

## ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА

### АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОЛЯ ОТ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ, ОБЛАДАЮЩИХ ЗОННОЙ СТРУКТУРОЙ

*С.И. Харитонов, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, М.Л. Каляев*  
Институт систем обработки изображений РАН  
Самарский государственный аэрокосмический университет

#### Аннотация

Представлен новый асимптотический метод решения задачи дифракции света на дифракционных оптических элементах (ДОЭ) с зонной структурой. Метод включает строгое решение задачи дифракции на периодической структуре с периодом, сравнимым с длиной волны, и асимптотический подход к расчету поля за ДОЭ. Получено решение задачи дифракции света на эталонной квазипериодической структуре, сочетающей в себе функции дифракционной решетки и дифракционной линзы. На основе решения эталонной задачи получена простая аппроксимация для поля непосредственно за ДОЭ.

#### Введение

Рассмотрим дифракцию света на дифракционном оптическом элементе (ДОЭ), обладающем зонной структурой. Свет представляет собой электромагнитные волны, и поэтому строгое решение задачи дифракции должно быть основано на решении системы уравнений Максвелла с соответствующими задаче граничными условиями. Однако на практике хорошо известно, что решение уравнений Максвелла в коротковолновой области весьма трудоемкая задача даже для современных компьютеров. Для оценки поведения решения системы уравнений Максвелла в коротковолновой области широко используются асимптотические методы. Наиболее известным асимптотическим методом является приближение геометрической оптики [1]. Приближение геометрической оптики хорошо работает в случае, когда свойства среды слабо меняются на расстояниях сравнимых с длиной волны освещающего пучка. Методы решения задач дифракции на периодических структурах, основанные на точном решении уравнений Максвелла, хорошо известны [2]. Если структура не является периодической, то для решения задач дифракции используются конечно-разностные методы [3] или методы, основанные на решении соответствующих интегральных уравнений [4]. В работах [5-7] рассмотрены асимптотические методы решения волновых уравнений для решения задач дифракции в рамках скалярной теории. В работе [8] представлены методы расчета поля от спиральной фазовой пластинки в рамках параксиальной векторной теории. В работе [9] разработаны методы решения задач дифракции на микрочастицах.

В данной работе рассматривается асимптотический подход к решению широкого класса задач дифракции в рамках электромагнитной теории. Подход основан на синтезе асимптотического метода к

расчету поля после ДОЭ, основанного на вычислении интеграла Кирхгофа-Котлера методом стационарной фазы, и решения задач дифракции на квазипериодических структурах внутри ДОЭ. Полученные с использованием данного метода формулы для поля от ДОЭ можно легко интерпретировать в рамках геометрической оптики.

Применение асимптотических методов в физике связано в основном с использованием геометрической оптики [1], квазиклассического приближения в квантовой механике, а также с вычислением интеграла Кирхгофа-Гюйгенса [10] или Кирхгофа-Котлера [11] методом стационарной фазы или методом перевала. Физический смысл подхода в геометрической оптике состоит в замене решения исходной задачи на решение задачи дифракции локальной плоской волны в локально однородной среде или на плоской границе раздела двух сред. Метод перевала и метод стационарной фазы [10-12] также основаны на замене вычисляемого интеграла некоторым эталонным интегралом. Эти методы были положены в основу результатов, изложенных нами в работах [5-7] в рамках скалярной теории дифракции. В настоящей статье предложенный в [5-7] подход обобщен на случай строгой электромагнитной теории.

#### 1. Теория представлений для уравнений Максвелла

В данной работе расчет поля проводится в рамках строгой векторной электромагнитной теории. В декартовой системе координат систему уравнений Максвелла [13] для гармонических по времени полей можно представить в виде

$$\frac{i}{k_0} \frac{\partial W}{\partial x_3} = HW, \quad (1)$$

где  $H$  – матричный дифференциальный оператор Гамильтона-Максвелла,

$$W(X) = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$X = (x_1, x_2, x_3)$  – декартовы координаты,  $\lambda$  – длина волны,  $E_i$  – поперечные компоненты электрического поля,  $H_i$  – компоненты магнитного поля.

Для описания электромагнитного поля в случае гармонического изменения поля по времени достаточно четырех компонент электромагнитного поля. Продольные компоненты электрического (и магнитного) поля в случае необходимости можно выразить через поперечные. Представление системы уравнений Максвелла в виде (1) удобно для решения задач дифракции, в которых описывается распространение электромагнитных волн через объекты, имеющие границы в форме параллельных плоскостей. Этим свойством обладают, например, элементы плоской оптики, работающие в оптическом диапазоне.

В дальнейшем четырехкомпонентный вектор  $W$  будем называть бивектором, а соответствующее поле – бивекторным электромагнитным полем.

В данной работе используются введенные П. Дираком [14] обозначения для полевых функций, принятые в квантовой механике, в т.ч.  $\delta$ -функции. При этом одни и те же символы с разной индексацией могут иметь разный смысл.

Выражение (1) можно рассматривать как операторную запись в абстрактном гильбертовом пространстве бивекторов. В координатном представлении оператор Гамильтона-Максвелла  $H$  имеет следующий вид:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$A = \frac{-1}{2k_0^2} \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_1 \\ -\partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\left| F_{\alpha_1 \alpha_2} \right\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_3 \alpha_1 \|W_e\|^{-1} & \alpha_2 (\|W_h\| \sqrt{\varepsilon})^{-1} & -\alpha_3 \alpha_1 \|W_e\|^{-1} & \alpha_2 (\|W_h\| \sqrt{\varepsilon})^{-1} \\ \alpha_3 \alpha_2 \|W_e\|^{-1} & -\alpha_1 (\|W_h\| \sqrt{\varepsilon})^{-1} & -\alpha_3 \alpha_2 \|W_e\|^{-1} & -\alpha_1 (\|W_h\| \sqrt{\varepsilon})^{-1} \\ -\alpha_2 \sqrt{\varepsilon} \|W_e\|^{-1} & \alpha_3 \alpha_1 \|W_h\|^{-1} & -\alpha_2 \sqrt{\varepsilon} \|W_e\|^{-1} & -\alpha_3 \alpha_1 \|W_h\|^{-1} \\ \alpha_1 \sqrt{\varepsilon} \|W_e\|^{-1} & \alpha_3 \alpha_2 \|W_h\|^{-1} & \alpha_1 \sqrt{\varepsilon} \|W_e\|^{-1} & -\alpha_3 \alpha_2 \|W_h\|^{-1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $k = k_0 \sqrt{\varepsilon}$ ,  $\|W_e\|^2 = (\alpha_3^2 + \varepsilon)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$ ,

$$\|W_h\|^2 = (\alpha_3^2 + \varepsilon^{-1})(\alpha_1^2 + \alpha_2^2),$$

$$\alpha_3 = \sqrt{1 - (\alpha_1)^2 - (\alpha_2)^2}.$$

$$B = \frac{1}{2k_0^2} \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_1 \\ -\partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu = 1$ .

Представим решение уравнения Максвелла в виде разложения по базису

$$\left| W \right\rangle = \sum_{nms} f^{nms}(x_3) \left| F_{nms}(x_1, x_2) \right\rangle. \quad (5)$$

Набор функций  $\{f^{nms}(x_3)\}$  будем называть волновыми функциями бивекторного электромагнитного поля в  $F$ -представлении.  $nms$  – набор индексов, характеризующий базисную функцию.

Каждому абстрактному оператору  $H$  в данном базисе можно сопоставить многомерную матрицу (или тензор [15])  $H_{nms}^{pqk}$

$$H \left| F_{nms}(x_1, x_2) \right\rangle = \sum_{nms} H_{nms}^{pqk}(f) \left| F_{pqk}(x_1, x_2) \right\rangle. \quad (6)$$

В случае, когда набор базисных функций не является счетным, суммирование заменяется интегрированием. Система уравнений Максвелла в  $F$ -представлении записывается в виде:

$$\frac{i}{k} \frac{\partial f^{nms}}{\partial x_3} = \sum_{pqk} H_{pqk}^{nms}(x_3) f^{pqk}(x_3). \quad (7)$$

Выберем в качестве системы линейно независимых решений набор функций, представляющих собой плоские волны. В этом случае решение представляется в виде:

$$\left| W \right\rangle = \sum_s \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^{\alpha_1 \alpha_2 z}(x_3) \left| F_{\alpha_1 \alpha_2 s}(x_1, x_2) \right\rangle d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (8)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – пространственные частоты.

Базисные векторы запишем в виде матрицы

$$\left| F_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) \right\rangle = \left| F_{\alpha_1 \alpha_2} \right\rangle \cdot \exp(ik(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)), \quad (9)$$

Первый столбец матрицы описывает ТЕ-волну с пространственными частотами  $\omega_1, \omega_2$ , распространяющуюся в положительном направлении. Второй столбец описывает ТМ-волну с пространственными частотами  $\omega_1, \omega_2$ , распространяющуюся в положительном направлении. Третий столбец описывает ТЕ-волну с пространственными частотами  $\omega_1, \omega_2$ ,

распространяющуюся в отрицательном направлении. Четвертый столбец описывает ТМ-волну с пространственными частотами  $\omega_1, \omega_2$ , распространяющуюся в отрицательном направлении. В предельном случае, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , будем использовать матрицу следующего вида:

$$|F_{0,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + 1}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{\varepsilon} & 0 & \sqrt{\varepsilon} \\ -\sqrt{\varepsilon} & 0 & -\sqrt{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Этот случай описывает волны, распространяющиеся перпендикулярно диэлектрическому слою.

Для того, чтобы записать систему уравнений Максвелла в пространственно-частотном представлении, необходимо найти матричные элементы оператора  $H$  в пространственно-частотном представлении.

Матричные элементы оператора  $H$  имеют вид:

$$H_{\alpha_1\alpha_2, s}^{\omega_1\omega_2, n} = \sum_m P_m^n(\omega_1, \omega_2) \langle F^{\omega_1\omega_2, m} | G_{\alpha_1\alpha_2}^{\omega_1\omega_2} | F_{\alpha_1\alpha_2, s} \rangle, \quad (12)$$

где  $P_m^n$  - матрица, обратная к матрице парных скалярных произведений базисных векторов (10),

$$G_{\alpha_1\alpha_2}^{\omega_1\omega_2} = \begin{bmatrix} 0 & A_{\alpha_1\alpha_2}^{\omega_1\omega_2} \\ B_{\alpha_1\alpha_2}^{\omega_1\omega_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$A_{\alpha_1\alpha_2}^{\omega_1\omega_2} = \varepsilon^{-1}(\omega_1 - \alpha_1, \omega_2 - \alpha_2) Q - \delta(\omega_1 - \alpha_1, \omega_2 - \alpha_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$B_{\alpha_1\alpha_2}^{\omega_1\omega_2} = -\delta(\omega_1 - \alpha_1, \omega_2 - \alpha_2) Q - \varepsilon(\omega_1 - \alpha_1, \omega_2 - \alpha_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

$\varepsilon(\omega_1, \omega_2)$  - преобразование Фурье от распределения диэлектрической проницаемости.

Система уравнений Максвелла в пространственно-частотном представлении имеет вид системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{i}{k} \frac{\partial f^{\omega_1\omega_2, s}}{\partial x_3} = \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\alpha_1\alpha_2, m}^{\omega_1\omega_2, s}(x_3) f^{\alpha_1\alpha_2, m}(x_3) d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (17)$$

Для многих задач вместо базиса, состоящего из волн различной поляризации, распространяющихся в различных направлениях, удобно использовать следующий базис

$$|V_{\alpha_1\alpha_2}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1\alpha_3}{\|W_1\|} & \frac{\alpha_2}{\sqrt{\varepsilon}\|W_2\|} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_2\alpha_3}{\|W_1\|} & \frac{-\alpha_1}{\sqrt{\varepsilon}\|W_2\|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2\sqrt{\varepsilon}}{\|W_3\|} & \frac{-\alpha_1\alpha_3}{\|W_4\|} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1\sqrt{\varepsilon}}{\|W_3\|} & \frac{-\alpha_2\alpha_3}{\|W_4\|} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

где  $\|W_i\|$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  - нормировочные коэффициенты, обеспечивающие нормировку введенного базиса.

### 2. Решение эталонной задачи

Предварительно рассмотрим задачу дифракции света на эталонном ДОЭ. Модельный ДОЭ должен сочетать в себе функции расщепителя пучка (дифракционной решетки) и при этом обладать фокусирующими свойствами. Такая модель позволяет охватить достаточно широкий класс существующих ДОЭ.

Для модельного расчета можно выбрать ДОЭ, расположенный перпендикулярно оси  $x_3$  в области  $0 < x_3 < D$  (рис. 1).

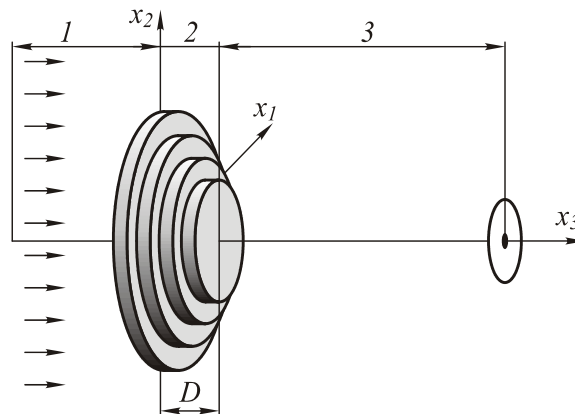


Рис.1. Оптическая схема

Диэлектрическая проницаемость в области эталонного ДОЭ имеет вид

$$\varepsilon(x_1, x_2) = \sum_n g_n \exp(ikng(x_1, x_2)), \quad (19)$$

где  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  - декартовы координаты в плоскости оптического элемента,  $D$  - толщина диэлектрического слоя,  $n$  - целое число,  $x_0$  - точка на оптическом элементе в окрестности которой ищется поле. Функция  $g(x_1, x_2)$  имеет смысл функции эйконала для геометрооптического фокусатора [16-18].

Пусть функция  $g(x_1, x_2)$  является квадратичной формой

$$g(x_1, x_2) = g(\bar{x}_0) + (\nabla g(\bar{x}_0))(\bar{x} - \bar{x}_0) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{x}_0)^T M(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0), \quad (20)$$

а матрица  $M$  имеет вид:

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы решить задачу необходимо найти решение внутри ДОЭ (внутри диэлектрического слоя) и в свободном пространстве, удовлетворяющее условию непрерывности на границах раздела ДОЭ и окружающей среды.

### 2.1. Решение в диэлектрическом слое

Для получения решения внутри диэлектрического слоя в окрестности точки  $\bar{x}_0 = ((x_0)_1, (x_0)_2)$  введем новые координаты  $\bar{y} = (y_1, y_2)$ :

$$\begin{bmatrix} x_1 - (x_0)_1 \\ x_2 - (x_0)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

В этих координатах функция  $g(x_1, x_2)$  имеет вид:

$$g(y_1, y_2) = g^0(0, 0) + \gamma^T(\bar{y}) + \frac{1}{2}(\bar{y})^T M_1(\bar{y}), \quad (22)$$

где матрица  $M_1$  имеет диагональный вид:

$$M_1 = Z^T M Z = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$Z = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Угол  $\theta$  выбирается таким образом, чтобы матрица  $M_1 = Z^T M Z$  была диагональной.

Запишем Фурье-образ диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(\omega_1, \omega_2) = \sum_m g_m \exp(ikmg(0, 0)) \times D_{mm}(\omega_1 - m\gamma_1, \omega_2 - m\gamma_2), \quad (24)$$

$$\varepsilon^{-1}(\omega_1, \omega_2) = \sum_m g_m^{-1} \exp(ikmg(0, 0)) \times D_{mm}(\omega_1 - m\gamma_1, \omega_2 - m\gamma_2), \quad (25)$$

$\gamma_1$  и  $\gamma_2$  связаны с производными функции  $g(x_1, x_2)$  в исходной системе координат следующим образом

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

$$D_{m_1 m_2}(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi m_1 \beta_1}} \cdot \sqrt{\frac{ik}{2\pi m_2 \beta_2}} \cdot \exp\left(-ik\left(\frac{(\omega_1)^2}{2m_1 \beta_1} + \frac{(\omega_2)^2}{2m_2 \beta_2}\right)\right). \quad (27)$$

Связь поля в координатном и пространственно-частотном представлении имеет вид, аналогичный (8):

$$\begin{aligned} |W(y_1, y_2)\rangle &= \\ &= \sum_s \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^{\alpha_1 \alpha_2 s}(x_3) |F_{\alpha_1 \alpha_2 s}\rangle \times \\ &\times \exp(ik(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned} \quad (28a)$$

Найдем матричные элементы оператора Гамильтона-Максвелла в пространственно-частотном представлении (13). Оператор Гамильтона-Максвелла для распределения диэлектрической проницаемости (24)-(25) имеет вид (12), где

$$\begin{aligned} G_{\alpha_1 \alpha_2}^{\omega_1 \omega_2} &= \sum_{n_1} G_{n_1}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) \times \\ &\times D_{n_1 n_1}(\omega_1 - n_1 \gamma_1 - \alpha_1, \omega_2 - n_1 \gamma_2 - \alpha_2), \\ G_{n_1}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) &= \\ &= \begin{bmatrix} 0 & A_{n_1}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) \\ B_{n_1}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} A_{n_1}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) &= g_{n_1}^{-1} \exp(ikn_1 g^0(0, 0)) \times \\ &\times \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} - \delta_{n_1}^0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} B_{n_1}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) &= -\delta_{n_1}^0 \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 \end{bmatrix} - \\ &- g_{n_1} \exp(ikn_1 g(0, 0)) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

Двумерные матрицы, входящие в (13), представляются в виде:

$$A_{\alpha_1 \alpha_2}^{\omega_1 \omega_2} = \sum_{n_1} A_{n_1}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) \times \quad (32)$$

$$\times D_{n_1 n_1}(\omega_1 - n_1 \gamma_1 - \alpha_1, \omega_2 - n_1 \gamma_2 - \alpha_2),$$

$$B_{\alpha_1 \alpha_2}^{\omega_1 \omega_2} = \sum_{n_1} B_{n_1}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) \times \quad (33)$$

$$\times D_{n_1 n_1}(\omega_1 - n_1 \gamma_1 - \alpha_1, \omega_2 - n_1 \gamma_2 - \alpha_2).$$

Запишем матричные элементы оператора Гамильтона-Максвелла в пространственно-частотном базисе (18)

$$\begin{aligned} H_{\alpha_1 \alpha_2 s}^{\omega_1 \omega_2 n} &= \sum_{n_1} \langle V^{\omega_1 \omega_2 n} | G_{n_1}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) | V_{\alpha_1 \alpha_2 s} \rangle \times \\ &\times D_{n_1 n_1}(\omega_1 - n_1 \gamma_1 - \alpha_1, \omega_2 - n_1 \gamma_2 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (34)$$

Решение системы уравнений Максвелла в пространственно-частотном представлении запишем в виде:

$$v^{\alpha_1 \alpha_2 l}(x_3) = \sum_{s_1 s_2} v^{s_1 s_2 l}(x_3) D_{s_1 s_2}(\alpha_1 - s_1 \gamma_1 - \xi_1, \alpha_2 - s_2 \gamma_2 - \xi_2), \quad (35)$$

$\xi_1, \xi_2$  - произвольные постоянные, описывающие наклон падающей волны по отношению к локальной решетке.

Подставляем выражения в исходную систему интегро-дифференциальных уравнений Максвелла в пространственно-частотном представлении (17), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{i}{k} \sum_{m_1 m_2} \frac{\partial v^{m_1 m_2 l}(x_3)}{\partial x_3} D_{m_1 m_2}(\omega_1 - m_1 \gamma_1 - \\ & - \xi_1, \omega_2 - m_2 \gamma_2 - \xi_2) = \\ & = \sum_{s_1 s_2} \sum_{n_1 q} \int \int \langle V^{\omega_1 \omega_2 l} | G_{n_1}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) | V_{\alpha_1 \alpha_2 q} \rangle \times \\ & \times v^{s_1 s_2 q}(x_3) D_{s_1 s_2}(\alpha_1 - s_1 \gamma_1 - \xi_1, \alpha_2 - s_2 \gamma_2 - \xi_2) \times \\ & \times D_{n_1 n_1}(\omega_1 - n_1 \gamma_1 - \alpha_1, \omega_2 - n_1 \gamma_2 - \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned} \quad (36)$$

Вычислим интеграл в правой части (36) методом стационарной фазы [10-12].

Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{k} \sum_{m_1 m_2} \frac{\partial v^{m_1 m_2 l}(x_3)}{\partial x_3} \times \\ & \times D_{m_1 m_2}(\omega_1 - m_1 \gamma_1 - \xi_1, \omega_2 - m_2 \gamma_2 - \xi_2) = \\ & = \sum_{s_1 s_2} \sum_{n_1 q} \langle V^{\omega_1 \omega_2 l} | G_{n_1}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1^s, \alpha_2^s) | V_{\alpha_1^s \alpha_2^s q} \rangle \times \\ & \times v^{s_1 s_2 q}(x_3) \times D_{s_1 + n_1 s_2 + n_2}(\omega_1 - (n_1 + s_1) \gamma_1 - \\ & - \xi_1, \omega_2 - (n_1 + s_2) \gamma_2 - \xi_2), \end{aligned} \quad (37)$$

где стационарные точки

$$\begin{aligned} \alpha_1^s &= \xi_1 + \frac{(\omega_1 - \xi_1) s_1}{n_1 + s_1}, \\ \alpha_2^s &= \xi_2 + \frac{(\omega_2 - \xi_2) s_2}{n_1 + s_2}. \end{aligned}$$

Введем новые обозначения для индексов суммирования в правой части (37)

$$m_1 = n_1 + s_1, \quad m_2 = n_1 + s_2.$$

Тогда в этой новой индексации

$$\begin{aligned} & \frac{i}{k} \sum_{m_1 m_2} \frac{\partial v^{m_1 m_2 l}(x_3)}{\partial x_3} \times \\ & \times D_{m_1 m_2}(\omega_1 - m_1 \gamma_1 - \xi_1, \omega_2 - m_2 \gamma_2 - \xi_2) = \\ & = \sum_{m_1 m_2} \sum_{n_1 q} \langle V^{\omega_1 \omega_2 l} | G_{n_1}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1^s, \alpha_2^s) | V_{\alpha_1^s \alpha_2^s q} \rangle \times \\ & \times v^{m_1 - n_1, m_2 - n_1, q}(x_3) \times \\ & \times D_{m_1 m_2}(\omega_1 - m_1 \gamma_1 - \xi_1, \omega_2 - m_2 \gamma_2 - \xi_2), \end{aligned} \quad (38)$$

и стационарные точки

$$\begin{aligned} \alpha_1^s &= \xi_1 + \frac{(\omega_1 - \xi_1)(m_1 - n_1)}{m_1}, \\ \alpha_2^s &= \xi_2 + \frac{(\omega_2 - \xi_2)(m_2 - n_1)}{m_2}. \end{aligned}$$

Основной вклад в результат вносит функция

$$D_{m_1 m_2}(\omega_1 - m_1 \gamma_1 - \xi_1, \omega_2 - m_2 \gamma_2 - \xi_2)$$

в окрестности точек

$$\omega_1 = m_1 \gamma_1 + \xi_1, \quad \omega_2 = m_2 \gamma_2 + \xi_2.$$

Заменим в выражении для стационарных точек  $\omega_1, \omega_2$  этими значениями.

Далее будем использовать стационарные точки

$$\begin{aligned} \alpha_1^s &= \xi_1 + \gamma_1 (m_1 - n_1), \\ \alpha_2^s &= \xi_2 + \gamma_2 (m_2 - n_1). \end{aligned}$$

Эта замена при малых длинах волн не влияет на точность вычисления интеграла методом стационарной фазы.

Уравнение (38) является функциональным уравнением, так как в него входит зависимость от  $\omega_1, \omega_2$ .

Перейдем от дифференциально-функционального уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого выберем систему линейно-независимых функций  $K_{mn}(\omega_1, \omega_2)$ .

Умножим (38) на каждую из базисных функций и в результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов  $v^{m_1 m_2 l}$ .

Бивекторное поле внутри диэлектрического слоя имеет вид:

$$\begin{aligned} |W_2^{\alpha_1 \alpha_2}(x_3)\rangle &= v^{\alpha_1 \alpha_2 1}(x_3) |V_{\alpha_1 \alpha_2 1}\rangle + \\ & + v^{\alpha_1 \alpha_2 2}(x_3) |V_{\alpha_1 \alpha_2 2}\rangle + \\ & + v^{\alpha_1 \alpha_2 3}(x_3) |V_{\alpha_1 \alpha_2 3}\rangle + \\ & + v^{\alpha_1 \alpha_2 4}(x_3) |V_{\alpha_1 \alpha_2 4}\rangle, \end{aligned} \quad (39)$$

где  $v^{\alpha_1 \alpha_2 l}(x_3)$  описывается выражением (35).

## 2.2. Распространение в свободном пространстве

В пространстве с постоянной диэлектрической проницаемостью в плоскости  $x_3 = 0$  решение системы уравнений Максвелла в пространственно-частотном  $F$ -представлении запишем в виде:

$$\begin{aligned} f_i^{\alpha_1 \alpha_2 l}(x_3) &= \\ & = \sum_{s_1 s_2} f_i^{s_1 s_2 l}(0) D_{s_1 s_2}(\alpha_1 - s_1 \gamma_1 - \\ & - \xi_1, \alpha_2 - s_2 \gamma_2 - \xi_2) \exp(\pm i k \alpha_3 x_3), \\ \alpha_3 &= \sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Знак «+» берется для  $l = 1, 2$ ; знак «-» берется, если  $l = 3, 4$ .

Введем следующие обозначения:

- **область 1** – область, в которой распространяется падающая и отраженная волны (обозначим  $I$  – падающая волна, соответствующая ТМ-поляризации, и  $R$  – падающая волна, соответствующая ТЕ-поляризации);
- $f_1^{\alpha_1 \alpha_2^1} = I^{\alpha_1 \alpha_2^h}$  – коэффициент, описывающий падающую волну, соответствующую ТМ-поляризации. Соответствующий набор коэффициентов  $f_1^{s_1 s_2^1} = I^{s_1 s_2^e}$ ;
- $f_1^{\alpha_1 \alpha_2^2} = I^{\alpha_1 \alpha_2^e}$  – коэффициент, описывающий падающую волну, соответствующую ТЕ-поляризации. Соответствующий набор коэффициентов  $f_1^{s_1 s_2^2} = I^{s_1 s_2^h}$ ;
- $f_1^{\alpha_1 \alpha_2^3} = R^{\alpha_1 \alpha_2^h}$  – коэффициент, описывающий отраженную волну, соответствующую ТМ-поляризации. Соответствующий набор коэффициентов  $f_1^{s_1 s_2^3} = R^{s_1 s_2^e}$ ;
- $f_1^{\alpha_1 \alpha_2^4} = R^{\alpha_1 \alpha_2^e}$  – коэффициент, описывающий отраженную волну, соответствующую ТЕ-поляризации. Соответствующий набор коэффициентов  $f_1^{s_1 s_2^4} = R^{s_1 s_2^h}$ ;
- **область 2** – область, содержащая диэлектрический слой с плоскими границами;
- **область 3** – область, в которой распространяется прошедшая волна;
- $f_3^{\alpha_1 \alpha_2^1} = T^{\alpha_1 \alpha_2^e}$  – коэффициент, описывающий прошедшую волну, соответствующую ТМ-поляризации. Соответствующий набор коэффициентов  $f_3^{s_1 s_2^1} = T^{s_1 s_2^e}$ ;
- $f_3^{\alpha_1 \alpha_2^2} = T^{\alpha_1 \alpha_2^h}$  – коэффициент, описывающий прошедшую волну, соответствующую ТЕ-поляризации. Соответствующий набор коэффициентов  $f_3^{s_1 s_2^2} = T^{s_1 s_2^h}$ .

Бивекторное поле в первой области имеет вид:

$$\begin{aligned} |W_1^{\alpha_1 \alpha_2}(x_3)\rangle &= I^{\alpha_1 \alpha_2^h}(x_3) |F_{\alpha_1 \alpha_2^1}\rangle + \\ &+ I^{\alpha_1 \alpha_2^e}(x_3) |F_{\alpha_1 \alpha_2^2}\rangle + \\ &+ R^{\alpha_1 \alpha_2^h}(x_3) |F_{\alpha_1 \alpha_2^3}\rangle + \\ &+ R^{\alpha_1 \alpha_2^e}(x_3) |F_{\alpha_1 \alpha_2^4}\rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

Бивекторное поле в третьей области имеет вид:

$$\begin{aligned} |W_3^{\alpha_1 \alpha_2}(x_3)\rangle &= T^{\alpha_1 \alpha_2^h}(x_3) |F_{\alpha_1 \alpha_2^1}\rangle + \\ &+ T^{\alpha_1 \alpha_2^e}(x_3) |F_{\alpha_1 \alpha_2^2}\rangle. \end{aligned} \quad (42)$$

Используя (40) и введенные выше обозначения для коэффициентов, получаем выражение для поля в пространственно-частотном представлении.

### 2.3. Сшивка решений

В предыдущих пунктах были записаны решения системы уравнений Максвелла в пространственно-частотном представлении в области диэлектрического слоя и в области свободного пространства в виде линейной комбинации с неизвестными коэффициентами. В настоящем пункте рассмотрим решение задачи дифракции плоской волны на диэлектрическом слое с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , представленной в форме (19).

Условие сшивки на первой границе – равенство бивекторных полей на границе раздела

$$W_1^{\alpha_1 \alpha_2}(0) = W_2^{\alpha_1 \alpha_2}(0). \quad (43)$$

Условие сшивки на второй границе – аналогично (43):

$$W_2^{\alpha_1 \alpha_2}(D) = W_3^{\alpha_1 \alpha_2}(D), \quad (44)$$

где  $D$  – толщина диэлектрического слоя.

Эти условия служат для определения коэффициентов  $T^{\alpha_1 \alpha_2^e}$ ,  $T^{\alpha_1 \alpha_2^h}$ ,  $R^{\alpha_1 \alpha_2^e}$ ,  $R^{\alpha_1 \alpha_2^h}$ . Таким образом, сшивка приводит к системе линейных алгебраических уравнений.

## 3. Коротковолновые асимптотики

### 3.1. Поле внутри слоя модуляции ДОЭ

Рассмотрим теперь случай, когда длина волны освещающего пучка стремится к нулю (коротковолновая асимптотика). В этом случае

$$D_{m_1 m_2}(\omega_1, \omega_2) = \delta(\omega_1, \omega_2). \quad (45)$$

Используя линейную независимость  $\delta$ -функций, получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{i}{k} \frac{\partial v^{m_1 m_2 l}(x_3)}{\partial x_3} &= \\ &= \sum_{n_1 q} \left\langle V^{\omega_1^0 \omega_2^0 l} \left| G_{n_1}(\omega_1^0 \omega_2^0, \alpha_1^{st}, \alpha_2^{st}) \right| V_{\alpha_1^{st} \alpha_2^{st} q} \right\rangle \cdot \\ &\cdot v^{m_1 - n_1 m_2 - n_1 q}(x_3), \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1^{st} &= \xi_1 + \gamma_1(m_1 - n_1), \quad \alpha_2^{st} = \xi_2 + \gamma_2(m_2 - n_1), \\ \omega_1^0 &= m_1 \gamma_1 + \xi_1, \quad \omega_2^0 = m_2 \gamma_2 + \xi_2. \end{aligned}$$

Запишем систему уравнений только для подмножества индексов  $m_1 = m_2$ .

$$\begin{aligned} \frac{i}{k} \frac{\partial v^{m_1 m_1 l}(x_3)}{\partial x_3} &= \\ &= \sum_{n_1 q} \left\langle V^{\omega_1^0 \omega_2^0 l} \left| G_{n_1}(\omega_1^0 \omega_2^0, \alpha_1^{st}, \alpha_2^{st}) \right| V_{\alpha_1^{st} \alpha_2^{st} q} \right\rangle \cdot \\ &\cdot v^{m_1 - n_1 m_1 - n_1 q}(x_3), \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\alpha_1^{st} = \xi_1 + \gamma_1 (m_1 - n_1), \quad \alpha_2^{st} = \xi_2 + \gamma_2 (m_1 - n_1),$$

$$\omega_1^0 = m_1 \gamma_1 + \xi_1, \quad \omega_2^0 = m_1 \gamma_2 + \xi_2.$$

Далее введем новые индексы суммирования  $p_1 = m_1 - n_1$ :

$$\frac{i}{k} \frac{\partial v^{m_1 l}(x_3)}{\partial x_3} = \sum_{p_1 q} \left\langle V^{\omega_1^0 \omega_2^0 l} \left| G_{m_1 - p_1}(\omega_1^0, \omega_2^0, \alpha_1^{st}, \alpha_2^{st}) \right| V_{\alpha_1^{st} \alpha_2^{st} q} \right\rangle \cdot v^{p_1 q}(x_3), \quad (48)$$

где

$$\alpha_1^{st} = \xi_1 + \gamma_1 p_1, \quad \alpha_2^{st} = \xi_2 + \gamma_2 p_1,$$

$$\omega_1^0 = m_1 \gamma_1 + \xi_1, \quad \omega_2^0 = m_1 \gamma_2 + \xi_2.$$

Обозначим

$$\gamma_1 = \gamma \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \gamma \sin \varphi.$$

Легко показать, что справедливы тождества

$$\begin{bmatrix} \xi_1 + \gamma \cos \varphi p_1 \\ \xi_2 + \gamma \sin \varphi p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 + \gamma p_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 + \gamma \cos \varphi m_1 & \xi_1 + \gamma \cos \varphi m_1 \\ \xi_2 + \gamma \sin \varphi p_1 & \xi_2 + \gamma \sin \varphi p_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\xi_2 - \gamma \sin \varphi p_1 & \xi_1 + \gamma \cos \varphi p_1 \\ -\xi_2 - \gamma \sin \varphi p_1 & \xi_2 + \gamma \cos \varphi p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 + \gamma m_1 & \tilde{\xi}_1 + \gamma p_1 \\ \tilde{\xi}_2 & \tilde{\xi}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\tilde{\xi}_2 & \tilde{\xi}_1 + \gamma p_1 \\ -\tilde{\xi}_2 & \tilde{\xi}_1 + \gamma p_1 \end{bmatrix}.$$

Используя эти тождества, можно доказать соотношение

$$\left\langle V^{\omega_1^0 \omega_2^0} \left| G_{m_1 - p_1}(\omega_1^0, \omega_2^0, \alpha_1^{st}, \alpha_2^{st}) \right| V_{\alpha_1^{st} \alpha_2^{st} q} \right\rangle = \left\langle V^{\tilde{\omega}_1^0 \tilde{\omega}_2^0} \left| G_{m_1 - p_1}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \right| V_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 q} \right\rangle, \quad (49)$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\xi}_1 + \gamma_1 p_1, \quad \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\xi}_2,$$

$$\tilde{\omega}_1 = m_1 \gamma_1 + \tilde{\xi}_1, \quad \tilde{\omega}_2 = \tilde{\xi}_2.$$

Следует отметить, что матричные элементы в правой части (49) соответствуют задаче конической дифракции [19] на одномерной периодической решетке.

Для дальнейшего анализа запишем уравнение в виде:

$$\frac{i}{k} \frac{\partial v^{m_1 l}}{\partial x_3} = H_{p_1 q}^{m_1 l} v^{p_1 q}(x_3), \quad (50)$$

где

$$H_{p_1 q}^{m_1 l} = \left\langle V^{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 l} \left| G_{m_1 - p_1}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \right| V_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 q} \right\rangle. \quad (51)$$

Структура оператора Гамильтона-Максвелла такова, что отличны от нуля только следующие восемь матричных элементов

$$H_{p_1 3}^{m_1 1} = \left\langle V^{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 1} \left| A_{m_1 - p_1}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \right| V_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 3} \right\rangle,$$

$$H_{p_1 4}^{m_1 1} = \left\langle V^{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 1} \left| A_{m_1 - p_1}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \right| V_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 4} \right\rangle,$$

$$H_{p_1 3}^{m_1 2} = \left\langle V^{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 2} \left| A_{m_1 - p_1}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \right| V_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 3} \right\rangle,$$

$$H_{p_1 4}^{m_1 2} = \left\langle V^{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 2} \left| A_{m_1 - p_1}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \right| V_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 4} \right\rangle, \quad (52)$$

$$H_{p_1 1}^{m_1 3} = \left\langle V^{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 3} \left| B_{m_1 - p_1}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \right| V_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 1} \right\rangle,$$

$$H_{p_1 2}^{m_1 3} = \left\langle V^{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 3} \left| B_{m_1 - p_1}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \right| V_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 2} \right\rangle,$$

$$H_{p_1 1}^{m_1 4} = \left\langle V^{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 4} \left| B_{m_1 - p_1}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \right| V_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 1} \right\rangle,$$

$$H_{p_1 2}^{m_1 4} = \left\langle V^{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 4} \left| B_{m_1 - p_1}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \right| V_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 2} \right\rangle.$$

В последних выражениях использовались ненулевые компоненты соответствующих четырехмерных векторов.

Система распадается на две системы уравнений:

$$\frac{i}{k} \frac{\partial v^{m_1 l}(x_3)}{\partial x_3} = \sum_{p_1} \sum_{q=3,4} H_{p_1 q}^{m_1 l} v^{p_1 q}(x_3) = \sum_{p_1} \sum_{q=3,4} A_{p_1 q}^{m_1 l} v^{p_1 q}(x_3), \quad (53)$$

$l=1, 2,$

$$\frac{i}{k} \frac{\partial v^{m_1 l}(x_3)}{\partial x_3} = \sum_{p_1} \sum_{q=1,2} H_{p_1 q}^{m_1 l} v^{p_1 q}(x_3) = \sum_{p_1} \sum_{q=1,2} B_{p_1 q}^{m_1 l} v^{p_1 q}(x_3), \quad (54)$$

$l=3, 4.$

Полученные системы можно свести к системам уравнений второго порядка. При этом вдвое сокращается размерность системы уравнений:

$$-\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 v^{m_1 l}(x_3)}{\partial (x_3)^2} = M_{ns}^{ml} v^{ns}(x_3),$$

$$v^{s;l}(x_3) = \sum_{mn} E_{mn}^{s;l} (a^{+mn} \exp(ik\mu_{mn} x_3) + a^{-mn} \exp(-ik\mu_{mn} (x_3 - D))), \quad (55)$$

$$\sum_{nl} M_{nl}^{sq} E_{pn}^{ml} = \mu_{pn}^2 E_{pn}^{sq},$$

$$M_{ns}^{ml} = \sum_p \sum_{q=3,4} A_{pq}^{ml} B_{ns}^{pq},$$

$l=1, 2,$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 v^{m,l}(x_3)}{\partial (x_3)^2} = N_{ns}^{ml} v^{ns}(x_3), \\
v^{s_1 l}(x_3) &= \sum_{mn} P_{mn}^{s_1 l} \left( a^{+mn} \exp(ik\mu_{mn} x_3) + \right. \\
& \left. + a^{-mn} \exp(-ik\mu_{mn}(x_3 - D)) \right), \quad (56) \\
\sum_{pl} N_{pl}^{sq} P_{mn}^{pl} &= \mu_{mn}^2 P_{mn}^{sq}, \\
N_{ns}^{ml} &= \sum_p \sum_{q=1,2} B_{pq}^{ml} A_{ns}^{pq}, \\
l &= 3, 4,
\end{aligned}$$

$D$  - толщина диэлектрического слоя.

В случае, когда плоская волна падает перпендикулярно к плоскости дифракционного оптического элемента, или радиально-симметричная волна падает на радиально-симметричный оптический элемент, имеем частный случай  $\tilde{\xi}_2 = 0$ . В этом случае уравнения для коэффициентов, описывающих распространение поля внутри слоя, имеют вид:

$$\frac{i}{k} \frac{\partial v^{m_1 1}(x_3)}{\partial x_3} = A_{p_1 3}^{m_1 1} v^{p_1 3}(x_3), \quad (57)$$

$$\frac{i}{k} \frac{\partial v^{m_1 2}(x_3)}{\partial z} = A_{p_1 4}^{m_1 2} v^{p_1 4}(x_3), \quad (58)$$

$$\frac{i}{k} \frac{\partial v^{m_1 3}(x_3)}{\partial z} = A_{p_1 1}^{m_1 3} v^{p_1 1}(x_3), \quad (59)$$

$$\frac{i}{k} \frac{\partial v^{m_1 4}(x_3)}{\partial z} = A_{p_1 2}^{m_1 4} v^{p_1 2}(x_3). \quad (60)$$

При стремлении длины волны освещающего пучка к нулю выражение для поля внутри слоя имеет вид:

$$\begin{aligned}
v^{\alpha_1 \alpha_2 l}(x_3) &= \\
&= \sum_{s_1} v^{s_1 l}(x_3) \delta(\alpha_1 - s_1 \gamma_1 - \xi_1, \alpha_2 - s_1 \gamma_2 - \xi_2). \quad (61)
\end{aligned}$$

В этом случае каждая система уравнений распадается на две. Каждая из полученных систем имеет меньшую размерность. Эти уравнения могут быть также сведены к системам уравнения второго порядка. Факторизация приводит к тому, что в данной системе могут распространяться волны, для которых направление электрического и магнитного полей совпадает с направлением локальной решетки, или их суперпозиция.

### 3.2. Коротковолновые асимптотики для прошедшего и отраженного полей в свободном пространстве

При стремлении к нулю длины волны освещающего пучка выражение для отраженного поля

$$\begin{aligned}
R^{\alpha_1 \alpha_2 e}(x_3) &= \\
&= \sum_{s_1} R^{s_1 e} \delta(\alpha_1 - s_1 \gamma_1 - \xi_1, \alpha_2 - s_1 \gamma_2 - \xi_2) \times \\
&\times \exp(-ik\alpha_3 x_3), \quad (62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{\alpha_1 \alpha_2 h}(x_3) &= \\
&= \sum_{s_1} R^{s_1 h} \delta(\alpha_1 - s_1 \gamma_1 - \xi_1, \alpha_2 - s_1 \gamma_2 - \xi_2) \times \\
&\times \exp(-ik\alpha_3 x_3).
\end{aligned}$$

Для прошедшего поля

$$\begin{aligned}
T^{\alpha_1 \alpha_2 e}(x_3) &= \sum_{s_1} T^{s_1 e} \delta(\alpha_1 - s_1 \gamma_1 - \\
&- \xi_1, \alpha_2 - s_1 \gamma_2 - \xi_2) \exp(ik\alpha_3(x_3 - D)), \\
T^{\alpha_1 \alpha_2 h}(x_3) &= \sum_{s_1} T^{s_1 h} \delta(\alpha_1 - s_1 \gamma_1 - \\
&- \xi_1, \alpha_2 - s_1 \gamma_2 - \xi_2) \exp(ik\alpha_3(x_3 - D)).
\end{aligned}$$

### 3.3. Условия сшивки полей

Условие непрерывности электрического и магнитного полей приводит к формулам для расчета локальных коэффициентов отражения и пропускания:

$$\begin{aligned}
v^{s_1 k}(0) &= I^{s_1 h}(0) \langle V^{\alpha_1 \alpha_2 k} \parallel F_{\alpha_1 \alpha_2 1} \rangle + \\
&+ I^{s_1 e}(0) \langle V^{\alpha_1 \alpha_2 k} \parallel F_{\alpha_1 \alpha_2 2} \rangle + \\
&+ R^{s_1 h}(0) \langle V^{\alpha_1 \alpha_2 k} \parallel F_{\alpha_1 \alpha_2 3} \rangle + \\
&+ R^{s_1 e}(0) \langle V^{\alpha_1 \alpha_2 k} \parallel F_{\alpha_1 \alpha_2 4} \rangle, \quad (63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^{s_1 k}(D) &= T^{s_1 k}(D) \langle V^{\alpha_1 \alpha_2 k} \parallel F_{\alpha_1 \alpha_2 1} \rangle + \\
&+ T^{s_1 e}(D) \langle V^{\alpha_1 \alpha_2 k} \parallel F_{\alpha_1 \alpha_2 1} \rangle,
\end{aligned}$$

где  $\alpha_1 = s_1 \gamma + \xi_1$ ,  $\alpha_2 = s_1 \gamma + \xi_2$ .

Нетрудно показать, что преобразование поворота не изменяет скалярное произведение

$$\langle V^{\alpha_1 \alpha_2 k} \parallel F_{\alpha_1 \alpha_2 s} \rangle = \langle V^{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 k} \parallel F_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 s} \rangle,$$

где  $\tilde{\alpha}_1 = s_1 \gamma + \tilde{\xi}_1$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = s_1 \gamma + \tilde{\xi}_2$ .

Следует отметить, что полученная система линейных уравнений совпадает с системой уравнений для определения коэффициентов дифракционной решетки в случае конической дифракции [2, 19].

### 3.4. Поле на выходе оптического элемента в случае $\tilde{\xi}_2 = 0$

В случае, когда плоская волна падает перпендикулярно к плоскости дифракционного оптического элемента, или радиально-симметричная волна падает на радиально-симметричный оптический элемент, имеем частный случай  $\tilde{\xi}_2 = 0$ . Учитывая формулы (28а), поле на выходе ДОЭ в пространственном представлении в переменных  $y_1, y_2$  имеет вид:



$$\begin{aligned}
|W\rangle = & \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( T^{\alpha_1 \alpha_2 e} (x_3) |F_{\alpha_1 \alpha_2 1}\rangle + T^{\alpha_1 \alpha_2 h} (x_3) |F_{\alpha_1 \alpha_2 2}\rangle \right) \times \\
& \times \exp(ik(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) x_3) d\alpha_1 d\alpha_2,
\end{aligned} \quad (64)$$

где  $|F_{\alpha_1 \alpha_2 m}\rangle$  – базисные вектора  $F$ -представления.

Коэффициенты  $T^{s_1 e}$ ,  $T^{s_1 h}$ , входящие в выражения (62), для случая  $\tilde{\xi}_2 = 0$  имеют вид:

$$T^{s_1 e} = a(0,0)T_h^{s_1}(0,0); \quad T^{s_1 h} = b(0,0)T_e^{s_1}(0,0).$$

Коэффициент  $a(0,0)$  описывает вклад падающей волны в случае, когда направление электрического поля совпадает с направлением штрихов локальной дифракционной решетки.

Коэффициент  $b(0,0)$  описывает вклад падающей волны в случае, когда направление магнитного поля совпадает с направлением штрихов локальной дифракционной решетки.  $T_h^{s_1}(0,0)$ ,  $T_e^{s_1}(0,0)$  – коэффициенты дифракции в  $s_1$  порядке для случая, когда направление магнитного и электрического (соответственно) поля параллельно штрихам дифракционной решетки.

Вычисляем интеграл в выражении (64), получаем поле в пространственном представлении в переменных  $y_1, y_2$

$$\begin{aligned}
|W(\vec{y})\rangle = & \sum_{n_1} a(0,0)T_h^{n_1}(0,0) |F_{\xi_1 + \gamma_1 n_1 \quad \gamma_2 n_1 + \xi_2 1}\rangle \times \\
& \times \exp(ikn_1 g(0,0)) \exp(ik\vec{\gamma} n_1) + \\
& + \sum_{n_1} b(0,0)T_e^{n_1}(0,0) |F_{\xi_1 + \gamma_1 n_1 \quad \gamma_2 n_1 + \xi_2 2}\rangle \times \\
& \times \exp(ikn_1 g(0,0)) \exp(ik\vec{\gamma} n_1).
\end{aligned} \quad (65)$$

Теперь необходимо перейти от координат  $y_1, y_2$  к координатам  $x_1, x_2$ . Этот переход осуществляется с помощью преобразования вращения. Поле в точке  $\vec{x}_0$

$$\begin{aligned}
|W(\vec{x}_0)\rangle = & \\
= & \sum_{n_1} a(0,0)T_h^{n_1}(0,0)ZZ |F_{\xi_1 + \gamma_1 n_1 \quad \gamma_2 n_1 + \xi_2 1}\rangle \times \\
& \times \exp(ikn_1 g(0,0)) + \\
& + \sum_{n_1} b(0,0)T_e^{n_1}(0,0)ZZ |F_{\xi_1 + \gamma_1 n_1 \quad \gamma_2 n_1 + \xi_2 2}\rangle \times \\
& \times \exp(ikn_1 g(0,0)).
\end{aligned} \quad (66)$$

Матрица  $ZZ$  имеет вид

$$ZZ = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}.$$

Напомним, что матрица  $Z$  имеет вид (23).

Для получения окончательного результата определим  $a$  и  $b$ , которые описывают падающую волну.

Бивектор электромагнитного поля падающей волны в плоскости  $x_3 = 0$  в координатах  $(y_1, y_2)$ , когда исходная электромагнитная волна падает перпендикулярно модулированной дифракционной решетке и вектор поляризации направлен вдоль оси  $x_2$ , имеет вид:

$$W(0,0) = (a(\vec{x}_0)|F_1\rangle + b(\vec{x}_0)|F_2\rangle), \quad (67)$$

где

$$\begin{aligned}
|F_1\rangle = & \begin{pmatrix} \alpha_3 \cos \varphi \|W_e\|^{-1} \\ \alpha_3 \sin \varphi \|W_e\|^{-1} \\ -\sin \varphi \sqrt{\varepsilon} \|W_e\|^{-1} \\ \cos \varphi \sqrt{\varepsilon} \|W_e\|^{-1} \end{pmatrix}, \\
|F_2\rangle = & \begin{pmatrix} \sin \varphi (\|W_h\| \sqrt{\varepsilon})^{-1} \\ -\cos \varphi (\|W_h\| \sqrt{\varepsilon})^{-1} \\ \alpha_3 \cos \varphi \|W_h\|^{-1} \\ \alpha_3 \sin \varphi \|W_h\|^{-1} \end{pmatrix},
\end{aligned} \quad (68)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Базисные вектора выбраны таким образом, чтобы электрическое поле в первом базисном бивекторе и магнитное поле во втором базисном бивекторе были направлены вдоль штрихов локальной дифракционной решетки.

Поле (67) в координатах  $(x_1, x_2)$  описывается выражением

$$W(\vec{x}_0) = ZZ(a(\vec{x}_0)|F_1\rangle + b(\vec{x}_0)|F_2\rangle), \quad (69)$$

$$\begin{aligned}
ZZ|F_1\rangle = & \begin{pmatrix} \alpha_3 \cos \omega \|W_e\|^{-1} \\ \alpha_3 \sin \omega \|W_e\|^{-1} \\ -\sin \omega \sqrt{\varepsilon} \|W_e\|^{-1} \\ \cos \omega \sqrt{\varepsilon} \|W_e\|^{-1} \end{pmatrix}, \\
ZZ|F_2\rangle = & \begin{pmatrix} \sin \omega (\|W_h\| \sqrt{\varepsilon})^{-1} \\ -\cos \omega (\|W_h\| \sqrt{\varepsilon})^{-1} \\ \alpha_3 \cos \omega \|W_h\|^{-1} \\ \alpha_3 \sin \omega \|W_h\|^{-1} \end{pmatrix},
\end{aligned} \quad (70)$$

$$\omega = \varphi + \theta.$$

Бивектор, описывающий подающую волну в случае, когда она нормально падает на элемент, имеет вид:

$$W = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{\varepsilon} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Для определения  $a$  и  $b$  необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{\varepsilon} \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -\cos \omega \\ -\sin \omega \\ \sin \omega \sqrt{\varepsilon} \\ -\cos \omega \sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -\sin \omega \\ \cos \omega \\ -\cos \omega \sqrt{\varepsilon} \\ -\sin \omega \sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (72)$$

В этом случае

$$a = -\sqrt{2} \sin(\varphi + \theta), \quad b = \sqrt{2} \cos(\varphi + \theta)$$

и окончательное выражение для электромагнитного поля на выходе модулированной дифракционной решетки имеет вид:

$$\begin{aligned} |W(\vec{x}_0)\rangle = & \\ = \sqrt{2} \sum_n ZZ \left( -\sin(\varphi + \theta) T_h^{n_1}(\vec{x}_0) \left| F_{\gamma_1 n_1, \gamma_2 n_1, 1} \right\rangle + \right. & (73) \\ \left. + \cos(\varphi + \theta) T_e^{n_1}(\vec{x}_0) \left| F_{\gamma_1 n_1, \gamma_2 n_1, 2} \right\rangle \right) \exp(ikn_1 g(\vec{x}_0)), & \end{aligned}$$

где  $T_e^{n_1} = T_e^{n_1}(\vec{x}_0)$ ,  $T_h^{n_1} = T_h^{n_1}(\vec{x}_0)$ , – коэффициенты дифракции на локальной решетке для  $E$ - и  $H$ -поляризации, соответственно. В случае, когда вектор поляризации направлен вдоль оси  $x_1$ :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -\cos \omega \\ -\sin \omega \\ \sin \omega \sqrt{\varepsilon} \\ -\cos \omega \sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -\sin \omega \\ \cos \omega \\ -\cos \omega \sqrt{\varepsilon} \\ -\sin \omega \sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad (74)$$

$$a = -\sqrt{2} \cos(\varphi + \theta), \quad b = -\sqrt{2} \sin(\varphi + \theta), \quad (75)$$

и выражение для поля принимает вид:

$$\begin{aligned} |W(\vec{x}_0)\rangle = & \\ = -\sqrt{2} \sum_n ZZ \left( \cos(\varphi + \theta) T_h^{n_1}(\vec{x}_0) \left| F_{\gamma_1 n_1, \gamma_2 n_1, 1} \right\rangle + \right. & (76) \\ \left. + \sin(\varphi + \theta) T_e^{n_1}(\vec{x}_0) \left| F_{\gamma_1 n_1, \gamma_2 n_1, 2} \right\rangle \right) \exp(ikn_1 g(\vec{x}_0)). & \end{aligned}$$

#### 4. Асимптотики

##### для псевдопериодических структур в рамках электромагнитной теории

В данном пункте рассмотрим применение вышеизложенных методов для расчета поля в случае дифракции волны на ДОЭ, которые обладают зонной структурой. В предыдущем разделе мы рассматривали дифракцию на модельном ДОЭ. Рас-

смотрим теперь диэлектрический слой с диэлектрической проницаемостью, которая описывается выражением (19). Случай, когда функция  $g(x_1, x_2)$  является линейной, будет соответствовать чисто периодической структуре (дифракционной решетке). В случае, когда функция  $g(x_1, x_2)$  не является линейной, получаем дифракционную структуру с изменяющимся периодом.

Для того чтобы воспользоваться результатами предыдущего раздела, сделаем предположение о том, что поле в данной точке зависит от распределения диэлектрической проницаемости только в окрестности данной точки. Это предположение основано на принципе локализации, который рассмотрен выше. Далее разложим функцию  $g(x_1, x_2)$  в окрестности точки  $\vec{x}_0$  в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка.

Полученное выражение по форме совпадает с выражением для поля на выходе дифракционного оптического элемента, полученного в рамках метода нелинейного предсказания фазы, рассмотренного в работах [16, 17]. Оно также объясняет возможность использования приближения тонкого оптического элемента. Отличие состоит в том, что коэффициенты  $T_e^{n_1} = T_e^{n_1}(\vec{x}_0)$  и  $T_h^{n_1} = T_h^{n_1}(\vec{x}_0)$  имеют другой физический смысл. Напомним, что в методе предсказания коэффициент  $T_e^{n_1} = T_e^{n_1}(\vec{x}_0) = T_h^{n_1} = T_h^{n_1}(\vec{x}_0)$  совпадал с коэффициентом разложения в ряд Фурье функции предсказания. В нашем случае он определяется согласно методу, изложенному в предыдущем разделе настоящей работы.

#### 5. Расчет поля фокусатора в кольцо

Рассмотрим поле от фокусатора в кольцо. В этом случае функция  $g(r)$  имеет вид:

$$g(r) = \sqrt{(r - r_0)^2 + f^2}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (77)$$

$r_0$  – радиус кольца фокусировки.

По аналогии с (76) следует, что электромагнитное поле на выходе дифракционного оптического элемента, фокусирующего в кольцо, имеет вид:

$$\begin{aligned} |W(x_1, x_2)\rangle = & \\ = \sqrt{2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \sum_n ZZ \left( T_h^n \left| F_{\gamma_n 0 1} \right\rangle + \right. & (78) \\ \left. + T_e^n \left| F_{\gamma_n 0 2} \right\rangle \right) \exp(ikng(r)), & \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{\partial g(r)}{\partial r}.$$

Были проведены расчеты распределения интенсивности электромагнитного излучения в фокальной плоскости фокусатора в кольцо для различных сочетаний параметров системы.

Вычисление поля проводилось на основе распределения поля на выходе ДООЭ (78) с помощью пропатора, описанного в работе [13].

На рис. 2 приведены примеры расчета полей от фокусатора в кольцо для значений, указанных в табл. 1 (все размеры в мкм). При малых отношениях  $\sigma/f$ , где  $\sigma$  – параметр освещающего гауссова пучка, распределение интенсивности в фокальной плоскости фокусатора в кольцо близко к распределениям интенсивности, полученным в работах [18,20,21] в рамках скалярного приближения. В этом случае распределение энергии практически радиально-симметрично. При увеличении фокусного расстояния степень симметричности увеличивается. При увеличении отношения  $\sigma/f$  в распределении энергии вдоль кольца появляется асимметричность. Наличие асимметричности связано со следующими факторами:

- наличие линейной поляризации у падающей волны нарушает радиальную симметрию задачи, так как в разных точках фокальной плоскости электрические поля от различных точек на фокусаторе приходят под разными углами;
- при увеличении отношения  $\sigma/f$  появляется зависимость коэффициентов дифракции от направления локальной дифракционной решетки в случае линейной поляризации падающей волны.

Неравномерность интенсивности излучения в плоскости наблюдения на выходе из фокусатора в кольцо обусловлена неравномерностью значений коэффициентов пропускания (отражения)  $E$ - и  $H$ -поляризации в зависимости от текущего значения периода зонной структуры (дифракционной решетки).

### Заключение

В данной статье представлен асимптотический метод решения задач дифракции на ДООЭ, который сочетает в себе решение задачи дифракции на периодической структуре с периодом сравнимым с длиной волны и геометрикооптический подход. Решена задача дифракции на эталонной квазипериодической структуре, сочетающей в себе функции расщепителя пучка и дифракционной линзы. На основе решения эталонной задачи получено простое выражение для поля в плоскости, непосредственно прилегающей к ДООЭ. Полученное выражение позволяет оценить распределение поля на выходе ДООЭ, не прибегая к сложным вычислительным методам.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-07-97601, 07-07-96602, 08-07-99005, 07-07-91580-АСП, а также российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (“BRHE”).

Таблица 1

Параметр	Значение (вариант 1), мкм	Значение (вариант 2), мкм
Длина волны $\lambda$	1	0,1
Параметр гауссова пучка $\sigma$	50	50
Расстояние от оптического элемента до плоскости наблюдения	1000	100
Фокусное расстояние	1000	100
Габаритные размеры оптического элемента	500×500	500×500

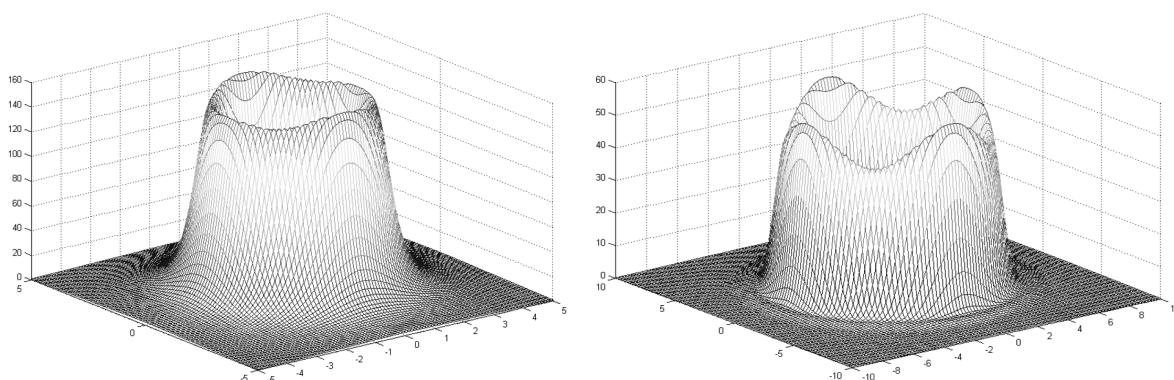


Рис. 2. Рассчитанные распределения интенсивности поля в фокальных плоскостях фокусаторов в кольцо с параметрами, приведенными в Табл. 1 (вариант 1 – слева; вариант 2 – справа).

### Литература

1. **Кравцов, В.В.** Геометрическая оптика неоднородных сред / В.В. Кравцов, А.А. Орлов. – М.: Наука, 1979.
2. **Moharam, M.G.** Rigorous coupled-wave analysis of metallic surface-relief gratings / M.G. Moharam, T.K. Gaylord // JOSA A., 1986. – Vol. 3. – Issue 11. – P. 1780.
3. **Taflove, A.** Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method (2nd ed.) / A. Taflove, S. Hagness – Artech House Publishers, Boston, 2000. – P. 852.
4. **Ильинский, А.С.** Математические модели электродинамики. / А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников. – М.: Высшая школа, 1991.

5. **Харитонов, С.И.** Асимптотические решения скалярного волнового уравнения / С.И. Харитонов, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский // Компьютерная оптика, 2003. – № 25. – С. 49-53.
6. **Досколович, Л.Л.** Асимптотические решения уравнения Гельмгольца для псевдопериодических структур / Л.Л. Досколович [и др.] // Компьютерная оптика, 2005. – № 27. – С. 50-55.
7. **Досколович, Л.Л.** Асимптотические методы для решения задач дифракции на ДОО / Л.Л. Досколович [и др.] // Компьютерная оптика, 2006. – № 30. – С. 49-52.
8. **Ковалев, А.А.** Дифракция плоской волны на ограниченной спиральной фазовой пластинке: параксиальная теория / А.А. Ковалев, В.В. Котляр // Компьютерная оптика, 2007. – №31. – С. 4-8.
9. **Котляр, В.В.** Методы быстрого расчета дифракции лазерного излучения на микрообъектах / В.В. Котляр, Р.В. Скиданов, А.Г. Налимов // Оптический журнал, 2005. – Т.72, №5. – С. 55-61.
10. **Борн, М.** Основы Оптики / М. Борн, Э. Вольф. – Pergamon Press, 1986.
11. **Виноградова, М.Б.** Теория волн / М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. – М.: Наука, 1976.
12. **Федорюк, М.В.** Асимптотики, интегралы и ряды / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1987.
13. **Казанский, Н.Л.** Компактная запись решений системы уравнений Максвелла в пространственно-частотном представлении / Н.Л. Казанский, М.Л. Каляев, С.И. Харитонов // Антенны, 2007. – № 10. – С. 13-21.
14. **Дирак, П.** Принципы квантовой механики / П. Дирак. – М.: Мир, 1979.
15. **Дубровин, Б.А.** Современная геометрия / Б.А. Дубровин [и др.]. – М.: Наука, 1979.
16. **Golub, M.A.** Computer generated diffractive multi-focal lens / M.A. Golub [and other] // Journal of Modern Optics, 1992. – Vol.39, № 6. – P. 1245-1251.
17. **Голуб, М.А.** Дифракционный подход к синтезу многофункциональных фазовых элементов / М.А. Голуб [и др.] // Оптика и спектроскопия, 1992. – Т.73, №1. – С. 191-195.
18. **Голуб, М.А.** Дифракционный расчет оптического элемента, фокусирующего в кольцо / М.А. Голуб [и др.] // Автометрия, 1987. – № 6. – С. 8-15.
19. **Electromagnetic Theory on Gratings / Ed. by R.Petit.** – Springer-Verlag, 1980.
20. **Голуб, М.А.** Вычислительный эксперимент с элементами плоской оптики / М.А. Голуб [и др.] // Автометрия, 1988. – № 1. – С. 70-82.
21. **Казанский, Н.Л.** Исследование дифракционных характеристик фокусатора в кольцо методом вычислительного эксперимента / Н.Л. Казанский // Компьютерная оптика. – М.: МЦНТИ, 1992. – Вып.10-11. – С. 128-144.