &\times \Gamma\left(\frac{s+1+s+1+2p}{2} \right) \exp\left[-\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right] \\
 &\times {}_1F_1\left(\frac{s+1-(s+1+2p)}{2}, s+1, \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right).
 \end{aligned} \tag{20}$$

После несложных преобразований с учетом (18) вместо (20) окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 E_{-i(s+1+2p), s, -1}(\rho, \theta, z) &= \\
 &= \frac{(-i)^{s+1} p!}{2\pi} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{wq} \right)^{s+2p} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^s \times \\
 &\times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2q^2 z} + is\theta \right) L_p^{(s)}\left[\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{21}$$

Выражение (21) имеет вид, несколько отличный от общепринятого вида элегантных пучков ЛГ [5]

$$\begin{aligned}
 E(\rho, \theta, z) &= (-i)^{p+1} \left(\frac{z_0}{q^2 z} \right)^{p+1} \left(-\frac{i\omega^2 z_0}{w^2 q^2 z} \right)^{\frac{n}{2}} \times \\
 &\times \left(-\frac{ik\rho^2}{2q^2 z} \right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2q^2 z} + in\theta \right) L_p^n\left(-\frac{ik\rho^2}{2q^2 z} \right).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Выражение (22) имеет форму $x^{n/2} \exp(-x) L_p^n(x)$, а форма выражения (21) отличается от (22) постоянными множителями и аргументом полинома Лагерра. Таким образом, обнаружена еще одна разновидность элегантных пучков ЛГ, которые являются частным случаем ГГ-пучков.

4. Численное моделирование

При численном моделировании преобразование Френеля от поля (1) вычислялось по методу прямоугольников и сравнивалось со значениями, получаемыми при использовании формулы (6). Таким образом было проверено полученное выражение (6).

Результаты моделирования приведены на рис. 1. Были использованы следующие значения параметров: длина волны $\lambda = 633$ нм, радиус перетяжки Гауссова пучка $\sigma = 1$ мм, порядок СФП $n = 3$, показатель степенной составляющей амплитуды $m = 0$, расстояние вдоль оптической оси $z = 500$ мм.

Из рис. 1 видно, что при дифракции Гауссова пучка на СФП и логарифмическом аксиконе формируется кольцевое распределение интенсивности с дополнительными боковыми лепестками (кольцами). Радиус первого кольца и энергию боковых лепестков можно изменять, меняя параметр γ .

На рис. 2 показаны радиальные распределения модуля амплитуды для элегантных пучков Лагерра-Гаусса при распространении в свободном пространстве. В выражении (21) были использованы следующие значения параметров: длина волны $\lambda = 633$ нм, радиус перетяжки Гауссова пучка $\sigma = 10$ мкм, порядок СФП $n = 3$, показатель степенной составляющей амплитуды $m = -1$, параметр логарифмического аксикона $\gamma = -12i$ (т.е. пучок эЛГ имеет индекс (4, 3)).

Такие картины дифракции могут быть получены при прохождении Гауссова пучка через спиральную пластинку и амплитудный фильтр с пропусканием, пропорциональным степенной функции ρ^{11} .

Из рис. 2 видно, что элегантные пучки ЛГ не являются модами, т.к. структура поперечной интенсивности меняется (хотя и не сильно). Видно также, что энергия боковых лепестков существенно меньше, чем на рис. 1.

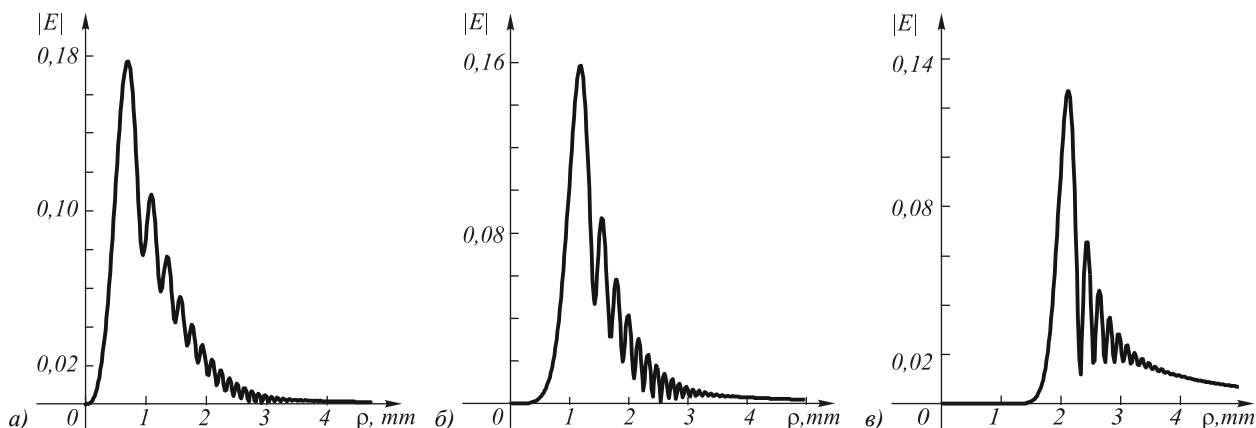


Рис. 1 Модуль комплексной амплитуды, описывающей дифракцию Френеля от функции (1), вычисленные с помощью интеграла (3) и аналитической формулы (6) при $t=0$: $\gamma=0$ (а), $\gamma=5$ (б), $\gamma=20$ (в)

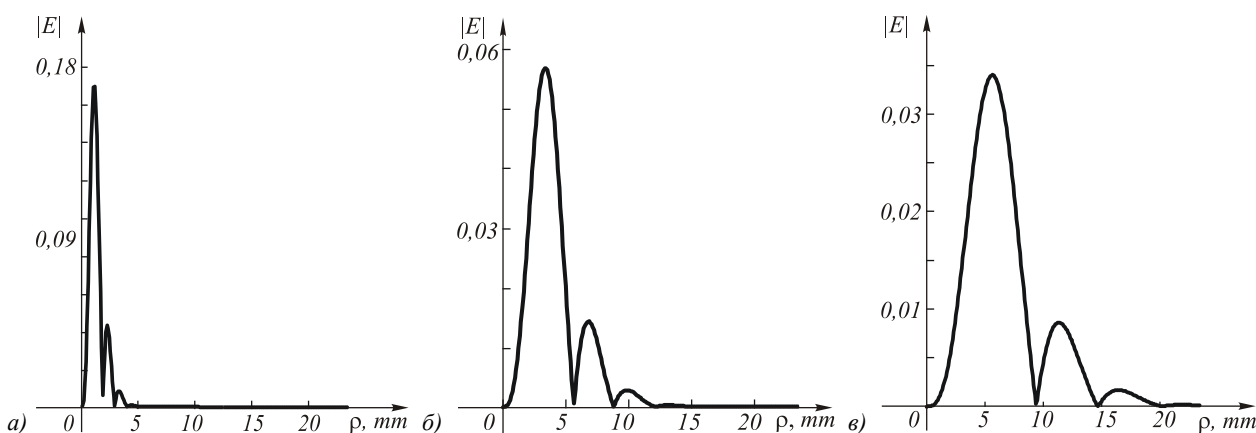


Рис. 2 Распространение элегантных пучков Лагерра-Гаусса. Радиальные распределения модуля амплитуды при $z=100$ мм (а), $z=300$ мм (б), $z=500$ мм (в)

Заключение

В работе показано, что полученное недавно трехпараметрическое семейство точных решений параксиального волнового уравнения (типа Шредингера), которое названо гипергеометрическими лазерными пучками, включает в себя как частные случаи известные семейства лазерных пучков: гауссовы гипергеометрические лазерные пучки и элегантные пучки Лагерра-Гаусса.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-Sa-06), а также гранта РФФИ 05-08-50298 и 07-07-97600.

Литература

1. **Kotlyar, V.** A family of hypergeometric laser beams / V. Kotlyar, A. Kovalev // J.Opt.Soc.Am. A (Early Posting, manuscript ID 87775, posted 15 November 2007).
2. **Ковалев, А.А.** Параксиальные гипергеометрические лазерные пучки с особенностью в центре перетяжки / А.А. Ковалев [и др.] // Компьютерная оптика, 2007. – Т.31, № 1. – С. 9-13.
3. **Kotlyar, V.V.** Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar [and other] // Opt.Lett., 2007. – V.32, no.7. – P. 742-744.
4. **Karimi, E.** Hypergeometric-Gaussian modes / E. Karimi [and other] // Opt.Lett., 2007. – V.32. – P. 3053-3055.
5. **Takenaka, T.** Propagation of light beams beyond the paraxial approximation / T. Takenaka, M. Yokota, O. Fukumitsu // J.Opt.Soc.Am. A, 1985. – V.2. – P. 826-829.
6. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев – М.: Наука, 1983.
7. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана – М.: Наука, 1979.

GENERAL FORM OF HYPERGEOMETRIC LASER BEAMS AND THEIR PARTICULAR CASES

A.A. Kovalev^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}

¹*Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia,*

²*Samara State Aerospace University, Samara, Russia*

Abstract

It is shown that the recently obtained three-parameter family of true solutions of the wave paraxial equation (the Schroedinger equation), which was named hypergeometric (HyG) laser beams, includes, as particular cases, well-known laser-beam families – HyG Gaussian beams and elegant Laguerre-Gaussian beams.

Keywords: hypergeometric vortex laser beams, paraxial equation

Citation: Kovalev AA, Kotlyar VV. General form of hypergeometric laser beams and their particular cases [In Russian]. *Computer Optics* 2007; 31(4): 29-32.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (CRDF grant RUX0-014-Sa-06), and by the Russian Foundation for Basic Research grants No. 05-08- 50298 and No. 07-07-97600.

References:

- [1] Kotlyar V, Kovalev A. A family of hypergeometric laser beams. *J. Opt. Soc. Am. A*. Early Posting, manuscript ID 87775, posted 15 November 2007.
- [2] Kovalev AA, Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Paraxial hypergeometric laser beams with singularity at the waist center [In Russian]. *Computer Optics* 2007; 31(1): 9-13.
- [3] Kotlyar VV, et al. Hypergeometric modes. *Opt. Lett.* 2007; 32(7): 742-744.
- [4] Karimi E, et al. Hypergeometric-Gaussian modes. *Opt. Lett.* 2007; 32: 3053-3055.
- [5] Takenaka T, Yokota M, Fukumitsu O. Propagation of light beams beyond the paraxial approximation. *J. Opt. Soc. Am. A* 1985; 2: 826-829.
- [6] Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. Integrals and series. Special functions [In Russian]. Moscow: “Nauka” Publisher, 1983.
- [7] Abramovits M, Stigan I. Handbook of Special Functions. Moscow: “Nauka” Publisher, 1979.