

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ ОБЩЕГО ВИДА И ИХ ИЗВЕСТНЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

А.А. Ковалев, В.В. Котляр

Институт систем обработки изображений Российской академии наук,
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

Показано, что полученное недавно трехпараметрическое семейство точных решений парааксиального волнового уравнения (типа Шредингера), которое названо гипергеометрическими лазерными пучками, включает в себя как частные случаи известные семейства лазерных пучков – гауссовы гипергеометрические лазерные пучки и элегантные пучки Лагерра-Гаусса.

Введение

Недавно авторами было рассмотрено новое семейство парааксиальных лазерных пучков, комплексная амплитуда которых описывается конфлюэнтной гипергеометрической функцией [1]. Эти гипергеометрические пучки (ГГ-пучки), описываются трехпараметрическим семейством функций и является обобщением двухпараметрического семейства решений парааксиального волнового уравнения (типа Шредингера), которые рассматривались в [2]. Также, эти ГГ-пучки [1] являются обобщением ранее рассмотренных гипергеометрических мод [3]. ГГ-моды обладают бесконечной энергией как и известные моды Бесселя, и на практике могут быть реализованы только приближенно. Недавно в [4] были рассмотрены гауссовы гипергеометрические пучки, которые обладают конечной энергией (хотя они уже не являются модами, так как при распространении меняют структуру поперечной интенсивности).

В данной работе показано, что ГГ-пучки являются обобщением гауссовых гипергеометрических лазерных пучков (ГГГ-пучков) [4] и хорошо известных элегантных пучков Лагерра-Гаусса (эЛГ-пучки) [5].

1. Общий вид гипергеометрических пучков

В работе [1] рассматриваются гипергеометрические лазерные пучки (ГГ-пучки), комплексная амплитуда которых описывается трехпараметрическим семейством функций. Эти пучки являются обобщением гипергеометрических мод [4] и двухпараметрических гипергеометрических пучков [2]. В этом разделе мы кратко, следуя [1], повторим вывод ГГ-пучков.

Рассмотрим световое поле с начальной функцией комплексного пропускания вида:

$$E_{\gamma m}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r}{w}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\gamma \ln \frac{r}{w} + in\varphi\right), \quad (1)$$

где (r, φ) – полярные координаты в начальной плоскости ($z=0$), w и γ – действительные параметры логарифмического аксикона, σ – радиус перетяжки гауссова пучка, n – целый порядок спиральной фазовой пластинки (СФП) (топологический заряд), m – целое число. Комплексная амплитуда (1) описывает световое поле с бесконечной энергией и с особенностью при $r=0$ и $m < 0$. Несмотря на это в любой другой поперечной плоскости на расстоянии z

от начальной плоскости комплексная амплитуда светового поля, порожденная функцией (1), уже не будет иметь особенности и будет конечной.

При парааксиальном распространении светового поля (1) его комплексная амплитуда на расстоянии z будет определяться преобразованием Френеля, которое в полярных координатах имеет вид:

$$E(\rho, \theta, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \iint_{R^2} E(r, \varphi, 0) \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[\rho^2 + r^2 - 2pr \cos(\varphi - \theta)]\right\} r dr d\varphi, \quad (2)$$

где (ρ, θ) – полярные координаты в плоскости, отстоящей на расстоянии z от начальной плоскости, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны.

При вихревом поле во входной плоскости, т.е. при $E(\rho, \theta, 0) = A(r) \exp(in\varphi)$, уравнение (2) примет вид:

$$E(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \frac{k}{z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \times \int_0^\infty A(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{kpr}{z}\right) r dr. \quad (3)$$

Известен справочный интеграл [6]:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-px^2) J_\nu(cx) dx = c^\nu p^{-\frac{\nu+\alpha}{2}} 2^{-\nu-1} \times \times \Gamma\left(\frac{\nu+\alpha}{2}\right) \Gamma^{-1}(\nu+1) {}_1F_1\left(\frac{\nu+\alpha}{2}, \nu+1, -\frac{c^2}{4p}\right). \quad (4)$$

Тогда преобразование Френеля от (1) имеет вид:

$$E_{\gamma m}(\rho, \theta, z) = \frac{1}{2\pi n! \rho w^{m+i\gamma}} \times \times \left(-\frac{ik\rho}{2z}\right)^{n+1} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \times \times \left(\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{ik}{2z}\right)^{-\frac{n+m+2+i\gamma}{2}} \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}\right) \times \times {}_1F_1\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -\frac{\left(\frac{k\rho}{2z}\right)^2}{2\sigma^2 - \frac{ik}{2z}}\right). \quad (5)$$

Обозначим $z_0 = k\sigma^2$, $q = (1 - iz_0/z)^{1/2}$. Тогда вместо (5) получим:

$$E_{\gamma m}(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{zq^2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{wq}\right)^{m+i\gamma} \times \\ \times \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz}\right)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}\right) \times \\ \times {}_1F_1\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz}\right)^2\right), \quad (6)$$

Выражение (6) описывает комплексную амплитуду параксиальных гипергеометрических лазерных пучков общего вида. Сокращенно: ГГ-пучки. Модуль комплексной амплитуды (6) пропорционален функции Куммера:

$$|E_{\gamma m}(\rho, \theta, z)| \sim x^{\frac{n}{2}} |{}_1F_1(a, b, -x)|, \quad (7)$$

где x – комплексный аргумент:

$$x = \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz}\right)^2. \quad (8)$$

Функция Куммера или конфлюэнтная гипергеометрическая функция имеет вид [7]:

$${}_1F_1(a, b, -x) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l (-1)^l x^l, \quad (9)$$

где

$$C_l = \frac{\Gamma(a+l)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+l)l!}, \quad (10)$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функция.

2. Гауссовы гипергеометрические пучки

В работе [4] рассмотрены гауссовы гипергеометрические пучки (ГГГ-пучки). Эти пучки обладают конечной энергией, но при распространении в пространстве, в отличие от ГГ-мод [3], они меняют вид поперечного распределения интенсивности, оставаясь радиально-симметричными пучками. Эти пучки не образуют ортогональный базис, в отличие от ГГ-мод. Покажем, что ГГГ-пучки являются частным случаем ГГ-пучков. Перепишем (6) с новым обозначением $w = \sqrt{2}\sigma$:

$$E_{\gamma m}(r', \phi', z) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{zq^2}\right) \left(\frac{1}{q}\right)^{m+i\gamma} \times \\ \times \left(\frac{kwr'}{2qz}\right)^n \exp\left(\frac{ikr'^2}{2z} + in\phi'\right) \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}\right) \times \\ \times {}_1F_1\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -\left(\frac{kwr'}{2qz}\right)^2\right). \quad (11)$$

При $\gamma = 0$ вместо (11) получим в безразмерных единицах:

$$E_{0nm}(\rho', \phi', z) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \frac{1}{\zeta - i} \zeta^{\frac{m-n}{2}} (\zeta - i)^{-\frac{m+n}{2}} \times \\ \times \rho'^n \exp\left(\frac{i\rho'^2}{\zeta} + in\phi'\right) \Gamma\left(\frac{n+m+2}{2}\right) \times \\ \times {}_1F_1\left(\frac{n+m+2}{2}, n+1, -\frac{\rho'^2}{\zeta(\zeta - i)}\right), \quad (12)$$

где

$$\begin{cases} \rho' = r'/w, \\ \zeta = z/z_0, \\ z_0 = kw^2/2, \\ q^2 = (\zeta - 1)/\zeta. \end{cases} \quad (13)$$

Положим в (13) $m = n + p$ и воспользуемся известным соотношением для конфлюэнтной гипергеометрической функции [7]:

$${}_1F_1(a, b, -x) = \exp(-x) {}_1F_1(b-a, b, x), \quad (14)$$

тогда вместо (12) получим:

$$E_{0,n,n+p}(\rho', \phi', z) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi} \frac{\Gamma\left(n+1+\frac{p}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \times \\ \times \zeta^{\frac{p}{2}} (\zeta - i)^{-\left(n+1+\frac{p}{2}\right)} \rho'^n \exp\left(\frac{i\rho'^2}{\zeta - i} + in\phi'\right) \times \\ \times {}_1F_1\left(-\frac{p}{2}, n+1, \frac{\rho'^2}{\zeta(\zeta - i)}\right). \quad (15)$$

Выражение (15) отличается от аналогичного выражения, полученного в [4] (кроме константы), только знаками перед мнимой единицей в $\zeta - i$, $(-i)^{n+1}$ и $i\rho'^2$. Действительно, в [4] рассмотрены ГГГ-пучки с комплексной амплитудой:

$$|HyGG\rangle_{pm} = u_{pm}(\rho, \phi, \zeta) = \\ = C_{pm} \frac{\Gamma\left(1+|m|+\frac{p}{2}\right)}{\Gamma(1+|m|)} i^{|m|+1} \zeta^{\frac{p}{2}} (\zeta + i)^{-[1+|m|+p/2]} \times \\ \times \rho^{|m|} \exp[-i\rho^2/(\zeta + i)] \exp(im\phi) \times \\ \times {}_1F_1\left(-\frac{p}{2}, |m|+1, \frac{\rho^2}{\zeta(\zeta + i)}\right). \quad (16)$$

3. Элегантные пучки Лагерра-Гаусса

Для того чтобы показать, что эЛГ-пучки [5] являются частным случаем ГГ-пучков, перепишем выражение для ГГ-пучков общего вида (6) при $m = -1$ и с учетом соотношения (14), выделив явно гауссову экспоненту:

$$\begin{aligned}
 E_{\gamma, n, -1}(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \times \\
 &\times \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{wq} \right)^{-1+i\gamma} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta \right) \times \\
 &\times \Gamma\left(\frac{n+1+i\gamma}{2} \right) \exp\left[-\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right] \times \\
 &\times {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Далее воспользуемся известным соотношением для конфлюэнтной гипергеометрической функции [7]:

$${}_1F_1(-n, \alpha+1, x) = \frac{n!}{(\alpha+1)_n} L_n^{(\alpha)}(x), \tag{18}$$

где $L_n^{(\alpha)}(x)$ - присоединенные многочлены Лагерра, $(\alpha+1)_n$ - символ Похгаммера. Из сравнения (17) и (18) видно, что для того, чтобы получить моду Лагерра-Гаусса с индексами (p, s) , нужно чтобы выполнялись равенства:

$$\begin{cases} n+1 = s+1, \\ \frac{n+1-i\gamma}{2} = -p. \end{cases} \tag{19}$$

При условии (19) вместо (17) получим:

$$\begin{aligned}
 E_{-i(s+1+2p), s, -1}(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{s+1}}{2\pi s!} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \times \\
 &\times \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{wq} \right)^{-1+s+1+2p} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^s \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + is\theta \right) \times \\
 &\times \Gamma\left(\frac{s+1+s+1+2p}{2} \right) \exp\left[-\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right] \\
 &\times {}_1F_1\left(\frac{s+1-(s+1+2p)}{2}, s+1, \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right).
 \end{aligned} \tag{20}$$

После несложных преобразований с учетом (18) вместо (20) окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 E_{-i(s+1+2p), s, -1}(\rho, \theta, z) &= \\
 &= \frac{(-i)^{s+1} p!}{2\pi} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{wq} \right)^{s+2p} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^s \times \\
 &\times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2q^2 z} + is\theta \right) L_p^{(s)}\left[\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{21}$$

Выражение (21) имеет вид, несколько отличный от общепринятого вида элегантных пучков ЛГ [5]

$$\begin{aligned}
 E(\rho, \theta, z) &= (-i)^{p+1} \left(\frac{z_0}{q^2 z} \right)^{p+1} \left(-\frac{i\omega^2 z_0}{w^2 q^2 z} \right)^{\frac{n}{2}} \times \\
 &\times \left(-\frac{ik\rho^2}{2q^2 z} \right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2q^2 z} + in\theta \right) L_p^n\left(-\frac{ik\rho^2}{2q^2 z} \right).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Выражение (22) имеет форму $x^{n/2} \exp(-x) L_p^n(x)$, а форма выражения (21) отличается от (22) постоянными множителями и аргументом полинома Лагерра. Таким образом, обнаружена еще одна разновидность элегантных пучков ЛГ, которые являются частным случаем ГГ-пучков.

4. Численное моделирование

При численном моделировании преобразование Френеля от поля (1) вычислялось по методу прямоугольников и сравнивалось со значениями, получаемыми при использовании формулы (6). Таким образом было проверено полученное выражение (6).

Результаты моделирования приведены на рис. 1. Были использованы следующие значения параметров: длина волны $\lambda = 633$ нм, радиус перетяжки Гауссова пучка $\sigma = 1$ мм, порядок СФП $n = 3$, показатель степенной составляющей амплитуды $m = 0$, расстояние вдоль оптической оси $z = 500$ мм.

Из рис. 1 видно, что при дифракции Гауссова пучка на СФП и логарифмическом аксиконе формируется кольцевое распределение интенсивности с дополнительными боковыми лепестками (кольцами). Радиус первого кольца и энергию боковых лепестков можно изменять, меняя параметр γ .

На рис. 2 показаны радиальные распределения модуля амплитуды для элегантных пучков Лагерра-Гаусса при распространении в свободном пространстве. В выражении (21) были использованы следующие значения параметров: длина волны $\lambda = 633$ нм, радиус перетяжки Гауссова пучка $\sigma = 10$ мкм, порядок СФП $n = 3$, показатель степенной составляющей амплитуды $m = -1$, параметр логарифмического аксикона $\gamma = -12i$ (т.е. пучок эЛГ имеет индекс (4, 3)).

Такие картины дифракции могут быть получены при прохождении Гауссова пучка через спиральную пластинку и амплитудный фильтр с пропусканием, пропорциональным степенной функции ρ^{11} .

Из рис. 2 видно, что элегантные пучки ЛГ не являются модами, т.к. структура поперечной интенсивности меняется (хотя и не сильно). Видно также, что энергия боковых лепестков существенно меньше, чем на рис. 1.

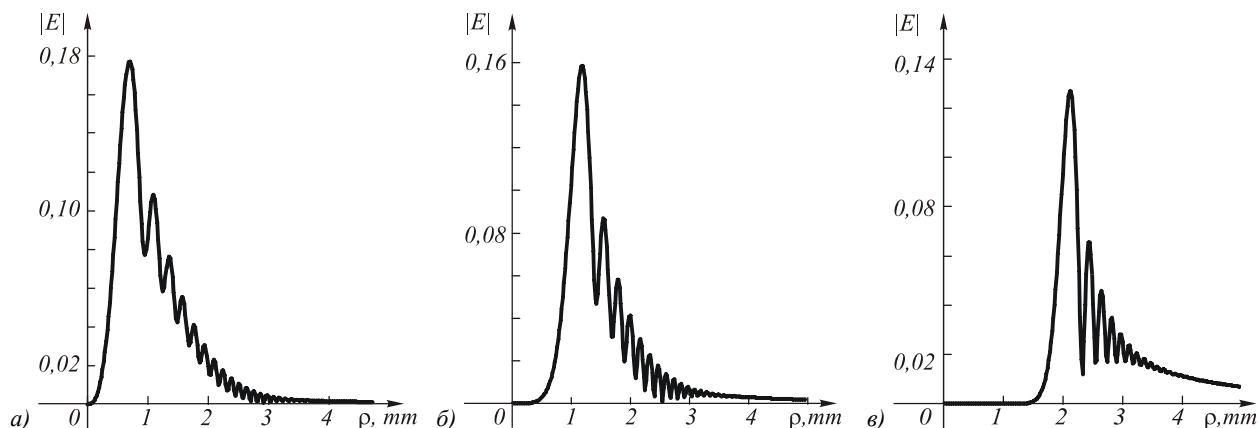


Рис. 1 Модуль комплексной амплитуды, описывающей дифракцию Френеля от функции (1), вычисленные с помощью интеграла (3) и аналитической формулы (6) при $t=0$: $\gamma=0$ (а), $\gamma=5$ (б), $\gamma=20$ (в)

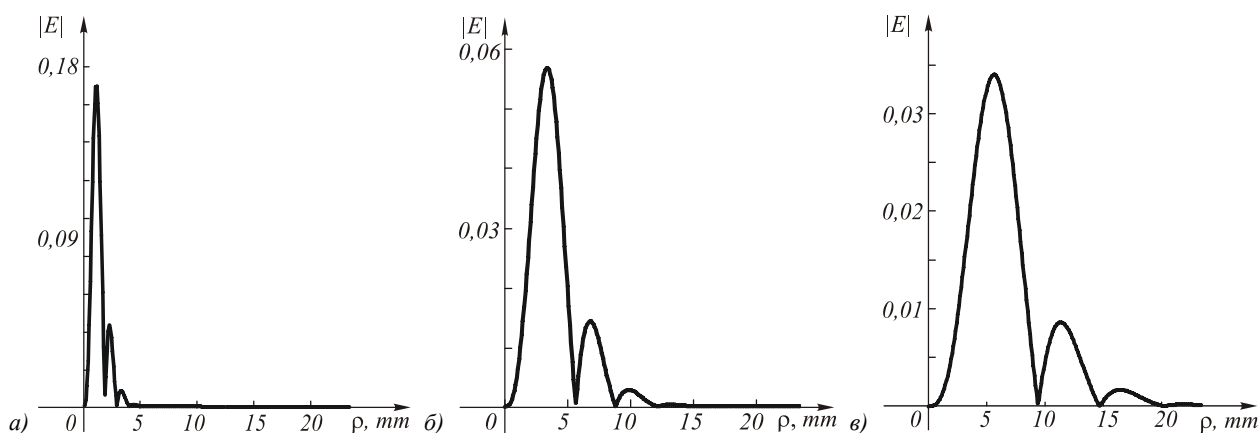


Рис. 2 Распространение элегантных пучков Лагерра-Гаусса. Радиальные распределения модуля амплитуды при $z=100$ мм (а), $z=300$ мм (б), $z=500$ мм (в)

Заключение

В работе показано, что полученное недавно трехпараметрическое семейство точных решений параксиального волнового уравнения (типа Шредингера), которое названо гипергеометрическими лазерными пучками, включает в себя как частные случаи известные семейства лазерных пучков: гауссовы гипергеометрические лазерные пучки и элегантные пучки Лагерра-Гаусса.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-Sa-06), а также гранта РФФИ 05-08-50298 и 07-07-97600.

Литература

1. **Kotlyar, V.** A family of hypergeometric laser beams / V. Kotlyar, A. Kovalev // J.Opt.Soc.Am. A (Early Posting, manuscript ID 87775, posted 15 November 2007).
2. **Ковалев, А.А.** Параксиальные гипергеометрические лазерные пучки с особенностью в центре перетяжки / А.А. Ковалев [и др.] // Компьютерная оптика, 2007. – Т.31, № 1. – С. 9-13.
3. **Kotlyar, V.V.** Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar [and other] // Opt.Lett., 2007. – V.32, no.7. – P. 742-744.
4. **Karimi, E.** Hypergeometric-Gaussian modes / E. Karimi [and other] // Opt.Lett., 2007. – V.32. – P. 3053-3055.
5. **Takenaka, T.** Propagation of light beams beyond the paraxial approximation / T. Takenaka, M. Yokota, O. Fukumitsu // J.Opt.Soc.Am. A, 1985. – V.2. – P. 826-829.
6. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев – М.: Наука, 1983.
7. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана – М.: Наука, 1979.