

## ОСОБЕННОСТИ НЕПАРАКСИАЛЬНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГАУССОВЫХ И БЕССЕЛЕВЫХ МОД ВДОЛЬ ОСИ КРИСТАЛЛА

Хонина С.Н., Волотовский С.Г., Харитонов С.И.  
Институт систем обработки изображений РАН

### Аннотация

В работе аналитически и численно показано, что непараксиальные модовые лазерные пучки при распространении вдоль оси кристалла испытывают периодическое изменение интенсивности, связанное с интерференцией обыкновенного и необыкновенного лучей.

Для пучков Бесселя период осцилляций обратно пропорционален квадрату пространственной частоты лазерного пучка и разности диэлектрических проницаемостей. Для линейно-поляризованного излучения происходит периодическое перераспределение энергии между двумя поперечными компонентами, а для пучка с круговой поляризацией энергия перекачивается из исходного пучка в вихревой пучок второго порядка и обратно. Полученная зависимость позволяет согласовывать параметры падающего пучка с длиной кристалла для полного преобразования в вихревой пучок.

Для гауссовых пучков аналогичные периодические изменения носят нелинейный характер. Моды Лагерра–Гаусса с высоким радиальным порядком в непараксиальном режиме демонстрируют поведение, близкое к бесселевым модам на небольших расстояниях. С увеличением расстояния периодичность замедляется, а сам пучок астигматически искажается.

**Ключевые слова:** одноосный кристалл, модовые лазерные пучки высокого порядка, периодическое изменение интенсивности, преобразование в вихревой пучок.

### Введение

Анизотропные вещества широко используются в оптике [1, 2]. Распространение лазерных мод высокого порядка в среде с сильной анизотропией приводит к сложным поляризационно-модовым преобразованиям [3–6].

Наиболее заметно анизотропные эффекты проявляются для пучков Бесселя [7–11] в связи с особой структурой их пространственного спектра. Коническая структура волнового поля характерна также для излучения, распространяющегося в двuosных кристаллах [12–14].

В данной работе проводится сравнение непараксиального распространения лазерных мод Бесселя и Лагерра–Гаусса (ЛГ) высокого порядка в одноосных кристаллах. Показано, что различие в поведении двух типов мод связано с их спектральным распределением и интерференцией обыкновенного и необыкновенного лучей. Аналогичное различие в поведении мод Бесселя и ЛГ отмечалось ранее при периодическом самовоспроизведении многомодовых пучков в изотропной среде [15, 16].

В данной работе аналитически и численно показано, что при распространении вдоль оси кристалла непараксиальные пучки Бесселя испытывают периодическую трансформацию. Характер периодических изменений зависит от типа поляризации падающего пучка, в частности при круговой поляризации происходят преобразования спинового углового момента в орбитальный [3–6].

Аналогичное преобразование для гауссовых мод не столь выражено. Например, в работах [3, 17] было показано, что лишь половина энергии гауссова пучка с круговой поляризацией преобразуется в вихревой пучок, причём на бесконечном расстоянии. Для достижения большей эффективности преобразования ис-

пользуются каскады анизотропных устройств. В работе [11] было показано, что можно достичь большей эффективности преобразования для элегантных мод ЛГ, хотя для обычных мод ЛГ с высоким радиальным порядком и нулевым угловым порядком эффективность не превышает 51%.

В данной работе мы показываем, что для обычных высокочастотных мод ЛГ в непараксиальном режиме характерно поведение, близкое к бесселевым модам, но только в ближней зоне дифракции. На более дальних расстояниях периодичность замедляется и пучок претерпевает астигматические искажения.

### 1. Интегральный оператор распространения электромагнитных волн в кристалле

В работах [18, 19] на основе разложения по плоским волнам был получен в компактной форме интегральный оператор распространения электромагнитных полей в кристаллах, описываемых следующими тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости:

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

В работе [20] этот оператор был записан в полярных координатах, удобных для описания распространения пучков с радиальной симметрией:

$$\mathbf{E}(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} E_x(\rho, \theta, z) \\ E_y(\rho, \theta, z) \\ E_z(\rho, \theta, z) \end{pmatrix} = \iint_{\sigma \leq \sigma_0} \left\{ c_o(\sigma, \phi) \mathbf{e}_o(\sigma, \phi) \exp[ik\gamma_o(\sigma, \phi)z] + \right. \quad (2) \\ \left. + c_e(\sigma, \phi) \mathbf{e}_e(\sigma, \phi) \exp[ik\gamma_e(\sigma, \phi)z] \right\} \times \\ \times \exp\{ik\rho\sigma \cos(\phi - \theta)\} \sigma d\sigma d\phi,$$

где векторы  $\mathbf{e}_o$  и  $\mathbf{e}_e$ , соответствующие обыкновенному и необыкновенному лучам, определяются значениями матрицы следующего вида [15]:

$$\mathbf{M}(\sigma, \phi) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2 \cos \phi \sin \phi}{\epsilon_{zz}} - \mu_{yx} & \frac{\sigma^2 \cos^2 \phi}{\epsilon_{zz}} - \mu_{yy} \\ -\frac{\sigma^2 \sin^2 \phi}{\epsilon_{zz}} + \mu_{xx} & \frac{\sigma^2 \cos \phi \sin \phi}{\epsilon_{zz}} + \mu_{xy} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2 \cos \phi \sin \phi}{\mu_{zz}} + \epsilon_{yx} & -\frac{\sigma^2 \cos^2 \phi}{\mu_{zz}} + \epsilon_{yy} \\ \frac{\sigma^2 \sin^2 \phi}{\mu_{zz}} - \epsilon_{xx} & -\frac{\sigma^2 \cos \phi \sin \phi}{\mu_{zz}} - \epsilon_{xy} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

а именно:

$$\begin{aligned} e_{ox}(\sigma, \phi) &= M_{12}, \\ e_{oy}(\sigma, \phi) &= \frac{1}{2} \left[ M_{22} - M_{11} + \sqrt{(M_{11} - M_{22})^2 + 4M_{12}M_{21}} \right], \\ e_{ex}(\sigma, \phi) &= M_{12}, \\ e_{ey}(\sigma, \phi) &= \frac{1}{2} \left[ M_{22} - M_{11} - \sqrt{(M_{11} - M_{22})^2 + 4M_{12}M_{21}} \right], \\ e_{oz}(\sigma, \phi) &= -\frac{\sigma}{\epsilon_{zz} \gamma_o(\sigma, \phi)} \left[ (\epsilon_{xx} \cos \phi + \epsilon_{yx} \sin \phi) \times \right. \\ &\quad \left. \times e_{ox}(\sigma, \phi) + (\epsilon_{xy} \cos \phi + \epsilon_{yy} \sin \phi) e_{oy}(\sigma, \phi) \right], \\ e_{ez}(\sigma, \phi) &= -\frac{\sigma}{\epsilon_{zz} \gamma_e(\sigma, \phi)} \left[ (\epsilon_{xx} \cos \phi + \epsilon_{yx} \sin \phi) \times \right. \\ &\quad \left. \times e_{ex}(\sigma, \phi) + (\epsilon_{xy} \cos \phi + \epsilon_{yy} \sin \phi) e_{ey}(\sigma, \phi) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Распространение обыкновенного и необыкновенного лучей связано с различными направлениями:

$$\begin{aligned} \gamma_o(\sigma, \phi) &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (M_{22} + M_{11}) + \sqrt{(M_{22} - M_{11})^2 + 4M_{12}M_{21}} \right]}, \\ \gamma_e(\sigma, \phi) &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (M_{22} + M_{11}) - \sqrt{(M_{22} - M_{11})^2 + 4M_{12}M_{21}} \right]}. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты в выражении (2) определяются пространственно-частотным спектром  $\mathbf{S}(\sigma, \phi)$ :

$$\begin{aligned} c_o(\sigma, \phi) &= \frac{1}{\Delta} \left[ S_x(\sigma, \phi) e_{ey}(\sigma, \phi) - S_y(\sigma, \phi) e_{ex}(\sigma, \phi) \right], \\ c_e(\sigma, \phi) &= -\frac{1}{\Delta} \left[ S_x(\sigma, \phi) e_{oy}(\sigma, \phi) - S_y(\sigma, \phi) e_{ox}(\sigma, \phi) \right], \\ \Delta &= e_{ox}(\sigma, \phi) e_{ey}(\sigma, \phi) - e_{oy}(\sigma, \phi) e_{ex}(\sigma, \phi). \end{aligned} \quad (6)$$

Спектр определяется по формуле ( $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число в вакууме):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\sigma, \phi) &= \begin{pmatrix} S_x(\sigma, \phi) \\ S_y(\sigma, \phi) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} E_x(r, \phi) \\ E_y(r, \phi) \end{pmatrix} \exp\{-ikr\sigma \cos(\phi - \phi)\} r dr d\phi, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $E_x(r, \phi)$ ,  $E_y(r, \phi)$  – поперечные электрические компоненты электромагнитного поля во входной плоскости (при  $z = 0$ ).

Выражения (2) – (7) позволяют моделировать распространение произвольных электромагнитных полей в кристалле в непараксиальном режиме с учётом происходящих при этом поляризационных преобразований.

Если входные поперечные компоненты электрического поля имеют фазовую вихревую зависимость:

$$\begin{aligned} E_x(r, \phi) &= E_{0x}(r) \exp(im\phi), \\ E_y(r, \phi) &= E_{0y}(r) \exp(im\phi), \end{aligned} \quad (8)$$

то выражение (7) упрощается:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S_x(\sigma, \phi) \\ S_y(\sigma, \phi) \end{pmatrix} &= \\ &= \frac{k}{\lambda} i^m \exp(im\phi) \int_0^R \begin{pmatrix} E_{0x}(r) \\ E_{0y}(r) \end{pmatrix} J_m(kr\sigma) r dr. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассматриваемые нами гауссовы и бesselевы пучки позволяют в бесконечных пределах получить аналитическое выражение для (9). В конечных пределах также можно получить приближённую аналитическую оценку.

В частности, пусть во входной плоскости сформирована мода Лагерра–Гаусса (ЛГ) с номерами  $(n, m)$ :

$$\begin{pmatrix} E_x(r, \phi) \\ E_y(r, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} LG_{n,m}(r) \exp(im\phi), \quad (10)$$

где

$$LG_{n,m}(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2w_0^2}\right) \left(\frac{r}{w_0}\right)^{|m|} L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{w_0^2}\right), \quad (11)$$

$w_0$  – радиус перетяжки гауссова пучка,  $p_x, p_y$  – поляризационные коэффициенты.

Тогда пространственный спектр (9) пропорционален модам ЛГ:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S_x(\sigma, \phi) \\ S_y(\sigma, \phi) \end{pmatrix} &= \\ &= \frac{k}{\lambda} i^m \exp(im\phi) \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \int_0^\infty LG_{n,m}(r) J_m(kr\sigma) r dr = \\ &= \frac{k}{\lambda} i^m \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} LG_{n,m}(\sigma) \exp(im\phi). \end{aligned} \quad (12)$$

Если пределы ограничены, но достаточно велики по сравнению с радиусом перетяжки  $w_0$ , то выражение (12) практически не изменится.

Если во входной плоскости сформирована мода Бесселя  $m$ -го порядка:

$$\begin{pmatrix} E_x(r, \varphi) \\ E_y(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} J_m(k\sigma_0 r) \exp(im\varphi), \quad (13)$$

тогда

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S_x(\sigma, \phi) \\ S_y(\sigma, \phi) \end{pmatrix} &= \frac{k}{\lambda} i^m \exp(im\phi) \times \\ &\times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \int_0^\infty J_m(k\sigma_0 r) J_m(kr\sigma) r dr = \\ &= \frac{k}{\lambda} i^m \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \frac{\delta(\sigma - \sigma_0)}{\sigma_0} \exp(im\phi). \end{aligned} \quad (14)$$

Для ограниченных пучков Бесселя выражение (14) будет выполняться приближённо, но всё равно основная энергия будет сосредоточена около пространственной частоты  $\sigma_0$ .

На рис. 1 приведены примеры входных и спектральных распределений для мод ЛГ и Бесселя при  $m=0$ . Параметры мод подобраны так, чтобы размер центрального светового пятна был одинаковым (см. рис. 1а, б). Однако спектральное распределение при этом для двух типов мод совершенно различное. Как видно из рис. 1в, для мод ЛГ спектр повторяет входную функцию, и энергия почти равномерно распределена в области низких частот с максимумом в нуле. Для мод Бесселя практически вся энергия в спектре (рис. 1г) находится на частоте, соответствующей числовой апертуре пучка.

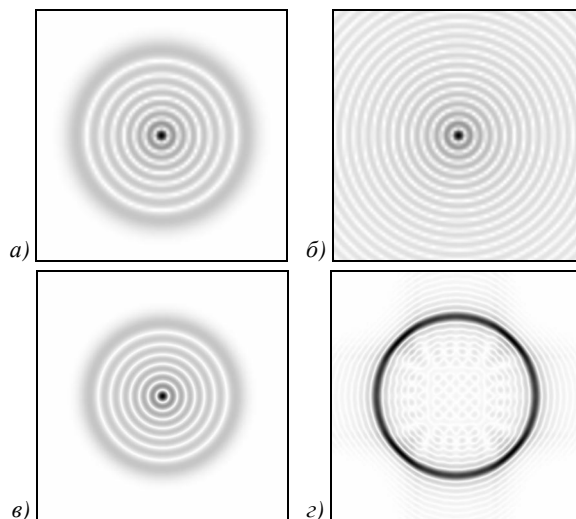


Рис. 1. Амплитуда моды ЛГ (а) и Бесселя (б) и соответствующие им амплитуды спектральных распределений (в, г)

### 2. Распространение модовых пучков вдоль оси кристалла

Рассмотрим одноосный кристалл, обладающий только анизотропной диэлектрической проницаемостью (магнитная проницаемость изотропна), причём ось кристалла ориентирована вдоль оптической оси. Тогда тензоры (1) примут следующий вид:

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_e \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Также оператор распространения (2) упрощается:

$$\mathbf{E}(\rho, \theta, z) = k^2 i^{2m} \exp(im\theta) \int_0^\infty \left\{ \begin{aligned} &\begin{pmatrix} SS_m(t, \theta) & -SC_m(t, \theta) \\ -SC_m(t, \theta) & CC_m(t, \theta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[ikz\gamma_1(\sigma)] + \\ &\begin{pmatrix} CC_m(t, \theta) & SC_m(t, \theta) \\ SC_m(t, \theta) & SS_m(t, \theta) \\ -\frac{\epsilon_o \sigma}{\epsilon_e \gamma_2(\sigma)} C_m(t, \theta) & -\frac{\epsilon_o \sigma}{\epsilon_e \gamma_2(\sigma)} S_m(t, \theta) \end{pmatrix} \exp[ikz\gamma_2(\sigma)] \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} F_m(\sigma) \sigma d\sigma, \quad (16)$$

где  $\gamma_1(\sigma) = \sqrt{\epsilon_o - \sigma^2}$ ,  $\gamma_2(\sigma) = \sqrt{\epsilon_o - \sigma^2 \frac{\epsilon_o}{\epsilon_e}}$ ,  $(17)$

$$\begin{aligned} C_m(t, \theta) &= \frac{i}{2} [e^{i\theta} J_{m+1}(t) - e^{-i\theta} J_{m-1}(t)], & S_m(t, \theta) &= \frac{1}{2} [e^{i\theta} J_{m+1}(t) + e^{-i\theta} J_{m-1}(t)], \\ SC_m(t, \theta) &= \frac{i}{4} [e^{i2\theta} J_{m+2}(t) - e^{-i2\theta} J_{m-2}(t)], & CC_m(t, \theta) &= \frac{1}{4} [2J_m(t) - e^{i2\theta} J_{m+2}(t) - e^{-i2\theta} J_{m-2}(t)], \\ SS_m(t, \theta) &= \frac{1}{4} [2J_m(t) + e^{i2\theta} J_{m+2}(t) + e^{-i2\theta} J_{m-2}(t)], & t &= k\rho\sigma, \end{aligned} \quad (18)$$

$$F_m(\sigma) = \begin{cases} LG_{n,m}(\sigma), & \text{мода ЛГ,} \\ \frac{\delta(\sigma - \sigma_0)}{\sigma_0}, & \text{мода Бесселя.} \end{cases} \quad (19)$$

Как видно из (16), обыкновенный луч соответствует ТЕ-моду, необыкновенный – ТМ-моду.

В отсутствие вихревой фазы (при  $m=0$ ) выражение (16) удобно записать в покомпонентном виде:

$$\begin{aligned}
 E_x(\rho, \theta, z) &= \frac{k^2}{2} \int_0^\infty p_x J_0(k\rho\sigma) \left[ \exp(ikz\gamma_1(\sigma)) + \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) \right] F_0(\sigma) \sigma d\sigma + \\
 &+ \frac{k^2}{2} \int_0^\infty J_2(k\rho\sigma) \left[ p_x \cos 2\theta + p_y \sin 2\theta \right] \left[ \exp(ikz\gamma_1(\sigma)) - \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) \right] F_0(\sigma) \sigma d\sigma, \\
 E_y(\rho, \theta, z) &= \frac{k^2}{2} \int_0^\infty p_y J_0(k\rho\sigma) \left[ \exp(ikz\gamma_1(\sigma)) + \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) \right] F_0(\sigma) \sigma d\sigma + \\
 &+ \frac{k^2}{2} \int_0^\infty J_2(k\rho\sigma) \left[ p_x \sin 2\theta + p_y \cos 2\theta \right] \left[ \exp(ikz\gamma_1(\sigma)) - \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) \right] F_0(\sigma) \sigma d\sigma, \\
 E_z(\rho, \theta, z) &= -ik^2 \frac{\epsilon_o}{\epsilon_e} \int_0^\infty J_1(k\rho\sigma) \left[ p_x \cos \theta + p_y \sin \theta \right] \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) F_0(\sigma) \frac{\sigma^2}{\gamma_2(\sigma)} d\sigma.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

При круговой поляризации входного пучка  $p_y = \pm ip_x$  выражения (20) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} E_x(\rho, \theta, z) \\ E_y(\rho, \theta, z) \\ E_z(\rho, \theta, z) \end{pmatrix} &= \frac{k^2}{2} \int_0^\infty \begin{pmatrix} J_0(k\rho\sigma) \\ \pm i J_0(k\rho\sigma) \\ 0 \end{pmatrix} \left[ \exp(ikz\gamma_1(\sigma)) + \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) \right] F_0(\sigma) \sigma d\sigma + \\
 &+ \frac{k^2}{2} \int_0^\infty \begin{pmatrix} J_2(k\rho\sigma) \exp(\pm i2\theta) \left[ \exp(ikz\gamma_1(\sigma)) - \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) \right] \\ \pm i J_2(k\rho\sigma) \exp(\mp i2\theta) \left[ \exp(ikz\gamma_1(\sigma)) - \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) \right] \\ -2i \frac{\epsilon_o}{\epsilon_e} \frac{\sigma}{\gamma_2(\sigma)} J_1(k\rho\sigma) \exp(\pm i\theta) \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) \end{pmatrix} F_0(\sigma) \sigma d\sigma.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Из (21) видно, что при круговой поляризации в поперечных компонентах имеет место вихревая фазовая особенность второго порядка, в продольной – первого порядка. Причём в изотропной среде, когда  $\gamma_2(\sigma) = \gamma_1(\sigma)$ , вихревые особенности второго порядка исчезнут.

Вблизи оптической оси ( $\rho \rightarrow 0$ ) выражение (20) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 E_x(\rho \approx 0, \theta, z) &= \\
 &= \frac{k^2}{2} p_x \int_0^\infty \left[ \exp(ikz\gamma_1(\sigma)) + \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) \right] \times \\
 &\times J_0(k\rho\sigma) F_0(\sigma) \sigma d\sigma, \\
 E_y(\rho \approx 0, \theta, z) &= \\
 &= \frac{k^2}{2} p_y \int_0^\infty \left[ \exp(ikz\gamma_1(\sigma)) + \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) \right] \times \\
 &\times J_0(k\rho\sigma) F_0(\sigma) \sigma d\sigma, \\
 E_z(\rho \approx 0, \theta, z) &= \\
 &= -ik^2 \frac{\epsilon_o}{\epsilon_e} \int_0^\infty \left[ p_x \cos \theta + p_y \sin \theta \right] \times \\
 &\times \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) J_1(k\rho\sigma) F_0(\sigma) \frac{\sigma^2}{\gamma_2(\sigma)} d\sigma.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Из (22) видно, что вклад продольной компоненты вблизи оптической оси несущественен, так как  $J_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

### 3. Моделирование распространения пучков Бесселя

Используя выражение (19) для бesselевых пучков, можно получить явный вид для интенсивности на оптической оси:

$$\begin{aligned}
 |E(0, 0, z)|^2 &= k^4 \left\{ (|p_x|^2 + |p_y|^2) \times \right. \\
 &\times \left. \left[ 1 + \cos(kz[\gamma_2(\sigma_0) - \gamma_1(\sigma_0)]) \right] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

где  $\sigma_0$  – параметр входного бesselева пучка (13).

Как следует из (23), значение интенсивности на оптической оси периодически меняется в зависимости от пройденного расстояния в связи с интерференцией обыкновенного и необыкновенного лучей. Период осцилляций определяется разностью собственных чисел и значением параметра  $\sigma_0$ .

В параксиальном случае ( $\sigma_0$  – мало) разность собственных значений принимает следующий вид [20]:

$$\gamma_2(\sigma_0) - \gamma_1(\sigma_0) \approx \frac{\sigma_0^2 \sqrt{\epsilon_o} (\epsilon_e - \epsilon_o)}{2\epsilon_o \epsilon_e},
 \tag{24}$$

и период осцилляций определяется следующим выражением:

$$d_{zp} \approx \lambda \frac{2\epsilon_o \epsilon_e}{\sigma_0^2 \sqrt{\epsilon_o} (\epsilon_e - \epsilon_o)}.
 \tag{25}$$

Период (25) будет увеличиваться с уменьшением параметра  $\sigma_0$  и уменьшением разности показателей преломления для обыкновенного и необыкновенного

лучей. В изотропной среде ( $\epsilon_e = \epsilon_o$ ) период  $d_z = \infty$ , т.е. осцилляций не будет.

Ниже приведены результаты моделирования распространения пучка Бесселя нулевого порядка с  $\sigma_0 = 0,5$  в кристалле рутила, который имеет  $\epsilon_o = 6,84$ ,  $\epsilon_e = 6,43$  на расстоянии несколько сотен микрон (длина волны  $\lambda = 0,633$  мкм). Пучок Бесселя ограничен радиусом  $R = 50$  мкм, поэтому его модовые свойства сохраняются до расстояния  $z_b \approx n_e R / \sigma_0 \approx 290\lambda$ .

Заметим, что в работах [5,10] было рассмотрено вихревое преобразование для бesselевых пучков в дальней зоне, т.е. когда уже формируется кольцевое распределение, соответствующее пространственному спектру.

На рис. 2 показано входное распределение и пространственный спектр пучка, а также интенсивность на оптической оси. В соответствии с приведёнными параметрами период осцилляций (24)  $d_z = 70$  мкм, однако эта оценка была получена в параксиальном приближении. Более точная величина с использованием выражений (17) получается меньше –  $d_z \approx 69$  мкм. А значение, рассчитанное на основе численного интегрирования (18), оказывается ещё меньше –  $d_z \approx 68$  мкм (см. рис. 2б). Теоретические оценки оказались завышенными из-за приближённости допущения (19).

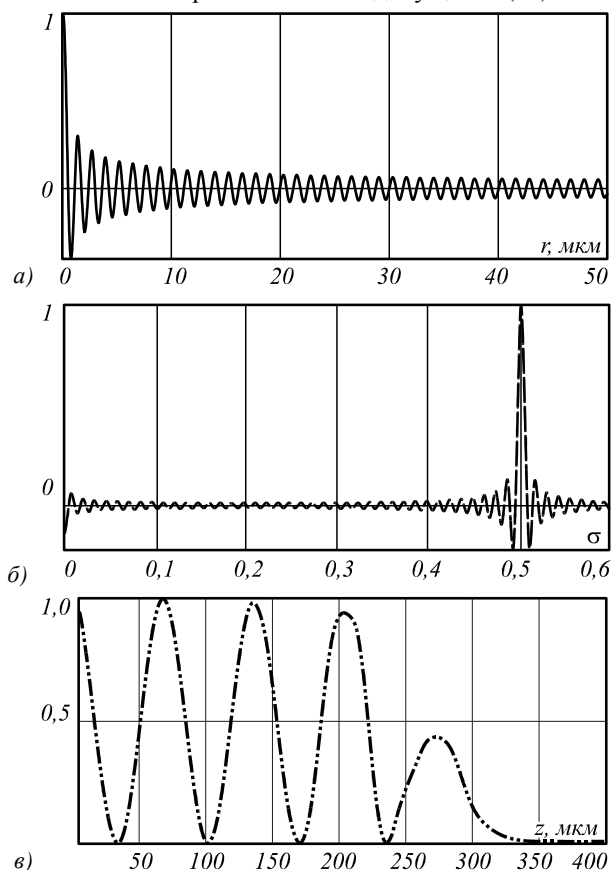


Рис. 2. Радиальное сечение амплитуды входного бesselева пучка (а), радиальное сечение амплитуды пространственного спектра (б), распределение интенсивности вдоль оптической оси (в)

В табл. 1 приведены результаты моделирования распространения пучка Бесселя вдоль оси кристалла

при различных типах поляризации. В первом столбце показано продольное распределение, во втором и четвертом – поперечные сечения в плоскостях минимума и максимума осевой интенсивности соответственно, а в третьем столбце – в средней плоскости. Приведены как покомпонентные распределения, так и общая интенсивность.

Для линейно-поляризованного излучения происходит периодическое перераспределение энергии между двумя поперечными компонентами, а для пучка с круговой поляризацией периодически энергия перекачивается либо в безвихревой пучок, соответствующий входному распределению, либо в вихревой пучок второго порядка. Продольная компонента, как отмечалось ранее, содержит фазовую сингулярность первого порядка, однако вклад её в общую интенсивность несущественен [20].

Численные результаты показывают возможность высокоэффективного преобразования входного пучка Бесселя нулевого порядка в пучок Бесселя второго порядка при круговой поляризации и определённом согласовании параметров пучка и длины кристалла.

#### 4. Моделирование распространения пучков ЛГ

Условие (22) верно для любого осесимметричного пучка с высокими пространственными частотами. Рассмотрим распространение пучков ЛГ (11) высоко-го порядка.

На рис. 3 показано входное распределение и пространственный спектр пучка ЛГ  $(n, m) = (63, 0)$  ( $w_0 = 3$  мкм,  $\lambda = 0,633$  мкм), а также интенсивность на оптической оси.

Как видно из приведённых на рис. 3 результатов, моды ЛГ бесконечно долго сохраняют свою структуру, т.к. пространственное спектральное распределение имеет вид входного пучка. При распространении пучок масштабно уширяется и, соответственно, падает интенсивность. С этим связан нелинейный характер продольного периодического изменения: значение периода, рассчитанное на основе численного интегрирования (18), увеличивается с ростом расстояния (см. рис. 3б). Нулевые значения интенсивности на оптической оси соответствуют следующим расстояниям:  $z_1 = 31$  мкм,  $z_2 = 106,5$  мкм,  $z_3 = 622$  мкм,  $z_4 = 2000$  мкм. Такое отличие поведения мод ЛГ от мод Бесселя отмечалось ранее при периодическом самовоспроизведении многомодовых пучков в изотропной среде [15, 16].

При увеличении расстояния моды ЛГ всё больше удовлетворяют условию параксиальности. В параксиальном случае (присутствует энергия только при малых  $\sigma$ ) собственные значения (17) принимают следующий вид:

$$\gamma_1(\sigma) \approx \sqrt{\epsilon_o} - \frac{\sigma^2 \sqrt{\epsilon_o}}{2\epsilon_o},$$

$$\gamma_2(\sigma) \approx \sqrt{\epsilon_o} - \frac{\sigma^2 \sqrt{\epsilon_o}}{2\epsilon_e}.$$
(26)

Таблица 1. Распространение пучка Бесселя нулевого порядка вдоль оси кристалла

Поляризация	Продольное распределение интенсивности в плоскости $y=0, z \in [10 \text{ мкм}, 400 \text{ мкм}], x \in [-2,5 \text{ мкм}, 2,5 \text{ мкм}]$	Поперечное распределение интенсивности в плоскости ( $5 \times 5 \text{ мкм}^2$ )			
		$z = 34 \text{ мкм}$	$z = 51 \text{ мкм}$	$z = 67,5 \text{ мкм}$	
x-линейная	$ \mathbf{E} ^2$				
	$ E_x ^2$				
	$ E_y ^2$				
	$ E_z ^2$				
круговая	$ \mathbf{E} ^2$				
	$ E_x ^2$				
	$ E_y ^2$				
	$ E_z ^2$				

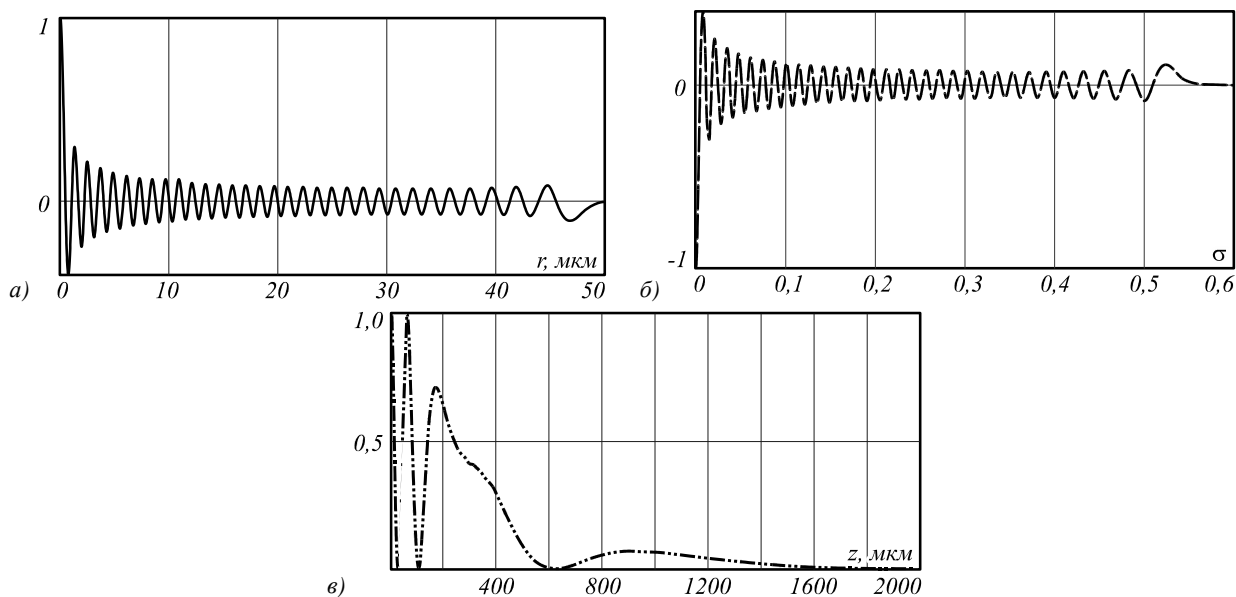


Рис. 3. Радиальное сечение амплитуды входного пучка ЛГ  $(n, m) = (63, 0)$  (а), радиальное сечение амплитуды пространственного спектра (б), распределение интенсивности вдоль оптической оси (в)

Тогда интенсивность на оптической оси ( $\rho=0$ ) можно определить на основании выражения (22):

$$|E(0,0,z)|^2 \approx \frac{k^4}{4} (|p_x|^2 + |p_y|^2) \times \int_0^\infty \left[ \exp\left(-ikz \frac{\sigma^2 \sqrt{\epsilon_o}}{2\epsilon_o}\right) \times \exp\left(-ikz \frac{\sigma^2 \sqrt{\epsilon_e}}{2\epsilon_e}\right) \right] GL_{n,0}(\sigma) \sigma d\sigma \quad (27)$$

Квадратичные фазовые множители в подынтегральном выражении (27) играют роль сходящегося волнового фронта.

Для анализа осевого распределения воспользуемся методикой, рассмотренной в [21], состоящей в сведении выражения (27) к одномерному преобразованию Фурье:

$$|E(0,0,z)|^2 \approx \frac{k^4}{4} (|p_x|^2 + |p_y|^2) \times \left[ \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-ikz \frac{x\sqrt{\epsilon_o}}{2\epsilon_o}\right) + \exp\left(-ikz \frac{x\sqrt{\epsilon_e}}{2\epsilon_e}\right) \right] GL_{n,0}(\sqrt{x}) dx \quad (28)$$

Таким образом, выражение (28) является интерференцией двух одинаковых пучков различного масштаба:

$$|E(0,0,z)|^2 \approx \frac{k^4}{4} (|p_x|^2 + |p_y|^2) \times \left[ \frac{1}{2} \left[ \Psi\left(\frac{z\sqrt{\epsilon_o}}{2\lambda\epsilon_o}\right) + \Psi\left(\frac{z\sqrt{\epsilon_e}}{2\lambda\epsilon_e}\right) \right] \right]^2, \quad (29)$$

где  $\Psi(z)$  – соответствует одномерному преобразованию Фурье от функции  $GL_{n,0}(\sqrt{x})$ .

В табл. 2 приведены результаты моделирования распространения пучка ЛГ при различных типах поляризации. В первом столбце показано продольное распределение, во втором и четвёртом – поперечные сечения в плоскостях минимумов осевой интенсивности, а в третьем столбце – в средней плоскости.

С увеличением расстояния происходит масштабное увеличение поперечного размера пучка. Для линейно-поляризованного излучения хорошо заметно астигматическое искажение распределения общей интенсивности. Для круговой поляризации это искажение происходит в отдельных поперечных компонентах электрического поля и не сказывается на симметрии в общей интенсивности. Заметим, однако, что астигматические искажения приводят к распаду фазовой сингулярности второго порядка на две сингулярности первого порядка (см. фазовые картины в последнем столбце для круговой поляризации).

Как следует из результатов моделирования, на больших расстояниях моды ЛГ высокого порядка ведут себя как моды Бесселя. В ближней зоне дифракции

моды ЛГ демонстрируют существенную непараксиальность, которая определяется высокочастотными характеристиками. На дальних расстояниях моды ЛГ подвергаются астигматическому искажению.

### Заключение

В работе в компактной форме записан интегральный оператор распространения вихревых лазерных пучков вдоль оси кристалла. На основе полученного выражения аналитически показано, что при распространении вдоль оси кристалла непараксиальные лазерные пучки испытывают периодическое изменение интенсивности, связанное с интерференцией обычного и необыкновенного лучей.

В явном виде получена формула периодического изменения пучков Бесселя, связанная с характеристиками пространственного спектра падающего пучка и параметрами кристалла.

Теоретические выкладки подтверждены численным моделированием, и показана возможность полного преобразования высокочастотных лазерных пучков в вихревые пучки с фазовой сингулярностью второго порядка.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты РФФИ 13-07-00266 и 13-07-97004р\_поволжье\_а) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение №8231).

### Литература

1. **Ярив, А.** Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх; пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 616 с.
2. **Федоров, Ф.И.** Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск: Издат. Академии Наук БССР, 1958. 381 с.
3. **Ciattoni, A.** Circularly polarized beams and vortex generation in uniaxial media / A. Ciattoni, G. Cincotti, C. Palma // J. Opt. Soc. Am. A. – 2003. – Vol. 20(1). – P. 163-171.
4. **Marrucci, L.** Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media / L. Marrucci, C. Manzo and D. Paparo // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 96. – P. 163905-163908.
5. **Fadeyeva, T.A.** Spatially engineered polarization states and optical vortices in uniaxial crystals / T.A. Fadeyeva, V.G. Shvedov, Y.V. Izdebskaya, A.V. Volyar, E. Brasselet, D.N. Neshev, A.S. Desyatnikov, W. Krolikowski and Y.S. Kivshar // Opt. Expr. – 2010. – Vol. 18(10). – P. 10848-10863.
6. **Picon, A.** Spin and orbital angular momentum propagation in anisotropic media: theory / A. Picon, J. Benseny, Mompant and G.F. Calvo // J. Opt. – 2011. – Vol. 13. – P. 064019-064025.
7. **Stepanov, M.A.** Transformation of Bessel beams under internal conical refraction / M.A. Stepanov // Optics Communications. – 2002. – Vol. 212. – P. 11-16.
8. **Zusin, D.H.** Bessel beam transformation by anisotropic crystals / D.H. Zusin, R. Maksimenka, V.V. Filippov, R.V. Chulkov, M. Perdrix, O. Gobert and A.S. Grabtchikov // J. Opt. Soc. Am. A – 2010. – Vol. 27, N 8. – P. 1828-1833.
9. **Khilo, N.A.** Conical diffraction and transformation of Bessel beams in biaxial crystals / N.A. Khilo // Optics Communications. – 2013. – Vol. 286. – P. 1-5.

Таблица 2. Распространение пучка ЛГ  $(n,m)=(63,0)$  вдоль оси кристалла

Поляризация	Продольное распределение интенсивности в плоскости $y=0, z \in [10\text{мкм}, 400\text{мкм}], x \in [-2,5\text{мкм}, 2,5\text{мкм}]$	Поперечное распределение интенсивности в плоскости $(5 \times 5 \text{мкм}^2)$		
		$z = 106,5 \text{ мкм}$	$z = 400 \text{ мкм}$	$z = 622 \text{ мкм}$
x-линейная	$ E ^2$			
	$ E_x ^2$			
	$ E_y ^2$			
	$ E_z ^2$			
круговая	$ E ^2$			
	$ E_x ^2$			
	$ E_y ^2$			
	$ E_z ^2$			

10. **Loussert, C.** Efficient scalar and vectorial singular beam shaping using homogeneous anisotropic media / C. Loussert and E. Brasselet // *Opt. Lett.* – 2010. – Vol. 35. – P. 7-9.

11. **Fadeyeva, T.A.** Extreme spin-orbit coupling in crystal-traveling paraxial beams / T.A. Fadeyeva and A.V. Volyar // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2010. – Vol. 27, N 3. – P. 381-389.

12. **Бельский, А.М.** Распространение ограниченных световых пучков вдоль лучевых осей двуосных кристаллов / А.М. Бельский, А.П. Хапалюк // *Оптика и спектроскопия.* – 1978. – Т. 44, № 3. – С. 540-544.

13. **Belsky, A.M.** Internal conical refraction of light beams in biaxial gyrotropic crystals / A.M. Belsky, M.A. Stepanov // *Opt. Commun.* – 2002. – Vol. 204. – P. 1-6.

14. **Berry, M.V.** Conical diffraction: observations and theory / M.V. Berry, M.R. Jeffrey, J.G. Lunney // *Proc. R. Soc. A.* – 2006. – Vol. 462. – P. 1629-1642.

15. **Kotlyar, V.V.** An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images / V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, S.N. Khonina // *Journal of Modern Optics.* – 1997. – Vol. 44(7). – P. 1409-1416.

16. **Котляр, В.В.** Вращение световых много-модовых пучков Гаусса-Лагерра в свободном пространстве / В.В. Котляр, В.А. Сойфер, С.Н. Хонина // *Письма в ЖТФ.* – 1997. – Vol. 23(17). – P. 1-6.

17. **Brasselet, E.** Dynamics of optical spin-orbit coupling in uniaxial crystals / E. Brasselet, Y. Izdebskaya, V. Shvedov, A.S. Desyatnikov, W. Krolikowski and Yu.S. Kivshar // *Opt. Lett.* – 2009. – Vol. 34. – P. 1021-1023.

18. **Досколович, Л.Л.** Интегральные представления решений системы уравнений Максвелла для анизотропных сред / Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов // *Компьютерная оптика.* – 2010. – Т. 34, № 1. – С. 52-57.

19. **Хонина, С.Н.** Аналог интеграла Рэлея-Зоммерфельда для анизотропной и гиротропной среды / С.Н. Хонина, С.И. Харитонов // *Компьютерная оптика.* – 2012. – Т. 36, № 2. – С. 172-182.

20. **Хонина, С.Н.** Периодическое изменение интенсивности модовых лазерных пучков при распространении в анизотропных одноосных кристаллах / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский, С.И. Харитонов // *Известия Самарского научного центра РАН.* – 2012. – Т. 14(4). – С. 18-27.

21. **Хонина, С.Н.** Расчёт линз для формирования параксиального продольного распределения в соответствии с их пространственным спектром / С.Н. Хонина, А.В. Устинов // *Компьютерная оптика.* – 2013. – Т. 37, № 2. – С. 193-202.



## References

1. **Yariv, A.** Optical Waves in Crystals / A. Yariv, P. Yeh. – New York: John Wiley and Sons, 1984, 2003. – 589 p.
2. **Fedorov, F.I.** Optics of Anisotropic Media / F.I. Fedorov. – Minsk: Acad. Nauk BSSR Publisher, 1958. – 381 p. – (In Russian).
3. **Ciattoni, A.** Circularly polarized beams and vortex generation in uniaxial media / A. Ciattoni, G. Cincotti, C. Palma // J. Opt. Soc. Am. A. – 2003. – Vol. 20(1). – P. 163-171.
4. **Marrucci, L.** Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media / L. Marrucci, C. Manzo and D. Paparo // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 96. – P. 163905-163908.
5. **Fadeyeva, T.A.** Spatially engineered polarization states and optical vortices in uniaxial crystals / T.A. Fadeyeva, V.G. Shvedov, Y.V. Izdebskaya, A.V. Volyar, E. Brasselet, D.N. Neshev, A.S. Desyatnikov, W. Krolikowski and Y.S. Kivshar // Opt. Expr. – 2010. – Vol. 18(10). – P. 10848-10863.
6. **Picon, A.** Spin and orbital angular momentum propagation in anisotropic media: theory / A. Picon, J. Benseny, Mompart and G.F. Calvo // J. Opt. – 2011. – Vol. 13. – P. 064019-064025.
7. **Stepanov, M.A.** Transformation of Bessel beams under internal conical refraction / M.A. Stepanov // Optics Communications. – 2002. – Vol. 212. – P. 11-16.
8. **Zusin, D.H.** Bessel beam transformation by anisotropic crystals / D.H. Zusin, R. Maksimenka, V.V. Filippov, R.V. Chulikov, M. Perdrix, O. Gobert and A.S. Grabtchikov // J. Opt. Soc. Am. A – 2010. – Vol. 27, N 8. – P. 1828-1833.
9. **Khilo, N.A.** Conical diffraction and transformation of Bessel beams in biaxial crystals / N.A. Khilo // Optics Communications. – 2013. – Vol. 286. – P. 1-5.
10. **Loussert, C.** Efficient scalar and vectorial singular beam shaping using homogeneous anisotropic media / C. Loussert and E. Brasselet // Opt. Lett. – 2010. – Vol. 35. – P. 7-9.
11. **Fadeyeva, T.A.** Extreme spin-orbit coupling in crystal-traveling paraxial beams / T.A. Fadeyeva and A.V. Volyar // J. Opt. Soc. Am. A. – 2010. – Vol. 27, N 3. – P. 381-389.
12. **Belskii, A.M.** Internal conical refraction of bounded light beams in biaxial crystals / A.M. Belskii, A.P. Khapalyuk // Opt. Spectrosc. – 1978. – Vol. 44. – P. 540-544. – (In Russian).
13. **Belsky, A.M.** Internal conical refraction of light beams in biaxial gyrotropic crystals / A.M. Belsky, M.A. Stepanov // Opt. Commun. – 2002. – Vol. 204. – P. 1-6.
14. **Berry, M.V.** Conical diffraction: observations and theory / M.V. Berry, M.R. Jeffrey, J.G. Lunney // Proc. R. Soc. A. – 2006. – Vol. 462. – P. 1629-1642.
15. **Kotlyar, V.V.** An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images / V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, S.N. Khonina // Journal of Modern Optics. – 1997. – Vol. 44(7). – P. 1409-1416.
16. **Kotlyar, V.V.** Rotation of Gauss-Laguerre multimodal light beams in free space // V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, S.N. Khonina // Techn. Phys. Lett. – 1997. – Vol. 23(9). – P. 657-658.
17. **Brasselet, E.** Dynamics of optical spin-orbit coupling in uniaxial crystals / E. Brasselet, Y. Izdebskaya, V. Shvedov, A.S. Desyatnikov, W. Krolikowski and Yu.S. Kivshar // Opt. Lett. – 2009. – Vol. 34. – P. 1021-1023.
18. **Doskolovich, L.L.** Integral representations for solutions of Maxwell's equations for anisotropic media / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov // Computer Optics. – 2010. – Vol. 34, N 1. – P. 52-57. – (In Russian).
19. **Khonina, S.N.** Analogue of Rayleigh-Sommerfeld integral for anisotropic and gyrotropic media / S.N. Khonina, S.I. Kharitonov // Computer Optics. – 2012. – Vol. 36, N 2. – P. 172-182. – (In Russian).
20. **Khonina, S.N.** Periodic intensity change for laser mode beams propagation in anisotropic uniaxial crystals / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy, S.I. Kharitonov // Izv. SNC RAS. – 2012. – Vol. 14(4). – P. 18-27. – (In Russian).
21. **Khonina, S.N.** Design lenses forming paraxial longitudinal distribution according to their spatial spectra / S.N. Khonina, A.V. Ustinov // Computer Optics.. – 2013. – Vol. 37, No. 2. – P. 193-202. – (In Russian).

## FEATURES OF NONPARAXIAL PROPAGATION OF GAUSSIAN AND BESSEL BEAMS ALONG THE AXIS OF THE CRYSTAL

S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy, S.I. Kharitonov

*Image Processing Systems Institute of Russian Academy of Sciences*

### Abstract

It is analytically and numerically shown that nonparaxial mode laser beams propagating along the axis of a crystal demonstrate the periodic change of intensity connected with an interference of ordinary and extraordinary beams.

For Bessel beams the oscillation period inversely proportional to a square of spatial frequency of a laser beam and a difference of dielectric permittivity. For the linearly-polarized radiation there is a periodic redistribution of energy between two transversal components, and for beams with circular polarization energy is pumped from an initial beam into the vortex beam of the second order and vice-versa. The received dependence allows to select parameters of an incident beam with length of a crystal for full transformation to the vortex beam.

For Gaussian beams similar periodic changes have nonlinear character. Laguerre-Gaussian laser modes with high radial order show a behavior close to Bessel beams on small distances. With increase of a distance the length of a period is increasing and the beam is astigmatically deforming.

**Key words:** uniaxial crystal, mode laser beams of the high order, periodic change of intensity, transformation into a vortex beams.

*Сведения об авторах*

**Хонина Светлана Николаевна**, доктор физико-математических наук, профессор Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (Национального исследовательского университета); ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений.

E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru).

**Svetlana Nikolaevna Khonina**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of the Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov (National Research University). Leading researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing.



**Волотовский Сергей Геннадьевич**, 1959 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в Учреждении Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: разработка программного обеспечения расчёта и моделирования работы элементов дифракционной оптики.

E-mail: [sy@smr.ru](mailto:sy@smr.ru).

**Sergey Gennadjevich Volotovskiy** (b. 1959) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty "Applied mathematics", works as the leading programmer in the Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests: software design, modeling of systems with diffractive optical elements.



**Харитонов Сергей Иванович**, доктор физико-математических наук, доцент кафедры технической кибернетики, старший научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Учреждения Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН. 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета. 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы дифракционного расчёта фокусаторов лазерного излучения». 2010 г. – защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы расчёта дифракции когерентного электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах». Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, физика плазмы. В списке научных работ С.И. Харитонова 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов.

E-mail: [prognoz2007@gmail.com](mailto:prognoz2007@gmail.com).

**Sergey Ivanovich Kharitonov**, Senior Researcher of Laboratory of Diffractive Optics of Image Processing Systems Institute of RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 – graduated from the Physics Department of the Samara State University. 1993 – defended his dissertation "Asymptotic methods of calculation of the diffraction of laser radiation Focuser". 2010 – defended his doctoral thesis on "Asymptotic methods for calculating the diffraction of coherent electromagnetic radiation in diffractive optical elements". Research interests: diffraction, quantum optics, plasma physics. The list of scientific papers S.I. Kharitonov's 87 articles, 5 patents.

*Поступила в редакцию 8 июня 2013 г.*