

## ПОСТРОЕНИЕ УВЕЛИЧЕННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ СО СВЕРХРАЗРЕШЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ ПЛАНАРНЫХ ЛМ

Ковалёв А.А., Налимов А.Г., Котляр В.В.

Институт систем обработки изображений РАН,

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва  
(национальный исследовательский университет)

### Аннотация

С помощью принципа Ферма получена оценка для положения изображения внеосевого точечного источника, формируемого двумя разными линзами Микаэляна, расположенными вплотную друг за другом. Для системы двух градиентных линз Микаэляна, одна из которых в 2,5 раза больше другой, с помощью конечно-разностного FDTD-метода получено изображение двух точечных источников света со сверхразрешением (расстояние между источниками –  $0,28\lambda$ ) и с линейным увеличением, равным 2,1 (изображения разделены расстоянием  $0,59\lambda$ ), а для линейно расширяющейся (тейпированной) линзы Микаэляна получено линейное увеличение 3,14 (изображения двух источников разделены расстоянием  $0,88\lambda$ ).

**Ключевые слова:** дифракционный предел, сверхразрешение, планарная линза Микаэляна, гиперболическая секансная линза, принцип Ферма.

### Введение

Одной из важнейших характеристик любой изображающей оптической системы является оптическое увеличение, показывающее соотношение между размерами предмета и сформированного изображения данного предмета. Традиционно в геометрической теории изображений используют три вида увеличений – линейное (часто называют поперечным), угловое (называют также коэффициентом сходимости) и продольное [1, раздел 4.3.1]. Данная работа посвящена градиентным элементам микрооптики, строящим изображение с линейным увеличением и при этом обладающим сверхразрешающей способностью, заключающейся в разделимости изображений двух источников, разделённых расстоянием меньше половины длины волны света в вакууме.

Достижение такого сверхразрешения стало возможным в последние годы с развитием нанофотоники. В частности, это возможно с помощью суперлинз [2], представляющих собой, например, чередующиеся слои металла и диэлектрика. Эксперименты по сверхразрешению с помощью таких линз были осуществлены в [3, 4]. В [3] было достигнуто сверхразрешение, равное  $0,4\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны. Аналогичный эксперимент был проведён в [5] с помощью субволнового слоя серебра, который также работает как суперлинза. В этой работе были разрешены две линии, разделённые расстоянием 145 нм при освещении их ультрафиолетовым светом с длиной волны 365 нм. То есть в [5] было также достигнуто сверхразрешение, равное  $0,4\lambda$ . В упомянутых работах использованы оптические элементы, включающие в себя металлические компоненты, проходя через которые свет будет поглощаться. В работах авторов [6, 7] рассмотрены градиентные элементы для построения изображения со сверхразрешением. Эти элементы полностью диэлектрические и не поглощают свет, но линейное увеличение в этих системах равнялось единице, т.е. формируемое изображение оставалось субволновым.

В работе [8] рассмотрена гиперлинза, строящая увеличенное изображение. Численно показано, что с помощью гиперлинзы, состоящей из 160 чередующихся 10-нанометровых слоёв из серебра (при  $\lambda=365$  нм) и диэлектрика ( $\epsilon \approx 2,7$ ), можно сформировать увеличенное (примерно в 5 раз) изображение двух источников, разделённых расстоянием  $\lambda/4,5$ . Однако эта гиперлинза также включает в себя металл, и, хотя в работе [8] написано, что поглощение света несущественно, количественные данные о потерях не приводятся. Кроме того, источник света должен быть помещён внутрь цилиндрической гиперлинзы, т.е. в цилиндрическую полость, диаметр которой не указан, но, судя по рисункам в [8], примерно равен 200 нм. Это представляется непростой технической задачей.

В данной работе рассматривается построение увеличенного изображения с помощью линз Микаэляна (ЛМ) [9], состоящих полностью из диэлектриков. С использованием принципа Ферма предсказано положение изображения внеосевого источника, формируемого двумя кремниевыми ЛМ, расположенными вплотную друг к другу. Кремний для длины волны  $\lambda > 1$  мкм почти не поглощает свет. Показано, что в оптической системе из двух ЛМ, одна из которых вдвое больше другой, изображение, формируемое внеосевым точечным источником, расположенным на расстоянии  $u$  от оптической оси, не находится на расстоянии, вдвое большем от оптической оси (т.е.  $2u$ ), а представляет собой световое пятно, основная энергия которого заключена в пределах  $(3,7u; 2u)$ . Построение изображения с помощью двух линз и с помощью одной линейно расширяющейся ЛМ исследовано численно с помощью конечно-разностного FDTD-метода. Для системы двух ЛМ, одна из которых в 2,5 раза больше другой, получено изображение двух точечных источников света с линейным увеличением, равным 2,1. Для линейно расширяющейся ЛМ получено линейное увеличение 3,14. В обоих случаях были разрешены точечные источники, разделённые расстоянием  $0,28\lambda$ .

**1. Уравнение траектории луча в градиентном волноводе**

Пусть дан планарный градиентный волновод с оптической осью  $x$  и зависимостью показателя преломления от поперечной координаты  $n(y)$ . Пусть луч света соединяет точки  $A$  и  $B$  с координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  (рис. 1).

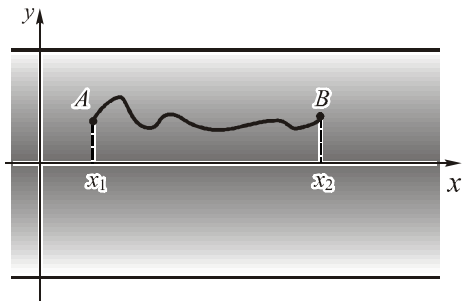


Рис. 1. Однородный градиентный волновод и световой луч, соединяющий две произвольные точки  $A$  и  $B$

Согласно принципу Ферма, световой луч проходит по траектории  $y(x)$ , обеспечивающей минимальный оптический путь, т.е. минимум следующего функционала:

$$L[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} n(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \tag{1}$$

Известно, что такие задачи можно решать с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа [10], которое для функционала (1) выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{n(y)} \frac{dn}{dy} = \frac{y''}{1 + (y')^2}. \tag{2}$$

Умножив обе части на  $2y'$  и проинтегрировав по переменной  $x$ , получим выражение для производной траектории луча  $y(x)$ :

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{Cn^2(y) - 1}, \tag{3}$$

где  $C$  – постоянная.

Данное дифференциальное уравнение решается в радикалах, если искать траекторию луча через обратную функцию  $x(y)$ :

$$x(y) = \pm \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{Cn^2(t) - 1}} + D, \tag{4}$$

где  $D$  – постоянная.

Это уравнение является уравнением траектории луча для произвольного планарного градиентного волновода. Далее получим это уравнение для градиентного секансного волновода.

**2. Уравнение траектории луча в градиентном секансном волноводе**

В работах [11-12] приведён вывод уравнения луча в градиентном секансном волноводе. Кратко повторим его с помощью уравнения (4).

Пусть распределение показателя преломления задано в виде гиперболического секанса:

$$n(y) = \frac{n_0}{\text{ch}\left(\frac{y}{a}\right)}, \tag{5}$$

где  $n_0$  – показатель преломления на оси волновода (т.е. при  $y=0$ ),  $a$  – параметр, определяющий ширину волновода и задающий скорость спада показателя преломления от оси волновода к его краям.

Подставив это выражение в уравнение для траектории луча (4), получим:

$$x(y) = D \pm a \arcsin \left[ \frac{\text{sh}\left(\frac{y}{a}\right)}{\sqrt{n_0^2 C - 1}} \right]. \tag{6}$$

Из полученного уравнения выразим явно  $\text{sh}(y/a)$  через  $x$ :

$$\text{sh}\left(\frac{y}{a}\right) = \sqrt{n_0^2 C - 1} \sin\left(\frac{x - D}{a}\right). \tag{7}$$

Знак « $\pm$ » в (7) опущен, так как изменение «+» на «-» достигается прибавлением  $\pi a$  к константе  $D$ . Обозначим  $(n_0^2 C - 1)^{1/2} \cos(D/a)$  как  $C$ , а  $(n_0^2 C - 1)^{1/2} \sin(D/a)$  как  $-D$ . Тогда уравнение траектории луча в градиентном секансном волноводе примет вид:

$$\text{sh}\left(\frac{y}{a}\right) = C \sin\left(\frac{x}{a}\right) + D \cos\left(\frac{x}{a}\right). \tag{8}$$

Пусть в плоскости  $x=x_1$  луч проходит через точку с координатами  $(x_1, y_1)$  и тангенс угла наклона луча к оптической оси равен  $\alpha$  (рис. 2).

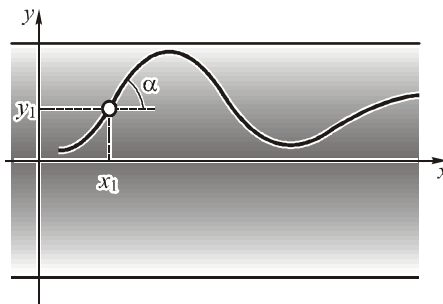


Рис. 2. Задание луча, распространяющегося в градиентном гиперболическом секансном волноводе, расстоянием от оптической оси  $y_1$  и углом наклона к ней  $\alpha$  в некоторой опорной плоскости  $x = x_1$

Получим уравнение для такого луча, продифференцировав (8) по  $x$ :

$$\begin{aligned} \text{sh}\left(\frac{y}{a}\right) &= \alpha \text{ch}\left(\frac{y_1}{a}\right) \sin\left(\frac{x - x_1}{a}\right) + \\ &+ \text{sh}\left(\frac{y_1}{a}\right) \cos\left(\frac{x - x_1}{a}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

По аналогии с матричными методами расчёта оптических систем будем описывать луч двумя координатами, задающими точку пересечения луча с некоторой опорной плоскостью, а также наклон луча

к оптической оси. Первой координатой будем считать величину  $\text{sh}(y/a)$ , а второй –  $\text{ch}(y/a)$  ( $dy/dx$ ).

Тогда из (9) нетрудно получить, что в матричной форме распространение луча описывается следующим уравнением:

$$\begin{bmatrix} \text{sh}\left(\frac{y}{a}\right) \\ \text{ch}\left(\frac{y}{a}\right) \frac{dy(x)}{dx} \end{bmatrix} = T\left(\frac{x-x_1}{a}\right) \begin{bmatrix} \text{sh}\left(\frac{y_1}{a}\right) \\ \text{ch}\left(\frac{y_1}{a}\right) \frac{dy(x_1)}{dx} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где

$$T(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Из этого уравнения следует, что при  $x=x_1 + \pi a$  ( $m$  – целое)  $y=(-1)^m y_1$ , независимо от угла наклона луча  $\alpha$ . Это означает, что даже для неосевого точечного источника света сохраняется гомоцентричность пучка лучей и формируется точечное изображение.

### 3. Числовая апертура при построении изображения в градиентном гиперболическом секансном волноводе

Очевидно, реальный волновод ограничен по ширине, которая для волновода (5) определяется, например, спадом показателя преломления до единицы. В этом случае не каждый луч, проходящий через некоторую точку, останется в волноводе, часть лучей выйдет через край волновода. Чтобы определить самый крайний луч, найдём точки траектории луча, в которых он максимально удаляется от оптической оси. Для этого в левой части (10) приравняем производную  $y'(x)$  к нулю. Тогда получим, что луч максимально удаляется от оптической оси в точках (точки поворота луча) с координатами  $x_{\text{extr}}$ , удовлетворяющих уравнению

$$\text{th}\left(\frac{y_1}{a}\right) \text{tg}\left(\frac{x_{\text{extr}} - x_1}{a}\right) = \alpha. \quad (12)$$

Далее будем рассматривать градиентную линзу, которая представляет собой усечённый волновод длиной  $\pi a$ . Из уравнения (12) видно, что если  $y_1$  и  $\alpha$  одного знака, то  $x_{\text{extr}} < x_1 + \pi a/2$  (луч 1 на рис. 3), а если  $y_1$  и  $\alpha$  разных знаков, то  $x_1 + \pi a/2 < x_{\text{extr}} < x_1 + \pi a$  (луч 2 на рис. 3).

Согласно (9), (12), максимальное удаление луча от оси описывается следующим уравнением:

$$\text{sh}\left(\frac{y_{\text{extr}}}{a}\right) = \pm \sqrt{\text{sh}^2\left(\frac{y_1}{a}\right) + \alpha^2 \text{ch}^2\left(\frac{y_1}{a}\right)}. \quad (13)$$

На краю волновода  $n(y_{\text{extr}})=1$ , значит,  $\text{sh}(y_{\text{extr}}/a) = (n_0^2 - 1)^{1/2}$ . Из этого условия можно найти максимальный угол наклона  $\alpha_{\text{max}}$ , при котором луч не выйдет из волновода, а будет распространяться в нём, формируя в точке  $(x_1 + \pi a, -y_1)$  изображение точечного источника, расположенного в точке  $(x_1, y_1)$ :

$$\alpha_{\text{max}} = \pm \sqrt{\frac{n_0^2}{\text{ch}^2\left(\frac{y_1}{a}\right)} - 1}. \quad (14)$$

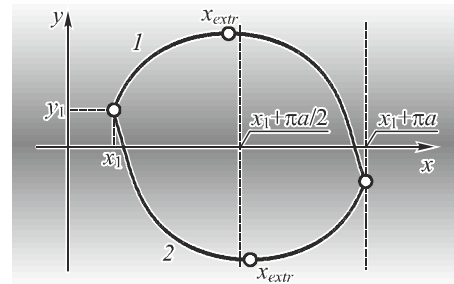


Рис. 3. Планарный гиперболический секансный волновод и световые лучи, соединяющие точку предмета  $(x_1, y_1)$  и точку изображения  $(x_1 + \pi a, -y_1)$

Это означает, что при удалении точечного источника от оптической оси числовая апертура лучей, формирующих изображение такого источника, будет уменьшаться. В точке изображения синус максимального угла луча с оптической осью равен:

$$\sin \theta = \frac{|\alpha_{\text{max}}|}{\sqrt{1 + \alpha_{\text{max}}^2}} = \sqrt{1 - \frac{\text{ch}^2\left(\frac{y_1}{a}\right)}{n_0^2}}, \quad (15)$$

а числовая апертура равна

$$NA = n(y) \sin \theta = \sqrt{\frac{n_0^2}{\text{ch}^2\left(\frac{y_1}{a}\right)} - 1}. \quad (16)$$

Для осевого источника света ( $y_1=0$ ) числовая апертура равна  $NA = (n_0^2 - 1)^{1/2}$ , что совпадает с [11]. Для источника на краю волновода (т.е.  $\text{ch}(y_1) = n_0$ ) числовая апертура равна нулю и формируемое световое пятно изображения бесконечно расплывается.

### 4. Построение увеличенного изображения с помощью двух ЛМ

Рассмотрим градиентную линзу, которая представляет собой усечённый гиперболический секансный волновод длиной  $\pi a/2$ . Такая линза известна как ЛМ [9]. Пусть дана оптическая система, состоящая из двух таких линз с параметрами  $a_1 = 2L_1/\pi$  и  $a_2 = 2L_2/\pi$  ( $a_1 < a_2$ ,  $L_1, L_2$  – длины линз), расположенных вплотную друг к другу (рис. 4). Пусть в передней плоскости первой линзы ( $x = x_1$ ) расположен точечный источник вблизи оптической оси на расстоянии  $y_1$  ( $y_1 \ll a_1$ ).

Согласно (11), для обеих линз матрица  $T$  имеет вид:

$$T(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Тогда из (10) следует, что в задней плоскости первой линзы световые лучи будут описываться координатами:

$$\begin{cases} \operatorname{sh}\left(\frac{y_2}{a_1}\right) = \alpha_1 \operatorname{ch}\left(\frac{y_1}{a_1}\right), \\ \alpha_2 \operatorname{ch}\left(\frac{y_2}{a_1}\right) = -\operatorname{sh}\left(\frac{y_1}{a_1}\right), \end{cases} \quad (18)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – тангенсы углов наклона луча к оптической оси в плоскостях  $x_2 = x_1$  и  $x_2 = x_1 + \pi a_1 / 2$  соответственно.

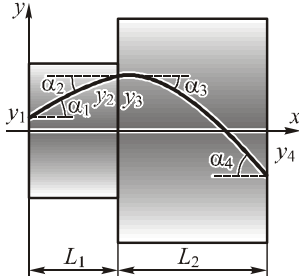


Рис. 4. Оптическая система из двух ЛМ

Из второго уравнения (18) и близости источника к оптической оси ( $y_1 \ll a_1$ ) следует (так как  $\operatorname{ch}(y_2/a_1) \geq 1$ ), что  $|\alpha_2| \ll 1$ . Поэтому при записи закона преломления на границе первой и второй линзы можно вместо синусов писать тангенсы:

$$\frac{n_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{y_2}{a_1}\right)} \alpha_2 = -\frac{n_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{y_3}{a_2}\right)} \alpha_3, \quad (19)$$

где  $y_3$  и  $\alpha_3$  – расстояние до оптической оси от луча и тангенс наклона луча к оптической оси в плоскости границы двух линз. Очевидно,  $y_3 = y_2$ , т.е. обозначение  $y_3$  введено для единообразия индексов. Снова применим преобразование лучей (10), но уже для второй линзы. Обозначим  $y_4$  и  $\alpha_4$  – расстояние до оптической оси от луча и тангенс наклона луча к оптической оси в задней плоскости второй линзы (т.е. в плоскости  $x_2 = x_1 + \pi a_1 / 2 + \pi a_2 / 2$ ):

$$\begin{cases} \operatorname{sh}\left(\frac{y_4}{a_2}\right) = \alpha_3 \operatorname{ch}\left(\frac{y_3}{a_2}\right), \\ \alpha_4 \operatorname{ch}\left(\frac{y_4}{a_2}\right) = -\operatorname{sh}\left(\frac{y_3}{a_2}\right). \end{cases} \quad (20)$$

Выразив из (19) явно  $\alpha_3$  через  $\alpha_2$ , выразив явно  $\alpha_2$  из (18) и подставив полученное выражение для  $\alpha_3$  в первое уравнение (20), получим:

$$\operatorname{sh}\left(\frac{y_4}{a_2}\right) = -\frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{y_2}{a_2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{y_2}{a_1}\right)} \operatorname{sh}\left(\frac{y_1}{a_1}\right). \quad (21)$$

Данное уравнение позволяет определить положение точки пересечения луча в задней плоскости второй линзы, зная положение источника в передней плоскости первой линзы. Легко видеть, что если источник света осевой ( $y_1 = 0$ ), то все лучи из него соберутся в одной точке и сформируют осевое изображение ( $y_4 = 0$ ). Также видно, что при  $a_1 = a_2$  лучи

снова соберутся в одной точке и сформируют симметричное относительно оптической оси изображение источника независимо от того, осевой он или нет. Однако при  $a_1 \neq a_2$  и  $y_1 \neq 0$  изображение сформировано не будет, так как координата  $y_4$  зависит от того, какой угол имел луч с оптической осью в начальной плоскости  $x = x_1$ .

Отношение квадратов гиперболических косинусов в (21) не может превышать единицу, так как  $a_1 < a_2$ . Источник света расположен недалеко от оси, т.е.  $y_1 \ll a_1$ . Из этого следует, что гиперболические синусы в обеих частях (21) примерно равны своим аргументам и точка пересечения луча задней плоскости второй линзы может быть приближённо определена следующим образом:

$$y_4 = -\frac{a_2}{a_1} \frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{y_2}{a_2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{y_2}{a_1}\right)} y_1. \quad (22)$$

Для луча, выходящего из источника параллельно оптической оси ( $\alpha_1 = 0$ ), из (18) следует, что  $y_2 = 0$  и согласно (22)

$$y_4 = -\frac{a_2}{a_1} y_1. \quad (23)$$

Для луча, проходящего через самый край первой линзы, справедливо соотношение:  $\operatorname{ch}(y_2/a_1) = n_0$ , а значит,

$$\operatorname{ch}\left(\frac{y_2}{a_2}\right) = \frac{1}{2} \left[ \left( n_0 + \sqrt{n_0^2 - 1} \right)^{a_1/a_2} + \left( n_0 - \sqrt{n_0^2 - 1} \right)^{a_1/a_2} \right]. \quad (24)$$

В частности, при  $a_2 = 2a_1$  получим:

$$\operatorname{ch}\left(\frac{y_2}{a_2}\right) = \sqrt{\frac{n_0 + 1}{2}}, \quad (25)$$

т.е.

$$y_4 = -\frac{n_0 + 1}{n_0^2} y_1. \quad (26)$$

Это означает, что при  $a_2 = 2a_1$  изображение точечного источника, находящегося на расстоянии  $y_1$  от оси двойной ЛМ из кремния ( $n_0 = 3,47$ ), не будет находиться на расстоянии  $2y_1$  от оси, а будет расплываться, причём основная доля энергии будет сосредоточена между расстояниями  $0,37y_1$  и  $2y_1$  от оптической оси.

Численное моделирование проводилось FDTD-методом. Как принято в оптике, оптическая ось обозначим  $z$ , а поперечную координату –  $x$ . Параметры моделирования были следующими (рис. 4): материал обеих линз – кремний (показатель преломления на оси  $n_0 = 3,47$ ), длина волны света – 1,55 мкм, длина первой линзы – 1 мкм (ширина – 2,44 мкм), второй – 2 мкм (ширина – 4,88 мкм), расчётная область –  $-3\lambda \leq x \leq 3\lambda$ ,  $-0,2\lambda \leq z \leq 2,5\lambda$ , время моделирования  $60\lambda/c$ , где  $c$  – скорость света в вакууме, шаг дискретизации по обеим координатам –  $\lambda/50$ , по времени –  $\lambda/(100c)$ .

Источник света – плоская волна шириной  $\lambda/50$ , расстояние от источника до передней плоскости первой линзы –  $\lambda/50$ . Расстояние от центра источника света до оптической оси варьировалось и составляло  $0,1\lambda, 0,2\lambda, 0,3\lambda, 0,4\lambda, 0,5\lambda, 0,6\lambda$ . Измеритель-

ный экран помещался на расстоянии  $\lambda/50$  от задней плоскости второй линзы. На рис. 5 показаны распределения интенсивности света в плоскости измерительного экрана для всех шести положений источника.

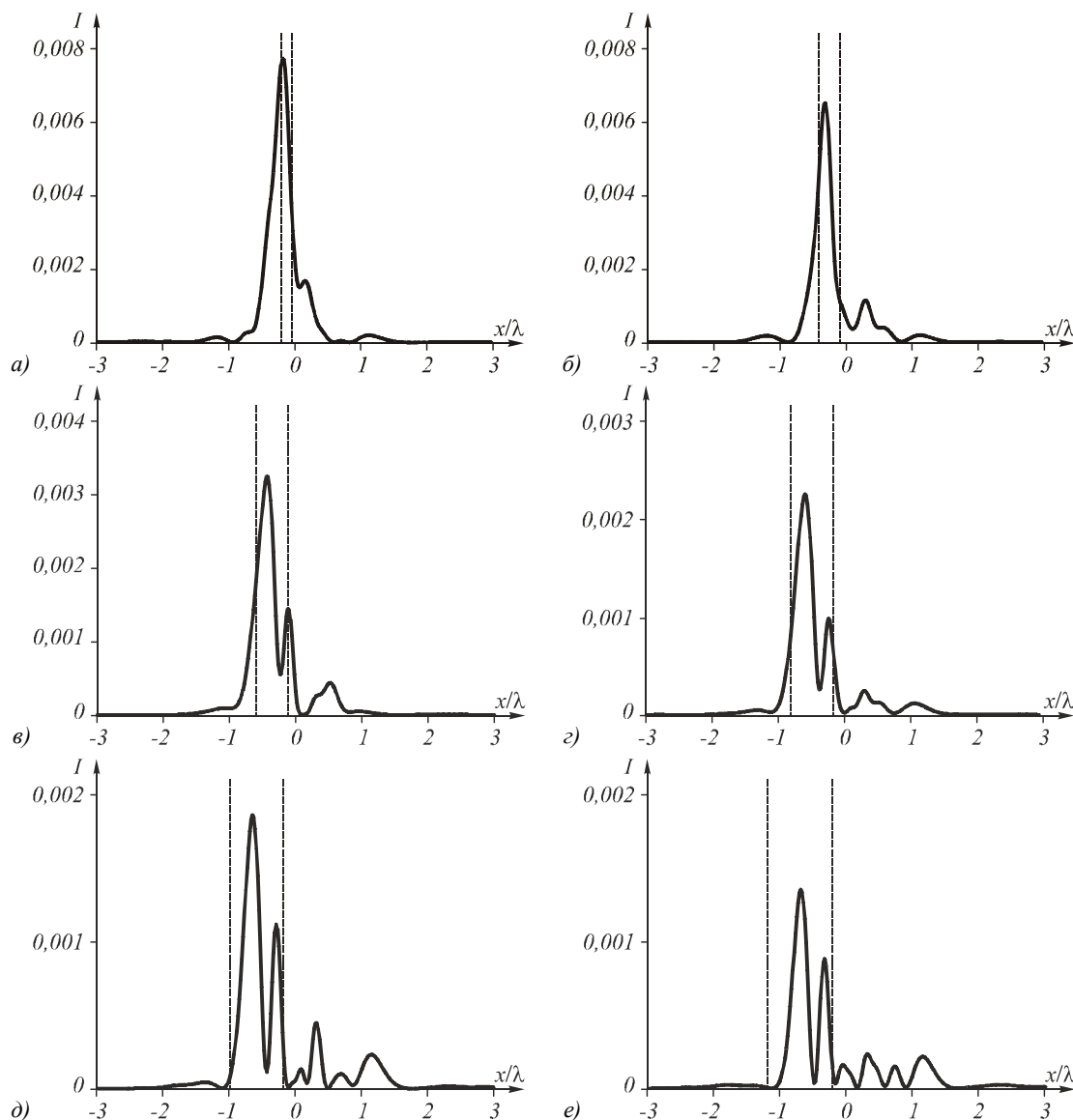


Рис. 5. Распределения интенсивности света в плоскости измерительного экрана для шести положений источника, задаваемых расстоянием от оптической оси:  $0,1\lambda$  (а),  $0,2\lambda$  (б),  $0,3\lambda$  (в),  $0,4\lambda$  (г),  $0,5\lambda$  (д),  $0,6\lambda$  (е)

Вертикальными линиями показаны границы пятна, предсказанные уравнениями (23) и (26). Из рис. 5 видно, что основная энергия сосредоточена как раз в этих границах, за исключением рис. 5а. На рис. 5а границы находятся на расстоянии всего  $0,163\lambda$  друг от друга, что близко к двумерному дифракционному пределу в кремнии ( $0,127\lambda$ ). В этом случае геометрический подход неприменим и световое пятно не помещается в указанных пределах. Кроме того, при удалении источника от оси возникает два пика интенсивности вместо одного. Это можно объяснить наличием aberrаций типа комы.

**5. Численное моделирование построения увеличенного изображения со сверхразрешением с помощью двух ЛМ**

В предыдущем разделе показано, что при использовании двух ЛМ разных размеров формируемое изображение имеет линейное увеличение, меньшее, чем отношение размеров линз.

В данном разделе приводятся результаты моделирования построения увеличенного изображения со сверхразрешением с помощью двух градиентных микроЛМ, одна из которых в 2,5 раза больше другой. Схема моделирования представлена на рис. 6.

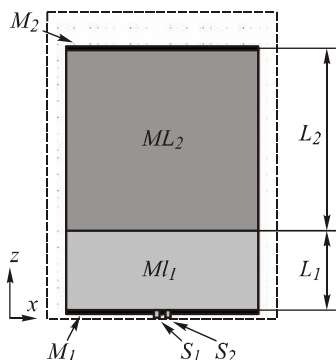


Рис. 6. Оптическая схема изображающей системы с увеличением, состоящей из двух микроЛМ

Свет от двух точечных источников  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 6) попадал в линзу Микаэляна  $ML_1$  (источниками могли бы являться, например, два отверстия диаметром 100 нм, разделённые расстоянием 100 нм, как в работе [13]). В передней плоскости линзы интенсивность света регистрировалась экраном  $M_1$ . Затем свет распространялся через линзу  $ML_1$  длиной  $L_1$  и попадал в линзу Микаэляна  $ML_2$ , длина которой  $L_2$  примерно в 2,5 раза больше  $L_1$ . В задней плоскости линзы  $ML_2$  располагался измерительный экран  $M_2$ . Пунктирной линией показаны границы области моделирования.

Показатели преломления обеих линз распределены по закону гиперболического секанса, т.е. распределение показателя преломления всего элемента имеет вид:

$$n(x, z) = \begin{cases} \frac{n_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2L_1}\right)}, & 0 \leq z \leq L_1, \\ \frac{n_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2L_2}\right)}, & L_1 < z \leq L_2. \end{cases} \quad (27)$$

Параметры моделирования для ТЕ-поляризации были следующими: длина волны света в вакууме  $\lambda = 1$  мкм, материал линзы – кремний, показатель преломления на оптической оси  $n_0 = 3,47$ , ширина обеих линз  $W = 4,8$  мкм, расчётная длина первой линзы  $L_1 = 2$  мкм, расчётная длина второй линзы  $L_2 = 4,45$  мкм. Шаг дискретизации по обеим координатам  $\lambda/50 = 20$  нм, расстояние между источниками –  $0,28\lambda$ , ширина источников –  $0,14\lambda$ . Расстояние между источниками и началом первой линзы –  $0,1\lambda$ , интенсивность поля ( $|E_y|^2$ ) на входе линзы (т.е. в плоскости экрана  $M_1$  на рис. 6) показана на рис. 7.

На рис. 8 представлено мгновенное распределение амплитуды  $E_y$  в момент времени  $30,6\lambda/c$ , где  $c$  – скорость света в вакууме.

На рис. 8 в плоскости изображения (т.е. в задней плоскости второй линзы) формируется два световых пятна. Усреднённая по времени интенсивность  $|E_y|^2$  в этой плоскости, показанная на рис. 9, это подтверждает, что источники разрешаются по уровню 1/4 от максимума.

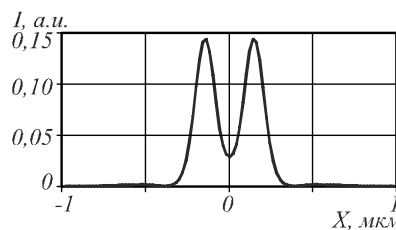


Рис. 7. Интенсивность светового поля в передней плоскости первой линзы

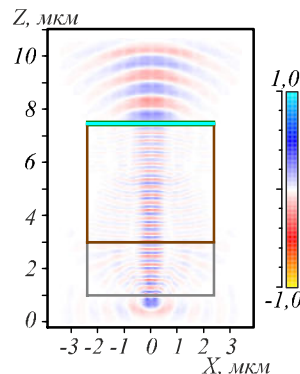


Рис. 8. Мгновенное распределение амплитуды  $E_y$  в момент времени  $30,6\lambda/c$

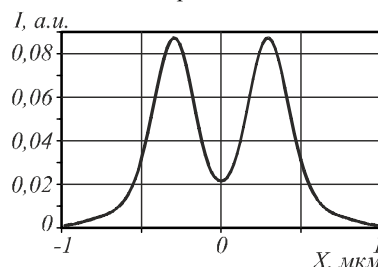


Рис. 9. Интенсивность светового поля в задней плоскости второй линзы

Из рис. 9 видно, что расстояние между изображениями источников примерно  $0,59\lambda$ , т.е. линейное увеличение составляет приблизительно 2,1. Эти два изображения уже можно различить обычной высокоапертурной оптикой с числовой апертурой 0,86.

### 6. Построение увеличенного изображения со сверхразрешением с помощью расширяющейся ЛМ

На стыке двух линз в предыдущем разделе возникают френелевские потери. Чтобы этого избежать, исследуем линзу Микаэляна, линейно расширяющуюся вдоль оптической оси, т.е. в показатель преломления добавим зависимость от координаты  $z$ :

$$n = \frac{n_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2L(z)}\right)}, \quad (28)$$

где  $L(z) = 2 + 0,5755z$ . Распределение показателя преломления такой линзы показано на рис. 10 (в полуплоскости).

Длина линзы на рис. 10 равна 15,2 мкм, ширина в передней плоскости – 4,8 мкм, в задней – 48 мкм. На рис. 11 приведено распределение интенсивности в

задней плоскости линзы при изображении тех же двух источников шириной  $0,14 \lambda$  с расстоянием между их центрами  $0,28\lambda$ .

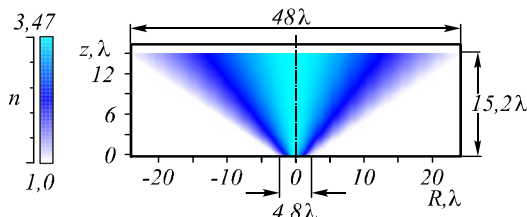


Рис. 10. Распределение показателя преломления (в полтонах) в линзе Микаэляна, линейно расширяющейся вдоль оптической оси

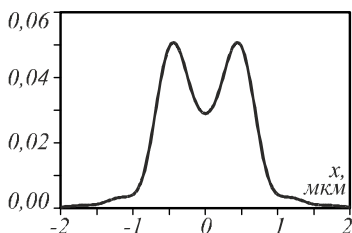


Рис. 11. Распределение интенсивности в задней плоскости линзы (28) при изображении двух источников шириной  $0,14\lambda$  с расстоянием между их центрами  $0,28\lambda$

Расстояние между центрами изображений равно  $0,88\lambda$ , т.е. увеличение такой линзы составляет примерно 3,14. Эти два изображения уже можно разрешить обычным микроскопом с числовой апертурой 0,58.

В разделе 3 было показано, что при удалении от оптической оси даже в случае неувеличивающей линзы, когда пучок лучей сохраняет гомоцентричность и сходится в плоскости изображения, формируемое изображение точечного источника имеет всё больший размер вследствие дифракционного размытия. Это следует из того, что дифракционный предел обратно пропорционален числовой апертуре, которая для системы из двух одинаковых ЛМ имеет вид (16). Если состыковать две линзы разного размера, то лучи из внеосевого источника уже не пересекаются в плоскости изображения, т.е. пятно на изображении будет расширяться не только из-за дифракции, но и из-за нарушения гомоцентричности пучка лучей. На рис. 12 показана зависимость ширины (по полуспаду интенсивности FWHM) светового пятна, формируемого внеосевым источником света с помощью линейно расширяющейся линзы (28). Расчёт проводился FDTD-методом. Параметры расчёта те же самые, что и для рис. 10.

Положение источника менялось от 0 до  $2,4 \mu\text{m}$ , т.е. вдоль всей передней плоскости линзы (рис. 10). Из рис. 12 видно, что ширина светового пятна на изображении в задней плоскости линзы варьировалась от  $0,51\lambda$  до  $0,58\lambda$ , т.е. оставалась примерно постоянной, что выгодно отличает линзу (28) от системы из двух линз (27).

На рис. 13 показана расчётная зависимость положения центра светового пятна от положения цен-

тра источника света при формировании изображения с помощью линзы (28).

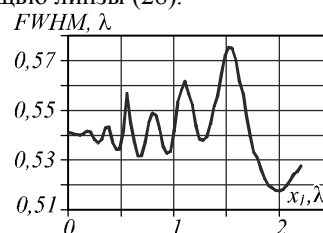


Рис. 12. Зависимость ширины FWHM формируемого изображения от положения точечного источника

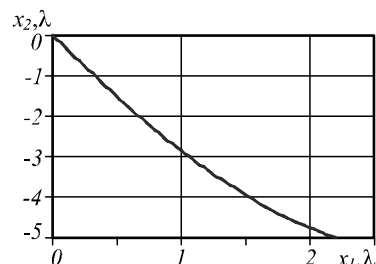


Рис. 13. Зависимость центра фокусного пятна от положения центра источника света

Из рис. 13 видно, что зависимость близка к линейной. Это позволяет ожидать, что при наличии нескольких источников на изображении будут сохраняться пропорции.

### Заключение

В рамках геометрической оптики с использованием принципа Ферма получена оценка для положения изображения внеосевого источника, формируемого двумя планарными ЛМ, расположенными вплотную друг за другом. Для системы двух ЛМ, одна из которых в 2,5 раза больше другой, численно с помощью конечно-разностного FDTD-метода получено изображение двух точечных источников ТЕ-поляризованного света с линейным увеличением, равным 2,1. Для линейно расширяющейся ЛМ получено линейное увеличение 3,14. В обоих случаях уверенно разрешались два точечных источника, разделённые расстоянием  $0,28\lambda$ .

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение №8027), грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-4128.2012.9) и молодого кандидата наук (МК-3912.2012.2) и грантов РФФИ (12-07-00269, 12-07-31117).

### Литература

1. **Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – Изд. 2-е – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
2. **Pendry, J.B.** Negative refraction makes a perfect lens / J.B. Pendry // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85(18). – P. 3966-3969.
3. **Blaikie, R.G.** Imaging through planar silver lenses in the optical near field / R.G. Blaikie, D.O.S. Melville // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2005. – Vol. 7(2). – P. S176-S183.
4. **Melville, D.O.S.** Super-resolution imaging through a planar silver layer / D.O.S. Melville, R.J. Blaikie // Opt. Express. – 2005. – Vol. 13(6). – P. 2127-2134.

5. **Fang, N.** Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens / N. Fang, H. Lee, C. Sun, X. Zhang // *Science*. – 2005. – Vol. 308(5721). – P. 534-537.
6. **Котляр, В.В.** Градиентные элементы микрооптики для достижения сверхразрешения / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.Г. Налимов // *Компьютерная оптика*. – 2009. – Т. 33. – № 4. – С. 369–378.
7. **Котляр, В.В.** Механизм сверхразрешения в планарной гиперболической секансной линзе / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.Г. Налимов, Я.Р. Триандафилос // *Компьютерная оптика*. – 2010. – Т. 34. – № 4. – С. 428–435.
8. **Jacob, Z.** Optical Hyperlens: Far-field imaging beyond the diffraction limit / Z. Jacob, L. Alekseyev, E. Narimanov // *Opt. Express*. – 2006. – Vol. 14. – P. 8247-8256.
9. **Микаэлян, А.Л.** Использование свойств среды для фокусировки волн / А.Л. Микаэлян // *Доклады АН СССР*. – 1951. – Т. 81. – С.569-571.
10. **Алексеев, В.М.** Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин — М.: Наука, 1979.
11. **Beliakov, G.** Analysis of inhomogeneous optical systems by the use of ray tracing.I. Planar systems / G. Beliakov, D. Chan // *Appl. Opt.* – 1997. – Vol. 36. – P. 5303-5309.
12. **Mikaelian, A.L.** Self-focusing media with variable index of refraction / A.L. Mikaelian // *Prog. Opt.* – 1980. – Vol. 17. – P. 279–345.
13. **Rho, J.** Spherical hyperlens for two-dimensional sub-diffractional imaging at visible frequencies / J. Rho, Z. Ye, Y. Xiong, X. Yin, Z. Liu, H. Choi, G. Bartal, X. Zhang // *Nature Communications*. – 2010. – Vol. 1. – P. 443.
3. **Blaikie, R.G.** Imaging through planar silver lenses in the optical near field / R.G. Blaikie, D.O.S. Melville // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* – 2005. – Vol. 7(2). – P. S176-S183.
4. **Melville, D.O.S.** Super-resolution imaging through a planar silver layer / D.O.S. Melville, R.J. Blaikie // *Opt. Express* 2005. – Vol. 13(6). – P. 2127-2134.
5. **Fang, N.** Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens / N. Fang, H. Lee, C. Sun, X. Zhang // *Science* 2005. – Vol. 308(5721). – P. 534-537.
6. **Kotlyar, V.V.** Gradient-index elements of microoptics for superresolution / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov // *Computer Optics* – 2009. – Vol. 33. – No. 4. – P. 369–378. – (in Russian).
7. **Kotlyar, V.V.** Mechanism of superresolution in a planar hyperbolic secant lens / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov, Y.R. Triandafillov // *Computer Optics* – 2010. – Vol. 34. – No. 4. – P. 428–435. – (in Russian).
8. **Jacob, Z.** Optical Hyperlens: Far-field imaging beyond the diffraction limit / Z. Jacob, L. Alekseyev, E. Narimanov // *Opt. Express*. – 2006. – Vol. 14. – P. 8247-8256.
9. **Mikaelian, A.L.** Application of stratified medium for waves focusing // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. – 1951 – Vol. 81. – P. 569–571. – (in Russian).
10. **Alekseev, V.M.** Optimal control / V.M. Alekseev, V.M. Tikhomirov, S.V. Fomin — Moscow: Nauka Publisher, 1979. – (in Russian).
11. **Beliakov, G.** Analysis of inhomogeneous optical systems by the use of ray tracing.I. Planar systems / G. Beliakov, D. Chan // *Appl. Opt.* – 1997. – Vol. 36. – P. 5303-5309.
12. **Mikaelian, A.L.** Self-focusing media with variable index of refraction / A.L. Mikaelian // *Prog. Opt.* 1980. – Vol. 17. – P. 279–345.
13. **Rho, J.** Spherical hyperlens for two-dimensional sub-diffractional imaging at visible frequencies / J. Rho, Z. Ye, Y. Xiong, X. Yin, Z. Liu, H. Choi, G. Bartal, X. Zhang // *Nature Communications*. – 2010. – Vol. 1. – P. 443.

### References

1. **Born, M.** Principles of Optics / M. Born, E. Wolf. – 6 ed. – Pergamon, 1986.
2. **Pendry, J.B.** Negative refraction makes a perfect lens / J.B. Pendry // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol. 85(18). – P. 3966-3969.

## SUBWAVELENGTH IMAGING WITH MAGNIFICATION BY MIKAELIAN LENSES

*A.A. Kovalev, A.G. Nalimov, V.V. Kotlyar*

*Image Processing Systems Institute of the RAS,*

*S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)*

### Abstract

Using the Fermat's principle we estimated position of image spot created by light rays passed from an off-axis point source through two different-size Mikaelian's lenses. For the optical system with two gradient-index Mikaelian's lenses, one of which is 2.5 times bigger than the other, an optical superresolution-image of two point sources (with a distance of  $0.28\lambda$  between them) with magnification of 2.1 has been obtained numerically by the FDTD-method. Also, magnification of 3.14 has been obtained by linearly tapered Mikaelian's lens.

**Key words:** linear magnification, superresolution, planar Mikaelian's lens, hyperbolic secant lens, diffraction limit, Fermat's principle.

### Сведения об авторах



**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Кандидат физико-математических наук (2005 год), работает научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН), является докторантом кафедры технической кибернетики СГАУ. Ковалёв А.А. – специалист в области дифракционной оптики и нанофотоники. В списке научных работ 50 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика, фотонно-кристаллические устройства.



E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from the S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths degree (2002). He is a researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS), holding a part-time position of assistant at SSAU's Technical Cybernetics sub-department. He is a specialist in such areas as diffractive optics and nanophotonics. He is co-author of 50 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices.



**Налимов Антон Геннадьевич**, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Поступил в очную аспирантуру СГАУ по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в 2003 году, окончил её по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает на кафедре технической кибернетики СГАУ в должности доцента, в Институте систем обработки изображений РАН в должности научного сотрудника. Кандидат физико-математических наук, соавтор 58 работ.

**Anton Gennadyevich Nalimov** (b. 1980), finished Samara State Aerospace University in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003 on speciality 05.13.18 "Mathematical modeling and program complexes", finished it in 2006 with speciality 01.04.05 "Optics". Nalimov A.G. works on technical cybernetics department in SSAU as an associate professor, works as a scientist in Image processing systems institute of the Russian Academy of Sciences. Candidate in physics and mathematics, coauthor of 58 papers.

*Сведения об авторе **Котляр Виктор Викторович** – см. стр. 496 этого номера.*

*Поступила в редакцию 16 сентября 2012 г.*