

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ ЭЙРИ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

Котляр В.В.^{1,2}, Ковалёв А.А.^{1,2}, Засканов С.Г.²

¹ Институт систем обработки изображений РАН,

² Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Аннотация

Из приведённого обзора работ по ускоряющимся пучкам и пучкам Эйри (ПЭ) следует, что известные разновидности ПЭ распространяются по параболическим траекториям, а ускоряющиеся пучки, распространяющиеся по непараболическим траекториям, не имеют аналитического описания в зоне Френеля. Далее в работе рассмотрены ПЭ второго рода (ПЭ-2), которые также являются ускоряющимися, имеют аналитическое выражение в зоне Френеля, распространяются на участке траектории по гиперболической кривой и могут быть сформированы с помощью фазовой маски с кубической зависимостью от поперечной координаты.

Ключевые слова: ускоряющиеся лазерные пучки, пучки Эйри, траектория пучка.

1. Пучки Эйри с параболической траекторией

В 1974 году Kalnins и Miller [1] нашли решение параксиального уравнения распространения в виде функций Эйри. В 1979 году Berry и Balazs [2] рассмотрели неуширяющиеся волновые пакеты в квантовой механике. В 1994 году Besieris и др. [3] нашли решение 2D параксиального уравнения

$$2i \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U}{\partial s_x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial s_y^2} = 0 \quad (1)$$

в виде

$$U(s_x, s_y, \xi) = \text{Ai}\left(s_x - \frac{\xi^2}{4}\right) \text{Ai}\left(s_y - \frac{\xi^2}{4}\right) \times \exp\left(\frac{is_x \xi}{2} + \frac{is_y \xi}{2} - \frac{i\xi^3}{6}\right), \quad (2)$$

где $\text{Ai}(x)$ – функция Эйри, равная при вещественных положительных значениях аргумента

$$\text{Ai}(x) = \pi^{-1} (x/3)^{1/2} K_{1/3}(2x^{3/2}/3) = \sqrt{x} \left[I_{-1/3}(2x^{3/2}/3) - I_{1/3}(2x^{3/2}/3) \right] / 3, \quad (3)$$

$I_{1/3}(x)$ и $K_{1/3}(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго родов, $s_x = x/x_0$, $s_y = y/x_0$, $\xi = z/(kx_0^2)$ – безразмерные поперечные и продольная декартовы координаты, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, x_0 – произвольный поперечный размер. Пучки Эйри (ПЭ) в [1–3] имеют бесконечную энергию, так как функция Эйри медленно убывает при $x \rightarrow \infty$:

$$\text{Ai}(-x) \approx \pi^{-1/2} x^{-1/4} \sin\left[(2/3)x^{3/2} + (\pi/4)\right]. \quad (4)$$

В 2007 году Siviloglou и Christodoulides [4] рассмотрели ПЭ в оптике с конечной энергией. Они показали, что решение уравнения (1) в 1D варианте

$$2i \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = 0 \quad (5)$$

имеет вид

$$U(s, \xi) = \text{Ai}\left(s - \frac{\xi^2}{4} + ia\xi\right) \times \exp\left(\frac{is\xi}{2} + \frac{ia^2\xi}{2} - \frac{i\xi^3}{12} - \frac{a\xi^2}{2} + as\right), \quad (6)$$

который в начальной плоскости при $\xi = 0$ даёт функцию Эйри с экспоненциальной аподизацией

$$U(s, \xi = 0) = \text{Ai}(s) \exp(as), \quad a > 0, \quad (7)$$

где a – постоянная. В [4] также показано, что сформировать 1D пучок ПЭ с конечной энергией можно при освещении гауссовым пучком фазовой маски с кубической зависимостью от поперечной координаты и выполнением преобразования Фурье с помощью сферической линзы. Это следует из того, что Фурье-образ начального поля (7) имеет вид:

$$F(t) = \exp(-at^2) \exp\left(\frac{it^3}{3} - ia^2t + \frac{a^3}{3}\right). \quad (8)$$

Главной особенностью ПЭ является изогнутость траектории главного максимума (основного лепестка). Он распространяется по параболической траектории. Поэтому ПЭ называются ускоряющимися или баллистическими (так как свободно падающее тело движется по параболе с ускорением g). Однако в [5] показано, что для ПЭ с конечной энергией (6), (7) «центр тяжести пучка» не смещается при распространении и ускоряющий эффект проявляется только при малых значениях параметра $a \ll 1$. В [6] экспериментально, с помощью жидкокристаллического модулятора света, была получена параболическая траектория распространения 1D ПЭ, которая хорошо описывалась формулой ($a = 0,1$):

$$x = \left(\frac{\lambda z}{4\pi x_0^{3/2}}\right)^2, \quad (9)$$

где (x, z) – поперечная и продольная декартовы координаты. В [7] получено обобщение ПЭ – пучки

Эйри–Гаусса (ЭГ) и рассчитано их преобразование в оптической ABCD-системе. Если ПЭ с бесконечной энергией в начальной плоскости в [1, 2] имеют вид $E_0(x, z=0) = \text{Ai}(x)$, а пучки с конечной энергией из [4] имеют в начальной плоскости вид (7): $E_0(x, z=0) = \text{Ai}(x) \exp(ax)$, то ЭГ-пучки из [7] в начальной плоскости имеют следующий вид:

$$E_2(x, z=0) = \text{Ai}\left(\frac{x+\delta}{\beta}\right) \times \exp\left[(a+ib)x - \frac{x^2}{w^2} + \frac{ikx^2}{2R}\right], \quad (10)$$

где $\delta, \beta, a, b, w, R$ – параметры. В [8] показано, что добавка к ПЭ [1] линейного наклона позволяет управлять параметрами параболической траектории. Получено выражение для преобразования Френеля от ПЭ в начальной плоскости вида

$$E_3(s, z=0) = \text{Ai}(s) \exp(as + iv s), \quad s = x/x_0, \quad (11)$$

и показано, что траектория такого пучка, в отличие от (9), имеет вид

$$x = \frac{vz}{kx_0} + \frac{z^2}{4k^2x_0^3}. \quad (12)$$

В [9] численно рассчитаны вектор Пойнтинга и орбитальный угловой момент для ПЭ. В [10] Vandres рассмотрел ускоряющиеся параболические пучки. В начальной плоскости их комплексная амплитуда имеет вид:

$$E_4(u, v, z=0) = \theta_n(\eta) \theta_n(i\xi) \times \exp\left[iw(\eta^2 - \xi^2)/2 + i\xi^3/3\right], \quad (13)$$

где ξ и η – параболические координаты:

$$\begin{cases} u - \lambda - w^2 = (\eta^2 - \xi^2)/2, \\ v = \eta\xi, \end{cases} \quad (14)$$

а функции $\theta_n(x)$ удовлетворяют уравнению ангармонического осциллятора:

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\eta^4}{4}\right) \theta_n(\eta) = E_n \theta_n(\eta). \quad (15)$$

Для функции $\theta_n(x)$ не известно аналитического решения в виде специальных функций, известна только асимптотика:

$$\theta_n(i\xi) \approx \sin(\sqrt{2}\xi^2/6 + \pi/6)/\xi, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (16)$$

В [11] экспериментально с помощью 35 фс импульса на средней длине волны $\lambda = 0,8$ мкм с энергией 10 мДж в воздухе из-за многофотонной ионизации получен искривлённый плазменный канал радиусом около $\sigma = 132$ мкм и длиной 69 см, который хорошо описывается формулой:

$$x = 0,037 \frac{\lambda^2 z^2}{\sigma^3}, \quad (17)$$

где σ – радиус гауссова пучка. В [12] Vandres рассмотрел ещё один тип ПЭ – ускоряющиеся пучки. Он нашёл решение уравнения

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) E(u, v, \xi) = 0 \quad (18)$$

в виде

$$E_5(u, v, \xi) = \text{Ai}(u + \omega^2) \times \exp\left[i\xi(u - \lambda - \xi^2) + i\xi^3/3\right] \exp(i\omega v), \quad (19)$$

где λ, ω – константы. Хотя этот пучок двумерный, но по одной координате его траектория параболическая, как у 1D ПЭ. В [13] численно показано в непараксиальном случае, что 2D поле с кубической фазой, ограниченной круглой диафрагмой с радиусом R

$$E_x(x, y, z=0) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right) \times \exp\left[i\beta(x^3 + y^3)\right], \quad (20)$$

также имеет параболическую траекторию до и после Фурье-плоскости. В [14] с помощью трёхволнового смешения в нелинейном фотонном кристалле и с помощью управления температурой получили два режима (генерацию второй гармоники и генерацию разностной частоты), в которых начальный кубический волновой фронт генерировал ПЭ с параболой, направленными в разные стороны. Аналогично [13], в [15] численно исследуются 1D ПЭ, ограниченные по поперечной координате, и линейная комбинация ПЭ, которая при распространении формирует две параболы, направленные в разные стороны, аналогично [14]. В [16] исследуется влияние взаимного смещения центра гауссова пучка и центра кубической фазовой маски на формирование модернизированных ПЭ в Фурье-плоскости. Получено явное выражение для Фурье-преобразования от начальной функции

$$E_6(t) = \exp[-a(t-t_0)^2] \times \exp\left\{i\left[\frac{(t-t_1)^3}{3} - a^2(t-t_1) - i\frac{a^3}{3}\right]\right\}. \quad (21)$$

Показано, что выбором постоянных t_0 и t_1 можно управлять видом параболической траектории ПЭ. В [17] изучается другой тип ограниченных с одной стороны по поперечной координате 1D ПЭ с конечной энергией. В начальной плоскости эти ПЭ имеют следующую комплексную амплитуду:

$$E_7(s, \xi=0) = \text{Ai}_0(s) \pm i \text{Bi}_1(s), \quad (22)$$

где $\text{Ai}(x)$ и $\text{Bi}(x)$ – два линейно независимых решения уравнения Эйри

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\right) E(x) = 0, \quad (23)$$

но ограниченных с одной стороны специальным образом:

$$Ai_0(s) = \begin{cases} Ai(s) \exp(as), & s < s_0 = -2,3381, \\ 0, & s \geq s_0, \end{cases} \quad (24)$$

$$Bi_1(s) = \begin{cases} Bi(s) \exp(as), & s < s_1 = -1,1737, \\ 0, & s \geq s_1. \end{cases} \quad (25)$$

Распространение таких модернизированных ПЭ исследуется в [17] численно. В [18] предложен радиально-симметричный ПЭ с конечной энергией, который «самофокусируется» на определённом расстоянии:

$$E_8(r) = Ai(r - r_0) \exp[a(r - r_0)], \quad (26)$$

где r и r_0 – переменная и постоянная поперечные радиальные координаты. Фокусное расстояние зависит от величины r_0 . Распространение пучка моделируется численно. В [19] теоретически показано, что с помощью тонкого клинообразного кристалла, толщина которого меняется по поперечной координате линейно, и при накачке гауссовым пучком вблизи выходной поверхности кристалла возникает обрезанный ПЭ с ускорением (с параболической траекторией движения). В [20] численно и экспериментально рассматривается ПЭ, названный «световой пучей». В начальной плоскости в любой момент времени его комплексная амплитуда имеет вид:

$$E_9(x, y, z, t) = Ai(x/x_0) Ai(y/y_0) Ai\left(\tau/\tau_0 - \frac{\beta z^2}{4\tau_0^4}\right), \quad (27)$$

где $\tau = t - z/c$, x_0 , y_0 , τ_0 и β – постоянные.

2. Пучки, ускоряющиеся по непараболической траектории

В [21] методом стационарной фазы из интеграла Френеля получено выражение для комплексной амплитуды поля, которое фокусируется на кривой $x = f(z)$:

$$E_{10}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Ai\left[\frac{k^{2/3}(\phi''(x_{0n}) + 1/z)^2}{2^{2/3}(\phi'''(x_{0n}))^{4/3}}\right], \quad (28)$$

где ϕ , ϕ'' , ϕ''' – фазовая функция поля в начальной плоскости $z = 0$ и её вторая и третья производные, x_{0n} – стационарные точки показателя экспоненты в интеграле Френеля, равного $k\phi + k(x - x_0)^2/(2z)$, где x_0 – координата в начальной плоскости. Эти стационарные точки удовлетворяют условию $x = x_{0n} + z\phi'(x_{0n})$. С помощью формулы (28) и пространственного модулятора света экспериментально получены ПЭ, траектории которых описываются полиномом $x = z^m$, где $m = 1,5; 2; 3; 4; 5$. В [22] рассмотрено световое поле, распространяющееся в планарной градиентной неоднородной среде с линейным распределением

показателя преломления и удовлетворяющее парааксиальному уравнению в безразмерных единицах (подобному уравнению (1)):

$$\left(i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\alpha(z)x}{2}\right) E(x, z) = 0, \quad (29)$$

где $\alpha(z)$ – функция от продольной переменной z . Получено решение уравнения (29) в виде интегралов для любой $\alpha(z)$ и при начальном поле вида $E_0(x, z=0) = Ai(\gamma^{1/3}x)$, где γ – масштабирующий множитель. В [23] получено уравнение для фазы $\phi(x)$ светового поля, которое направляет лучи на 1D каустическую кривую $c(z)$:

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{k[c(z) - x]}{\sqrt{[c(z) - x]^2 + z^2}}, \quad (30)$$

где k – волновое число света. Из этого уравнения следует, что при $c(z) = az^2$ фаза получается в степени $3/2$, а сама амплитуда ПЭ в начальной плоскости имеет вид:

$$E_{11}(x, z=0) = \exp(-i4\sqrt{ak}x^{3/2}/3), \quad (31)$$

где a – постоянная. Если уравнение каустики имеет вид $c(z) = az^4$, то начальное поле будет иметь следующий вид:

$$E_{12}(x, z=0) = \exp(-i16(3a)^{1/3}kx^{7/4}/21). \quad (32)$$

Аналогично в [23] найдена явная фаза для каустики $c(z) = az^m$, где m – целое число.

В [24] теоретически и экспериментально изучалось ускорение ПЭ с помощью градиентной оптики. Для парааксиального уравнения со слабым линейным показателем преломления:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{k\delta x}{2n}\right) E(x, z) = 0, \quad (33)$$

где $\delta \cdot x \ll n$, n – показатель преломления среды, получено явное решение в виде:

$$E_{13}(x, z) = Ai\left[\frac{1}{x_0}\left(x - \frac{z^2}{4k^2x_0^3} - \frac{\delta z^2}{2n}\right) + i\frac{az}{kx_0}\right] \times \exp\left[ax - \frac{az^2}{2}\left(\frac{1}{k^2x_0^3} + \frac{\delta}{n}\right)\right] \times \exp\left[-\frac{iz^3}{12}\left(\frac{1}{k^3x_0^6} + \frac{2k\delta^2}{n^2} + \frac{3\delta}{nkx_0^3}\right) + \frac{ia^2z}{2k}\right] \times \exp\left[ixz\left(\frac{1}{2kx_0^3} + \frac{k\delta}{n}\right)\right], \quad (34)$$

удовлетворяющее граничному условию:

$$E(x, z=0) = Ai(x/x_0) \exp(ax), \quad a > 0.$$

В [25] экспериментально получены плазмонные ПЭ с помощью матрицы субволновых отверстий в плёнке серебра, периодических вдоль оси z и непериодических (аппроксимирующих фазу степени $3/2$) вдоль

оси x . Падающая на отверстия плазменная волна распространяется вдоль оси x , а ПЭ распространяется вдоль оси z . В [26] с помощью жидкокристаллического модулятора, пропускание которого описывается фазовой функцией степени $3/2$: $\varphi(x) = ax^{3/2}$, был сформирован ПЭ. В [27] рассмотрен 2D тройной ПЭ в начальной плоскости в виде:

$$E_{14}(x, y, z = 0) = \text{Ai}(by + c) \times \text{Ai}\left(b\frac{x\sqrt{3} - y}{2} + c\right) \text{Ai}\left(b\frac{-x\sqrt{3} - y}{2} + c\right). \quad (35)$$

Этот пучок имеет конечную энергию. Фурье-образ этого пучка в [27] найден аналитически, а преобразование Френеля рассчитывается численно. В [28] во внешнем резонаторе ND:YAG лазера в качестве зеркала использована отражающая дифракционная решётка с рельефом:

$$T(x, y) = \frac{h_0}{2} \left[\text{sgn} \left\{ \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{a} \right) \right\} + 1 \right], \quad (36)$$

где h_0 – высота зубьев решётки, a – масштабирующий множитель. В этом случае лазер генерирует 2D ПЭ. В [29] в интегральной форме для функции Бесселя предложено интегрировать только по половине круга от нуля до π :

$$J_v^+(x, z) = \int_0^\pi \exp[ivt + ik(x \cos t + z \sin t)] dt. \quad (37)$$

Формула (37) описывает 1D ускоряющийся пучок, распространяющийся по круговой траектории с поворотом почти на 90 градусов. В [30] рассмотрен 2D пучок Бесселя, но интерпретирован он как 1D пучок, распространяющийся вдоль оси z :

$$E_{15}(x, z) = J_v\left(k\sqrt{x^2 + z^2}\right) \exp\left(iv \arctg \frac{z}{x}\right), \quad (38)$$

где $J_v(x)$ – функция Бесселя. Причём при $z=0$ выбирается только на полуоси:

$$E_{15}^+(x, z = 0) = J_\beta(kx + \beta) \exp(-ax) \theta(x + \beta/k), \quad (39)$$

где $\theta(x)$ – функция Хэвисайда. Ускоряющийся пучок (39), как и пучок (37), поворачивается при распространении по окружности на 90 градусов. В [31] экспериментально с помощью модулятора и лазерного импульса длительностью 10 фс получен световой пучок с кривой каустики в виде окружности с радиусом 35 мкм. При этом на жидкокристаллическом модуляторе формировалась фазовая функция, рассчитанная с помощью уравнения геометрической оптики, аналогичного уравнению (30):

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{kc'}{\sqrt{1 + (c')^2}}, \quad c' = \frac{dc}{dz}. \quad (40)$$

В (40) функция $c(x)$ задаёт нужную каустическую кривую, например, дугу окружности.

В [32] рассмотрен круговой ПЭ с оптическим вихрем с начальной амплитудой:

$$E_{16}(r, \varphi, z = 0) = \text{Ai}\left(\frac{r-r_0}{w}\right) \exp\left[a\frac{r-r_0}{w}\right] \times \left[r \exp(i\varphi) - r_0 \exp(i\varphi_0)\right]^n, \quad (41)$$

где n – топологический заряд вихря. Этот пучок формируется в фокусе светового кольца. В [33] методом виртуального источника найдены непараксиальные поправки к параксиальным ПЭ. В [34] исходя из 2D пучка Матье, взяв его одномерное сечение, рассмотрены ускоряющиеся по эллиптическим орбитам лазерные пучки. Пучок Матье выбирается в виде:

$$E_{17}(u, v, z = 0) = A c e_m(v) M c_m(u) + i B s e_m(v) M s_m(u), \quad (42)$$

где A, B – постоянные, (u, v) – эллиптические координаты $x = f \text{ch}(u) \cos(v)$, $y = f \text{sh}(u) \sin(v)$, ce, se – угловые и Mc, Ms – радиальные функции Матье. Для ускоряющегося пучка надо положить $v=0$ (или $v=\pi/2$).

В приведённом выше подробном обзоре работ по ускоряющимся пучкам, и в частности ПЭ, нет работ по ПЭ, которые ускоряются по гиперболическим траекториям. Чтобы заполнить этот пробел, рассмотрим далее пучки Эйри второго рода (ПЭ-2) или гиперболические ПЭ.

3. Лазерные пучки Эйри второго рода

Обычно 1D ПЭ формируют с помощью начального поля (8) – фазовой кубической маски, далее формируют с помощью сферической линзы Фурье-спектр поля (8), который описывается функцией (7). А за Фурье-плоскостью формируется ПЭ с комплексной амплитудой (6). ПЭ-2 возникают в зоне Френеля фазовой маски (8). Чтобы показать это, рассмотрим комплексную амплитуду гауссова пучка сразу за кубической фазовой маской:

$$E(x, 0) = \exp\left[-\frac{x^2}{w^2} + i\alpha\left(\frac{x}{x_0}\right)^3 + i\beta\left(\frac{x}{x_0}\right)\right], \quad (43)$$

где w – радиус перетяжки гауссова пучка, α и β – безразмерные параметры фазовой маски. Тогда на расстоянии z от начальной плоскости в параксиальном приближении амплитуда светового поля будет описываться преобразованием Френеля:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{-ik}{2\pi z}} \exp(ikz) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x-t)^2\right] \times \exp\left[-\frac{t^2}{w^2} + i\alpha\left(\frac{t}{x_0}\right)^3 + i\beta\left(\frac{t}{x_0}\right)\right] dt. \quad (44)$$

Дополняя показатель экспоненты до полного куба и используя известное интегральное представление для функции Эйри

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{it^3}{3} + ixt\right) dt, \quad (45)$$

можно вычислить интеграл в (44). Тогда получим:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{-i2\pi k}{z}} wp \times \exp\left[\frac{ikx^2}{2z} + sp(qp)^2 + \frac{2}{3}(qp)^6 + ikz\right] \times \text{Ai}\left[sp + (qp)^4\right], \quad (46)$$

где

$$z_0 = \frac{kw^2}{2}, \quad q^2 = 1 - \frac{iz_0}{z}, \quad s = \frac{w}{x_0} \left(\beta - \frac{kx_0x}{z}\right), \quad p = \frac{x_0}{w\sqrt[3]{3\alpha}}. \quad (47)$$

В исходных обозначениях из (43) вместо (46) можно записать:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{-i2\pi k}{z}} \frac{x_0}{\sqrt[3]{3\alpha}} \times \exp\left[\frac{1}{3\alpha} \left(\frac{x_0}{w}\right)^2 \left(\beta - \frac{kx_0x}{z}\right) + \frac{2}{27\alpha^2} \left(\frac{x_0}{w}\right)^6 \left(1 - 3\frac{z_0^2}{z^2}\right)\right] \times \exp\left[\frac{ikx^2}{2z} - \frac{iz_0}{z} \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{x_0}{w}\right)^2 \left(\beta - \frac{kx_0x}{z}\right)\right] \times \exp\left[-\frac{2i}{27\alpha^2} \left(\frac{x_0}{w}\right)^6 \left(3\frac{z_0}{z} - \frac{z_0^3}{z^3}\right) + ikz\right] \times \text{Ai}\left\{\frac{1}{(3\alpha)^{1/3}} \left[\beta - \frac{kx_0x}{z} + \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{x_0}{w}\right)^4 \left(1 - \frac{iz_0}{z}\right)^2\right]\right\}. \quad (48)$$

Выражение (48) описывает ПЭ-2 с конечной энергией. Из (48) видно, что ПЭ-2, в отличие от ПЭ (6), имеет квадратичную, а не линейную фазу, и поэтому при распространении он будет расходиться. Кроме того, в (48) аргумент функции Эйри комплексный, как и в (6), но зависимость от координаты z имеет другой характер: в (6) значение аргумента функции Эйри пропорционально z^2 , а в (48) – обратно пропорционально z . ПЭ-2 с бесконечной энергией можно получить, если вместо гауссова пучка осветить кубическую фазовую маску плоской волной ($w \rightarrow \infty$). Тогда вместо (48) получим выражение:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{-i2\pi k}{z}} \frac{x_0}{\sqrt[3]{3\alpha}} \times \exp\left[\frac{ik}{2z} \left(x^2 + \frac{kx_0^3x}{3\alpha z} - \frac{\beta x_0^2}{3\alpha} + \frac{k^2 x_0^6}{54\alpha^2 z^2}\right) + ikz\right] \times \text{Ai}\left[\frac{1}{(3\alpha)^{1/3}} \left(\beta - \frac{kx_0x}{z} - \frac{k^2 x_0^4}{12\alpha z^2}\right)\right]. \quad (49)$$

Выражение (49) описывает ПЭ-2 с бесконечной энергией. Но квадратичная зависимость фазы сохраняется, и поэтому пучок (49) будет при распространении расходиться. Аргумент функции Эйри в (49) действительный. Приравняем этот аргумент к

значению, в котором функция Эйри имеет локальные максимумы y_m :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3\alpha}} \left(\beta - \frac{kx_0x}{z} - \frac{k^2 x_0^4}{12\alpha z^2}\right) = y_m. \quad (50)$$

Числа y_m в (50) принимают следующие значения:

Таблица 1

| m | y_m |
|-----|----------|
| 0 | -1,01879 |
| 1 | -3,2482 |
| 2 | -4,8201 |
| 3 | -6,16331 |
| 4 | -7,37218 |
| 5 | -8,48849 |
| 6 | -9,53545 |
| 7 | -10,5277 |
| 8 | -11,4751 |
| 9 | -12,3848 |
| 10 | -13,2622 |

Из уравнения (50) можно найти явное уравнение траектории максимума ПЭ-2:

$$x = \frac{z}{kx_0} \left(\beta - y_m \sqrt[3]{3\alpha}\right) - \frac{kx_0^3}{12\alpha z}. \quad (51)$$

В отличие от параболической траектории (9), по которой распространяются ПЭ, ПЭ-2 распространяются по гиперболической траектории.

Найдём производные по z от выражения (51):

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{kx_0} \left(\beta - y_m \sqrt[3]{3\alpha}\right) + \frac{kx_0^3}{12\alpha z^2}, \quad (52)$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{kx_0^3}{6\alpha z^3}. \quad (53)$$

Гиперболическая траектория (51) обладает ускорением на тех участках, на которых производные первого и второго порядка (52) и (53) имеют один знак. Отсюда следует, что для ускорения траектории должно быть

$$\frac{1}{z^2} < \frac{12\alpha}{k^2 x_0^4} \left(y_m \sqrt[3]{3\alpha} - \beta\right), \quad (54)$$

причём условие для ускорения не зависит от знака x_0/α . Для существования расстояний z , удовлетворяющих (54), правая часть этих выражений должна быть положительной. Это возможно, когда $\alpha > 0$ и $\beta < y_m(3\alpha)^{1/3}$ либо $\alpha < 0$ и $\beta > y_m(3\alpha)^{1/3}$, т.е.

$$\text{sign}(\alpha)\beta < y_m \sqrt[3]{3|\alpha|}. \quad (55)$$

Если условие (55) выполняется, то ускорение наблюдается на расстояниях

$$z > z_1 = \frac{kx_0^2}{2\sqrt[3]{3\alpha} \left(y_m \sqrt[3]{3\alpha} - \beta\right)}, \quad (56)$$

причём в отличие от пучков Эйри первого типа ускорение не постоянное, а убывающее пропорционально z^{-3} , начиная со значения

$$\left. \frac{d^2 x}{dz^2} \right|_{z=z_1} = \begin{cases} -\frac{4\sqrt{3\alpha}}{k^2 x_0^3} (y_m \sqrt[3]{3\alpha} - \beta)^{3/2}, & \alpha > 0, \\ \frac{4\sqrt{-3\alpha}}{k^2 x_0^3} (\beta - y_m \sqrt[3]{3\alpha})^{3/2}, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (57)$$

Рассмотрим для примера следующие значения параметров: $\lambda = 532$ нм, $x_0 = \lambda$, $\alpha = -1$, $\beta = 10$, $m = 0$, $y_0 = -1,01879$. В этом случае условие (55) выполняется и траектория обладает ускорением при $z > z_1 \approx 330$ нм. График траектории при указанных параметрах изображён на рис. 1а, а распределение интенсивности поля (49) при этих же параметрах – на рис. 1б. Расчётная область на рис. 1б имеет размеры – $10\lambda \leq x \leq +10\lambda$, $0 \leq z \leq 4\lambda$.

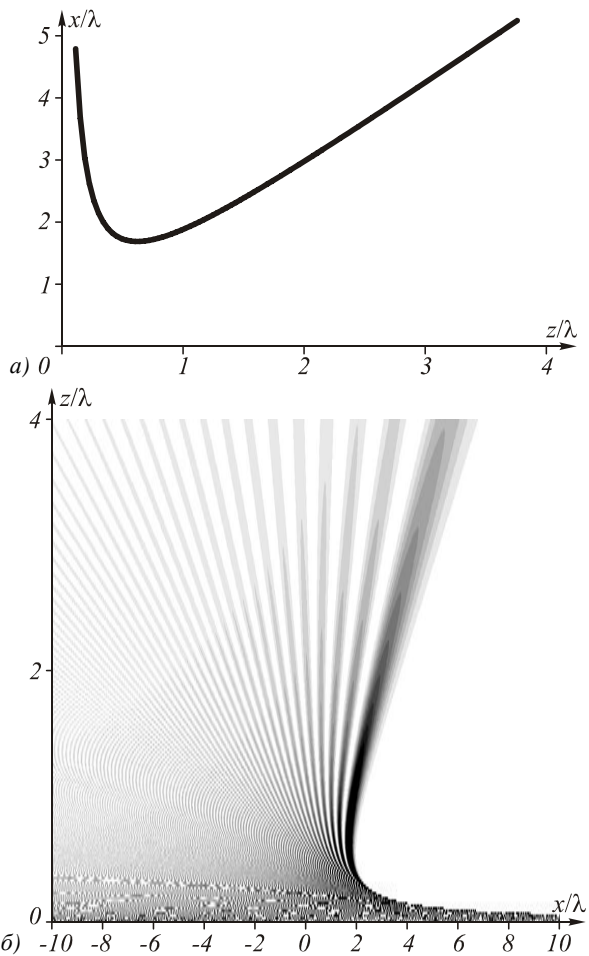


Рис. 1. Траектория ПЭ-2 с ускорением (а) и распределение интенсивности ПЭ-2 с ускорением в плоскости xz (б)

На рис. 2 показаны сечения интенсивности в плоскостях $z = \lambda/2$ (а), λ (б), 2λ (в), 3λ (г), 4λ (д).

Для сравнения рассмотрим пучок Эйри первого типа (6) при $a = 0$. Приравняем в (6) аргумент функции Эйри к значению, в котором она имеет локальные максимумы y_m , и найдём явное уравнение траектории максимума ПЭ:

$$x = x_0 y_m + \frac{z^2}{4k^2 x_0^3}. \quad (58)$$

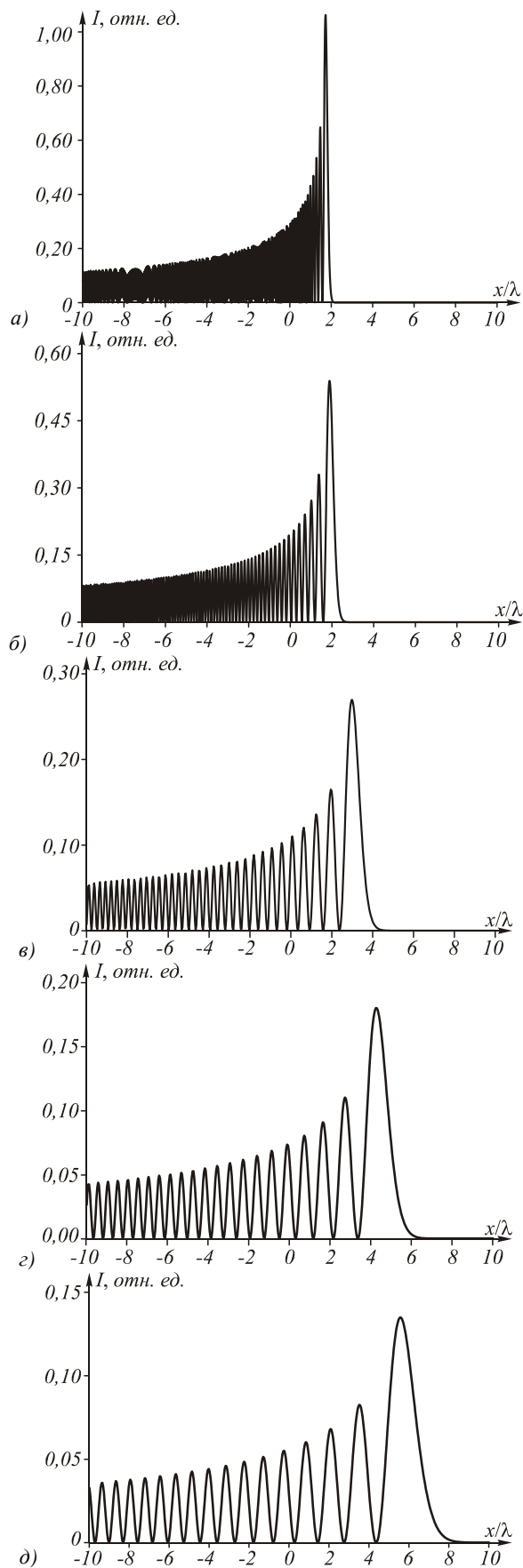


Рис. 2. Сечения интенсивности пучка ПЭ-2 в плоскостях $z = \lambda/2$ (а), λ (б), 2λ (в), 3λ (г), 4λ (д)

Из (58) видно, что пучок ПЭ обладает постоянным ускорением, равным $1/(2k^2x_0^3)$. Из (58) также видно, что ПЭ (6) – нерасходящийся (бездифракционный), так как $x_1 - x_2 = x_0(y_m - y_n)$ не зависит от z , а для ПЭ-2 из (51) следует, что $x_1 - x_2 = (3\alpha)^{1/3}z(y_m - y_n)/(kx_0)$ и пучок линейно расходится с ростом z .

На рис. 3 показано распределение интенсивности поля (6) при следующих параметрах – $\lambda = 532$ нм, $x_0 = \lambda/2$. Расчётная область на рис. 3 имеет те же размеры: $-10\lambda \leq x \leq +10\lambda$, $0 \leq z \leq 4\lambda$. Согласно (58), ускорение для такого пучка равно $1/(\pi^2\lambda)$, тогда как согласно (57) для пучка ПЭ-2, показанного на рис. 1б, при $z = z_1 \approx 330$ нм (z_1 получено из (56)) оно равно примерно $19,87/(\pi^2\lambda)$. Этим и определяется более изогнутая форма траекторий на рис. 1б.

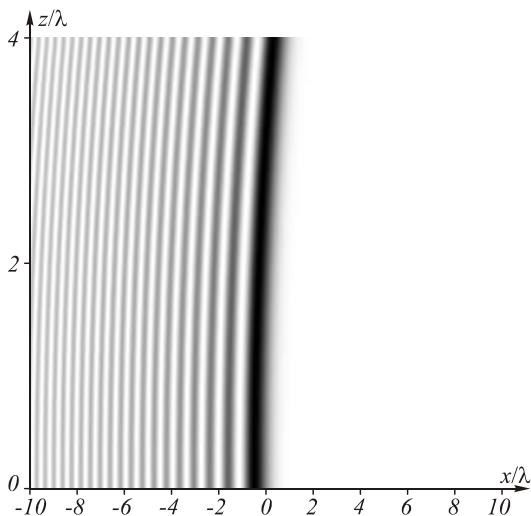


Рис. 3. Распределение интенсивности ПЭ-1 (с постоянным ускорением) в плоскости xz

Заключение

В работе получены следующие результаты:

- приведён достаточно подробный обзор научных работ по ускоряющимся лазерным пучкам, в том числе и пучкам Эйри; обзор сделан с целью доказать, что световые пучки, порождённые кубической фазовой маской в зоне Френеля, до сих пор рассмотрены не были;

- получен явный вид комплексной амплитуды, описывающий дифракцию Френеля гауссова пучка на фазовой маске с кубической зависимостью фазы от поперечной координаты (уравнение (48));

- рассмотрены одномерные пучки Эйри второго рода с конечной энергией (уравнение (48)) и с бесконечной энергией (уравнение (49)), которые распространяются с ускорением на участке гиперболической траектории (уравнение (51));

- показано, что пучки Эйри второго рода имеют неоднородное «ускорение», которое быстро затухает (пропорционально кубу расстояния), и пучок продолжает распространяться по прямолинейной траектории (рис. 1);

- показано также, что пучки Эйри второго рода в ближней зоне (несколько длин волн от кубической

фазовой маски) имеют «ускорение» на порядок большее (при прочих равных параметрах), чем обычные пучки Эйри, распространяющиеся по параболической траектории;

- пучки Эйри второго рода с бесконечной энергией при распространении расходятся (центральный максимум интенсивности уширяется) линейно с расстоянием от начальной плоскости.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение № 8027), грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-4128.2012.9), молодого кандидата наук (МК-3912.2012.2) и молодого доктора наук (МД-1929.2013.2), а также грантов РФФИ (12-07-00269, 12-07-31117, 13-07-97008).

Литература (References)

1. **Kalnins, E.G.** Lie theory and separation of variables / E.G. Kalnins, W. Miller Jr. // J. Math. Phys. – 1974. – Vol. 15. – P. 1728-1737.
2. **Berry, M.V.** Nonspreading wave packets / M.V. Berry, N.L. Balazs // Am. J. Phys. – 1979. – Vol. 47. – P. 264-267.
3. **Besieris, I.M.** Nondispersive accelerating wave packets / I.M. Besieris, A.M. Shaarawi, R.W. Ziolkowski // Am. J. Phys. – 1994. – Vol. 62, N 6. – P. 519-521.
4. **Siviloglou, G.A.** Accelerating finite energy Airy beams / G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides // Opt. Lett. – 2007. – Vol. 32. – P. 979-981.
5. **Besieris, I.M.** A note on an accelerating finite energy Airy beam / I.M. Besieris, A.M. Shaarawi // Opt. Lett. – 2007. – Vol. 32. – P. 2447-2449.
6. **Siviloglou, G.A.** Observation of accelerating Airy beams / G.A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu, D.N. Christodoulides // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99. – P. 213901.
7. **Bandres, M.A.** Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Opt. Express. – 2007. – Vol. 15. – P. 16719-16728.
8. **Siviloglou, G.A.** Ballistic dynamics of Airy beams / G.A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu, D.N. Christodoulides // Opt. Lett. – 2008. – Vol. 33. – P. 207-209.
9. **Sztul, H.I.** The Poynting vector and angular momentum of Airy beams / H.I. Sztul, R.R. Alfano // Opt. Express. – 2008. – Vol. 16. – P. 9411-9416.
10. **Bandres, M.A.** Accelerating parabolic beams / M.A. Bandres // Opt. Lett. – 2008. – Vol. 33. – P. 1678-1680.
11. **Polynkin, P.** Curved plasma channel generation using ultraintense Airy beams / P. Polynkin, M. Kolesik, J.V. Moloney, G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides // Science. – 2009. – Vol. 324. – P. 229-232.
12. **Bandres, M.A.** Accelerating beams / M.A. Bandres // Opt. Lett. – 2009. – Vol. 34. – P. 3791-3793.
13. **Carretero, L.** Nonparaxial diffraction analysis of Airy and SAiry beams / L. Carretero, P. Acebal, S. Blaya, C. Garcia, A. Fimia, R. Madrigal, A. Murciano // Opt. Express. – 2009. – Vol. 17. – P. 22432-22441.
14. **Dolev, I.** Switching the acceleration direction of Airy beams by a nonlinear optical process / I. Dolev, T. Ellenbogen, A. Arie // Opt. Lett. – 2010. – Vol. 35. – P. 1581-1583.
15. **Khonina, S.N.** Specular and vortical Airy beams / S.N. Khonina // Optics Communications. – 2011. – Vol. 284. – P. 4263-4271.
16. **Hu, Y.** Optical control of the ballistic motion of Airy beams / Y. Hu, P. Zhang, C. Lou, S. Huang, J. Xu, Z. Chen // Opt. Lett. – 2010. – Vol. 35. – P. 2260-2263.

17. **Carvalho, M.I.** Propagation of Airy-related beams / M.I. Carvalho, M. Facao // *Opt. Express*. – 2010. – Vol. 18. – P. 21938-21949.
18. **Efremidis, N.K.** Abruptly autofocusing waves / N.K. Efremidis, D.N. Christodoulides // *Opt. Lett.* – 2010. – Vol. 35. – P. 4045-4047.
19. **Longhi, S.** Airy beams from a microchip laser / S. Longhi // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol. 36. – P. 716-718.
20. **Abdollahpour, D.** Spatiotemporal Airy light bullets in the linear and nonlinear regimes / D. Abdollahpour, S. Suntsov, D.G. Parazoglou, S. Tzortzakis // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – Vol. 105. – P. 253901.
21. **Greenfield, E.** Accelerating light beams along arbitrary convex trajectories / E. Greenfield, M. Segev, W. Walasik, O. Raz // *Phys. Rev. Lett.* – 2011. – Vol. 106. – P. 213902.
22. **Efremidis, N.K.** Airy trajectory engineering in dynamic linear index potential / N.K. Efremidis // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol. 36. – P. 3006-3008.
23. **Froehly, L.** Arbitrary accelerating micron-scale caustic beams in two and three dimensions / L. Froehly, F. Courvoisier, A. Mathis, M. Jacquot, L. Furfaro, R. Giust, P.A. Lacourt, J.M. Dudley // *Opt. Express*. – 2011. – Vol. 19. – P. 16455-16465.
24. **Ye, Z.** Acceleration control of Airy beams with optically induced refractive-index gradient / Z. Ye, S. Liu, C. Lou, P. Zhang, Y. Hu, D. Song, J. Zhao, Z. Chen // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol. 36. – P. 3230-3232.
25. **Li, L.** Plasmonic Airy beam generated by in-plane diffraction / L. Li, T. Li, S.M. Wang, C. Zhang, S.N. Zhu // *Phys. Rev. Lett.* – 2011. – Vol. 107. – P. 126804.
26. **Cottrell, D.M.** Direct generation of accelerating Airy beams using a 3/2 phase-only pattern / D.M. Cottrell, J.A. Devis, T.M. Hazard // *Opt. Lett.* – 2009. – Vol. 34. – P. 2634-2636.
27. **Abramochkin, E.G.** Product of three Airy beams / E.G. Abramochkin, E. Razueva // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol. 36. – P. 3732-3734.
28. **Porat, G.** Airy beam laser / G. Porat, I. Dolev, O. Barlev, A. Arie // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol. 36. – P. 4119-4121.
29. **Kaminer, I.** Nondiffracting accelerating wave packets of Maxwell's equations / I. Kaminer, R. Bekenstein, J. Nemirovsky, M. Segev // *Phys. Rev. Lett.* – 2012. – Vol. 108. – P. 163901.
30. **Zhang, P.** Generation of linear and nonlinear nonparaxial accelerating beams / P. Zhang, Y. Hu, D. Cannan, A. Salandrino, T. Li, R. Morandotti, X. Zhang, Z. Chen // *Opt. Lett.* – 2012. – Vol. 37. – P. 2820-2822.
31. **Courvoisier, F.** Sending femtosecond pulses in circles: highly nonparaxial accelerating beams / F. Courvoisier, A. Mathis, L. Froehly, R. Giust, R. Furfaro, P.A. Lacourt, M. Jacquot, J.M. Dudley // *Opt. Lett.* – 2012. – Vol. 37. – P. 1736-1738.
32. **Jiang, Y.** Propagation dynamics of abruptly autofocusing Airy beams with optical vortices / Y. Jiang, K. Huang, X. Lu // *Opt. Express*. – 2012. – Vol. 20. – P. 18579-18584.
33. **Yan, S.** Virtual source for an Airy beam / S. Yan, B. Yao, M. Lei, D. Dan, Y. Yang, P. Gao // *Opt. Lett.* – 2012. – Vol. 37. – P. 4774-4776.
34. **Aleahmad, P.** Fully vectorial accelerating diffraction-free Helmholtz beams / P. Aleahmad, M. Miri, M.S. Mills, I. Kaminer // *Phys. Rev. Lett.* – 2012. – Vol. 109. – P. 203902.

AIRY LASER BEAMS WITH HYPERBOLIC TRAJECTORY IN NEAR FIELD

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, S.G. Zascanov²

¹Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences,

²S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)

Abstract

From our review of the papers on accelerating beams and Airy beams (AB) it follows that the well-known types of AB are propagating along parabolic trajectories, while accelerating beams, which propagate along nonparabolic trajectories, do not have an analytical description in the Fresnel zone. Further in the paper we consider the second kind of AB. These beams are also accelerating, have an analytic expression in the Fresnel zone, propagate along a hyperbolic trajectory and can be generated with a phase mask having a cubic dependence on the transverse coordinate.

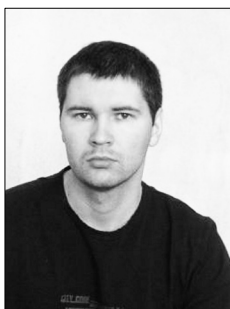
Key words: accelerating laser beams, Airy beams, trajectory of the beam.

Сведения об авторах



Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и, по совместительству, профессор кафедры технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute (Samara) of the Russian Academy of Sciences and professor of Computer Science Department at Samara State Aerospace University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in physics and mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE and OSA member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.



Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Кандидат физико-математических наук (2005 год), работает научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН), является докторантом кафедры технической кибернетики СГАУ. Ковалёв А.А. – специалист в области дифракционной оптики и нанофотоники. В списке научных работ 50 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика, фотонно-кристаллические устройства.

E-mail: alanko@smr.ru.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from the S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths degree (2002). He is a researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS), holding a part-time position of assistant at SSAU's Technical Cybernetics sub-department. He is a specialist in such areas as diffractive optics and nanophotonics. He is co-author of 50 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices.



Засканов Станислав Германович, 1990 года рождения. В 2011 году получил степень бакалавра в Самарском государственном аэрокосмическом университете имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и физика». Обучается в магистратуре на кафедре технической кибернетики СГАУ. Область научных интересов: обработка изображений, распознавание образов, рентгеновская оптика, нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика.

E-mail: icekilla@yandex.ru.

Stanislav Zascanov (b. 1990). Received a bachelor's degree in Samara State Aerospace University (2011) in applied mathematics and physics. He is a master of Department of Technical Cybernetics of Samara State Aerospace University. Major fields of research: image processing, pattern recognition, x-ray optics, nanophotonics, diffractive computer optics.

Поступила в редакцию 5 февраля 2013 г.