

АВТОМОДУЛЯЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Алименков И.В.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Аннотация

Найдено в квадратурах решение обобщённого нелинейного уравнения Шрёдингера с произвольной нелинейностью, характеризующейся некоторой функцией нелинейного отклика среды на внешнее гармоническое возмущение, зависящей от интенсивности волнового поля.

Ключевые слова: обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера, произвольная функция нелинейного отклика на гармоническое внешнее возмущение, точное решение в квадратурах, солитонные решения.

Введение

Обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) [1] имеет вид

$$i\partial\psi/\partial t + \partial^2\psi/\partial x^2 + g(I)\psi = 0, \tag{1}$$

где $I = |\psi|^2$ – интенсивность поля, $g(I)$ – функция, характеризующая нелинейный отклик среды на внешнее гармоническое возмущение, причём $g(0) = 0$, а при больших интенсивностях функция отклика стремится к постоянному значению [1]. Это уравнение описывает эволюцию комплексной огибающей несущей монохроматической волны в нелинейной среде. Оно записано в безразмерном виде, и быстрые пространственно-временные осцилляции уже отделены.

Разложение $g(I)$ в степенной ряд имеет вид

$$g(I) = \mu_1 I + \mu_2 I^2 + \mu_3 I^3 + \dots$$

При малых значениях интенсивности I можно ограничиться несколькими первыми членами разложения. Если $g(I) \cong \mu_1 I$, то нелинейный отклик называется керровским и уравнение (1) имеет кубическую нелинейность. Этот случай детально исследован многими авторами. Наиболее полное изложение приведено в [2]. Если $g(I)$, рассматриваемая как функция на всей числовой оси, имеет экстремум в нуле (некерровский отклик), то $g(I) \cong \mu_2 I^2$ и уравнение (1) имеет нелинейность пятой степени. Солитонное решение для этого случая найдено в [3]. Если же $g(I) \cong \mu_1 I + \mu_2 I^2$ (нелинейный отклик смешанного типа), то уравнение (1) характеризуется нелинейностью типа кубик-квинтик и его солитонное решение найдено в [4].

В данной работе не предполагается разложение функции $g(I)$ в ряд, а будет получено решение уравнения для интенсивности I в квадратурах.

Основной формализм

Подставляя в (1) выражение $\psi = \sqrt{I} \exp\{i(qx)\}$, где q – поправка к центральному волновому числу, получим следующую систему уравнений для интенсивности:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + 2q \frac{\partial I}{\partial x} = 0; \tag{2}$$

$$2I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 = 4q^2 I^2 - 4g(I)I^2. \tag{3}$$

Уравнение (2), будучи линейным однородным уравнением первого порядка [6], имеет своим общим решением *любую* дифференцируемую сложную функцию $I = I(s(x,t))$, где $s(x,t)$ – левая часть первого интеграла уравнения характеристик, имеющая вид

$$s = x - x_0 - 2qt. \tag{4}$$

Так как $\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{dI}{ds} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{dI(s)}{ds}$, то уравнение (3)

превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2I \frac{d^2 I}{ds^2} - \left(\frac{dI}{ds}\right)^2 = 4q^2 I^2 - 4g(I)I^2. \tag{5}$$

Несложно проверить, что (5) следует из нормальной системы гамильтоновых уравнений

$$\frac{dI}{ds} = \frac{\partial H}{\partial P}, \tag{6}$$

$$\frac{dP}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial I} \tag{7}$$

с функцией Гамильтона

$$H = (4P^2 - q^2) \frac{I}{2} + \frac{1}{2} G(I), \tag{8}$$

где $G(I)$ – первообразная для функции $g(I)$, т.е.

$$G(I) = \int g(I) dI. \tag{9}$$

Таким образом, для уравнения (5) существует частица-аналог, подчиняющаяся классическим уравнениям динамики. Иными словами, (5) является уравнением Эйлера-Лагранжа для механической частицы-аналога.

Хорошо известно [5], [6], что решения $I(s)$, асимптотически стремящиеся к нулю на бесконечности, существуют (если они существуют) при нулевой энергии механической частицы-аналога, т.е. при $H = 0$. Из (6) с учётом (8) получим $dI/ds = 4IP$, откуда $P = (dI/ds)/4I$. Подставляя это выражение в (8) и приравнявая результат к нулю, находим

$$\frac{dI}{ds} = \sqrt{4I^2 q^2 - 4IG(I)}.$$

Интегрируя последнее выражение, получим решение уравнения (5) в квадратурах:

$$\frac{1}{2} \int \frac{dI}{\sqrt{q^2 I^2 - IG(I)}} = s. \tag{10}$$

Аддитивная произвольная постоянная в (10) включена в постоянную x_0 , входящую в правую часть (10).

Формула (10) является основным результатом данной работы. Она в неявной форме определяет решение $I = I(x - x_0 - 2qt)$, представляющее собой локализованный импульс, движущийся с постоянной скоростью.

Применим формулу (10) к различным случаям.

Для случая керровской нелинейности $g(I) = \mu_1 I$. Тогда $G(I) = \mu_1 I^2 / 2$. Полагая для удобства $\mu_1 = 2\mu$, из формулы (10) получим

$$\frac{1}{2} \int \frac{dI}{I \sqrt{q^2 - \mu I}} = s.$$

Вычисляя интеграл [7] в левой части, имеем

$$-\frac{1}{|q|} \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{q^2 - \mu I}}{|q|} = s.$$

Обращая это выражение, находим

$$I = \frac{q^2 / \mu}{ch^2(qs)}.$$

Обозначим, как это принято, $q^2 / \mu = A^2$. Тогда

$$I = A^2 / ch^2(\sqrt{\mu}As),$$

что в точности совпадает с известным [2] результатом. A^2 имеет физический смысл пикового значения безразмерной интенсивности импульса.

Для случая некерровской нелинейности $g(I) = \mu_2 I^2$. Тогда $G(I) = \mu_2 I^3 / 3$. Полагая для удобства $\mu_2 = 3\mu$, из формулы (10) получим

$$\frac{1}{2} \int \frac{dI}{I \sqrt{q^2 - \mu I^2}} = s.$$

Вычисляя интеграл в левой части, имеем

$$-\frac{1}{2|q|} \operatorname{Arch} \left| \frac{q/\sqrt{\mu}}{I} \right| = s.$$

Отсюда

$$I = \frac{|q|/\sqrt{\mu}}{ch(2|q|s)}.$$

Обозначая, как обычно, $|q|/\sqrt{\mu} = A^2$, окончательно получим

$$I = \frac{A^2}{ch(2\sqrt{\mu}A^2s)},$$

что совпадает с результатом, найденным в [3].

Совершенно аналогично рассматривается и нелинейный отклик смешанного типа $g(I) = \mu_1 I + \mu_2 I^2$, что приводит к результату, найденному в [4].

Заключение

Таким образом, найденная в данной работе квадратура (10), определяющая в неявном виде точное решение обобщённого НУШ в форме локализованного импульса, содержит в себе как частные случаи все известные результаты. Эта статья является обобщающей по отношению к работам [3] и [4], что и побудило автора сохранить общность заголовков.

Литература

1. **Кившарь, Ю.С.** Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам / Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. – М.: Физматлит. – 2005. – 648с.
2. **Тахтаджян, Л.А.** Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. – М.: Наука. – 1986. – 528с.
3. **Алименков, И.В.** Автомодуляция одномерных волн на основе нелинейного уравнения Шрёдингера с некерровской нелинейностью // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33. – Вып. 3. – С. 240-242.
4. **Алименков, И.В.** Автомодуляция одномерных волн на основе нелинейного уравнения Шрёдингера с нелинейностью типа кубик-квинтик // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36. – Вып. 1. – С. 34-35.
5. **Раджараман, Р.** Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. – М.: Мир. – 1985. – 416с.
6. **Степанов, В.В.,** Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИТТЛ. – 1953. – 468с.
7. **Двайт, Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука. – 1977. – 224с.

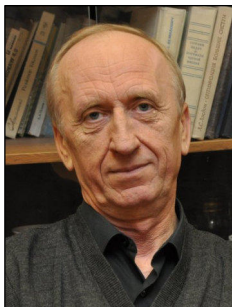
References

1. **Kivshar, Y.S.** Optical solitons. From Fibers to Photonic Crystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agrawal – Moscow: "Fizmatlit" Publisher, – 2005. – 648p. – (In Russian).
2. **Takhtajan, L.A.** Hamilton approach in theory of solitons / L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1986, – 528p. – (In Russian).
3. **Alimenkov, I.V.** Automodulation of one-dimensional waves based on nonlinear Shredinger equation with non kerr nonlianerity // Computer Optics. – 2009. – Vol. 33, No.3. – P. 240-242. – (in Russian).
4. **Alimenkov, I.V.** Automodulation of one-dimensional waves based on nonlinear Shredinger equation with nonlianerity cubic-quintic type // Computer Optics. – 2012. – Vol. 36, No.1. – P. 34-35. – (in Russian).
5. **Rajaraman, R.** Solitons and instantsons in quantum field theory. – Moscow: "Mir" Publisher, 1985. – 416 p. – (In Russian).
6. **Stepanov V.V.** Course of differential equations. – Moscow: "GITTL" Publisher, 1953. – 468 p. – (In Russian).
7. **Dwight, H.B.** Tables of integrals and other mathematical data. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1977. – 224 p. – (In Russian).

**AUTOMODULATION OF ONE-DIMENSIONAL WAVES BASED
ON NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH ARBITRARY NONLINEARITY***I. V. Alimenkov**S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)***Abstract**

It is found in quadratures the solution of nonlinear Schrödinger equation with arbitrary nonlinearity characterized by any function of external influence on nonlinear medium under harmonic field.

Key words: common nonlinear Schrödinger equation, arbitrary function of nonlinear reaction, exact solution in quadratures, solitons solutions.

Сведения об авторе

Алименков Иван Васильевич, 1949 года рождения. В 1977 году с отличием окончил Куйбышевский государственный университет по специальности «Физика». Кандидат физико-математических наук, работает в должности доцента кафедры «Прикладная математика» СГАУ. Область научных интересов – нелинейная физика.

E-mail: i-alimenkov@mail.ru.

Ivan Vasilyevich Alimenkov, 1949 year of birth. In 1977 has graduated with honours Kuibyshev State University on a speciality “Physics”. Candidate in Physics and Mathematics, works as associated professor of sub-department “Applied Mathematics” SSAU. Research interests – nonlinear Physics.

Поступила в редакцию 29 января 2013 г.