

РАСЧЁТ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИЗОБРАЖАЮЩЕЙ ДВУХЛИНЗОВОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Кириленко М.С., Хонина С.Н.

Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет) (СГАУ)

Аннотация

Рассмотрены собственные функции оптического оператора, описывающего ограниченную изображающую систему из двух линз с учётом радиальной симметрии. Полученные функции являются аналогом обобщённых сфероидальных функций, собственных к преобразованию Ханкеля нулевого порядка. С помощью операторного представления оптической системы произведён вывод соотношения для расчёта собственных функций.

Проведён анализ влияния ширины спектра на число значащих собственных значений. Выполнено разложение кругового, кольцевого и Гауссова пучков по найденным функциям, а также рассчитано отклонение исходных сигналов от полученного разложения.

Ключевые слова: оптический оператор, собственные функции, радиальная симметрия, преобразование Ханкеля, спектр, двумерная свёртка, оптический сигнал.

Введение

В последнее время понятие коммуникационных мод [1, 2] широко изучается и применяется в оптике [3–6]. Вытянутые угловые сфероидальные функции, которые образуют коммуникационные моды для квадратных апертур и преобразования Френеля, также хорошо известны и были изучены аналитически в 1960-х годах [7–9].

Сфероидальные функции представляют собой полный набор функций с ограниченной спектральной полосой, которые ортогональны как на данном конечном интервале, так и на бесконечном интервале [7]. Суперпозиция данных функций, аппроксимирующая некоторое световое распределение, будет обладать инвариантным характером при прохождении через оптические линзовые системы с ограниченной квадратной апертурой [3].

Обобщённые сфероидальные функции [10], тесно связанные с полиномами Цернике, инвариантны к ограниченному преобразованию Ханкеля, они устойчивы к дифракционным эффектам, возникающим из-за ограниченности (круглых) апертур.

В данной работе рассматриваются радиально-симметричные функции, которые при распространении не изменяют свой вид в условиях ограниченных круглой апертуры и спектра самих функций. Подобные исследования проводились для ограниченных квадратных апертур и сфероидальных функций [2]. В работах [11–12] мы продемонстрировали возможность аппроксимации как одномерных, так и двумерных ограниченных сигналов сфероидальными функциями без искажений. В работе [13] рассматриваются сфероидальные моды и обобщённые сфероидальные функции, однако вместо последних при расчёте используются полиномы Цернике.

Заметим, что полиномы Цернике имеют явный аналитический вид и часто используются в задачах адаптивной оптики [14, 15] для расчёта и компенсации искажений волнового фронта. В отличие от базиса Цернике сфероидальные функции не имеют анали-

тического представления и вычисляются как собственные функции оператора, связанного с некоторой оптической системой. Разложение по собственным функциям системы позволяет оценить искажение передаваемого сигнала в целом, т. е. оценить качество передачи информации системой.

Нахождение набора собственных функций системы позволяет получить вид сигнала после прохождения через данную систему с помощью аппроксимации по функциям из этого набора.

Теоретические сведения

Предположим, что передняя фокальная плоскость сферической линзы освещается пучком света с распределением $f(x, y)$ (оптический сигнал), тогда на задней фокальной плоскости световое распределение будет иметь вид:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-2\pi i(xu + yv)] dx dy. \quad (1)$$

Формула (1) представляет собой двумерное преобразование Фурье от исходного оптического сигнала.

Рассмотрим радиально-симметричную функцию:

$$f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r). \quad (2)$$

Тогда двумерное преобразование Фурье (1) для такой функции будет представлять собой преобразование Ханкеля нулевого порядка [10]:

$$F(\rho) = H[f](\rho) = 2\pi \int_0^{+\infty} f(r) J_0(2\pi r \rho) r dr, \quad (3)$$

где J_m – функция Бесселя порядка m .

Рассмотрим оптическую установку, изображённую на рис. 1. На круглую апертуру радиуса R падает световой пучок, описываемый радиально-симметричной функцией. Апертура расположена в передней фокальной плоскости линзы. В задней фокальной плоскости линзы располагается ещё одна апертура радиуса P , которая урезает спектр исходной функции. На фокусном расстоянии от вто-

рой апертуры расположена аналогичная линза. На расстоянии четырёх фокусов от первой апертуры расположен экран, на котором наблюдается полученное распределение.

Поскольку входная апертура ограничивает распределение падающего светового пучка, для него следует вместо преобразования Ханкеля, интегрирующего по бесконечным пределам, взять ограниченное преобразование Ханкеля, которое зависит от радиуса:

$$h_R[f](\rho) = 2\pi \int_0^R f(r) J_0(2\pi r \rho) r dr. \quad (4)$$

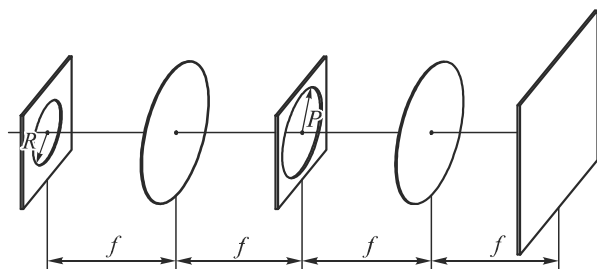


Рис. 1. Схема оптической установки

Ограниченное преобразование Ханкеля с границей R может быть представлено как обыкновенное преобразование Ханкеля от функции, заданной равной нулю за пределами R:

$$h_R[f](\rho) = H \left[f(r) \text{circ} \frac{r}{R} \right](\rho), \quad (5)$$

где $\text{circ}(r/R)$ – круговая функция (аналог прямоугольной функции в полярных координатах):

$$\text{circ} \frac{r}{R} = \begin{cases} 1, & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (6)$$

Введём в рассмотрение понятие двумерной свёртки функций:

$$\begin{aligned} (f ** g)(x, y) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) g(x-u, y-v) du dv = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u, y-v) g(u, v) du dv. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае радиально-симметричной функции двумерная свёртка записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (f ** g)(r) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{u^2 + v^2}) g(\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}) du dv = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}) g(\sqrt{u^2 + v^2}) du dv. \end{aligned} \quad (8)$$

Преобразование Ханкеля нулевого порядка обладает свойством, связанным с двумерной свёрткой:

$$H[f ** g] = H[f]H[g], \quad (9)$$

$$H[fg] = H[f] ** H[g]. \quad (10)$$

Используя данное свойство для формулы (5), получаем:

$$H[f(r) \text{circ} \frac{r}{R}](\rho) = H[f](\rho) ** \frac{R}{\rho} J_1(2\pi R \rho). \quad (11)$$

Учитываем, что $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$, и получаем результат ограниченного преобразования Ханкеля:

$$\begin{aligned} H[f(r)](\rho) ** \frac{R}{\rho} J_1(2\pi r \rho) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R J_1 \left(2\pi R \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2} \right)}{\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}} \times \\ &\times H[f] \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Именно такое световое распределение придёт на вторую апертуру нашей оптической системы. Вторая апертура урезает полученный спектр, т. е. задаёт его равным нулю за пределами радиуса P. Запишем второе ограниченное преобразование Ханкеля:

$$\begin{aligned} h_P \left[H[f](\rho) ** \frac{R}{\rho} J_1(2\pi R \rho) \right] &= \\ &= H \left[\left\{ H[f](\rho) ** \frac{R}{\rho} J_1(2\pi R \rho) \right\} \text{circ} \frac{\rho}{P} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя свойство двумерной свёртки, получаем:

$$\begin{aligned} H \left[\left\{ H[f](\rho) ** \frac{R}{\rho} J_1(2\pi R \rho) \right\} \text{circ} \frac{\rho}{P} \right](r) &= \\ &= f(r) \text{circ} \frac{r}{R} ** \frac{r}{P} J_1(2\pi r P). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, мы получили на выходе ту же функцию, что и была на входе оптической системы, с точностью до двумерной свёртки с функцией Бесселя. Более подробно:

$$\begin{aligned} h_P h_R[f](r) &= \\ &= \iint_{u^2 + v^2 \leq R^2} \frac{P J_1 \left(2\pi P \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \right)}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}} \times \\ &\times f \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) du dv. \end{aligned} \quad (15)$$

Формула (15) главным образом отличается от формулы (12) тем, что интегрирование осуществляется по ограниченной области. Похожие соотношения можно встретить в работах [2, 16].

Перейдём в полярные координаты:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, & u &= \rho \cos \varphi, \\ y &= r \sin \phi, & v &= \rho \sin \varphi, \end{aligned} \quad du dv = \rho d\rho d\varphi. \quad (16)$$

Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} (x-u)^2 + (y-v)^2 &= \\ &= (r \cos \phi - \rho \cos \varphi)^2 + (r \sin \phi - \rho \sin \varphi)^2 = \\ &= \rho^2 - 2\rho r \cos(\phi - \varphi) + r^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Выпишем отдельно следующий интеграл:

$$L_p(r, \rho, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{J_1(2\pi P \sqrt{\rho^2 - 2\rho r \cos(\phi - \phi) + r^2})}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho r \cos(\phi - \phi) + r^2}} d\phi \quad (18)$$

Очевидно, переменная ϕ пробегает по всему периоду косинуса, поэтому сдвиг на ϕ можно опустить:

$$L_p(r, \rho, \phi) = L_p(r, \rho) = \int_0^{2\pi} \frac{J_1(2\pi P \sqrt{\rho^2 - 2\rho r \cos \phi + r^2})}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho r \cos \phi + r^2}} d\phi = L_p(\rho, r) \quad (19)$$

Таким образом, мы получаем упрощённую запись оператора $h_p h_R$:

$$h_p h_R[f](r) = P \int_0^R L_p(r, \rho) f(\rho) \rho d\rho \quad (20)$$

Множества функций на входной апертуре, на спектральной апертуре и на выходе оптической системы образуют соответствующие гильбертовы пространства. Операторы $h_R, h_p, h_p h_R$ являются линейными операторами. Ограничим рассматриваемую область экрана радиусом R (таким образом, гильбертовы пространства на входе и выходе системы будут совпадать) и рассмотрим собственные функции оператора $h_p h_R$ (l – номер собственной функции):

$$h_p h_R[f_l] = \lambda_l f_l \quad (21)$$

Скалярное произведение двух радиально-симметричных функций зададим следующим образом:

$$(f, g)_R = \int_0^R f(r) g^*(r) r dr \quad (22)$$

где R означает, что данное скалярное произведение относится к пространству функций на входе или выходе системы, P – на второй апертуре. Звёздочкой обозначено комплексное сопряжение. Оператор A^* называется сопряжённым к A , если:

$$(Af, g) = (f, A^*g) \quad (23)$$

Подставляя вместо оператора A оператор $h_p h_R$, получаем:

$$\begin{aligned} (h_p h_R[f], g)_R &= \int_0^R h_p h_R[f](r) g^*(r) r dr = \\ &= \int_0^R \left[P \int_0^R L_p(r, \rho) f(\rho) \rho d\rho \right] g^*(r) r dr = \\ &= P \int_0^R \int_0^R L_p(r, \rho) f(\rho) g^*(r) r \rho d\rho dr = \\ &= \int_0^R f(\rho) \left[P \int_0^R L_p(\rho, r) g^*(r) r dr \right] \rho d\rho = \\ &= \int_0^R f(\rho) \{h_p h_R[g]\}^*(\rho) \rho d\rho = (f, h_p h_R[g])_R \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, оператор $h_p h_R$ является самосопряжённым. Его собственные значения действительны, а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны [17].

Функцию распределения светового поля $g(r)$ на входе оптической системы можно аппроксимировать собственными функциями:

$$g(r) \approx \sum_{n=1}^N C_n \psi_n(r) \quad (25)$$

где $\psi_n(r)$ – собственные функции, упорядоченные по убыванию собственных значений, C_n – соответствующие коэффициенты разложения, N – заданное число собственных функций. Коэффициенты C_n вычисляются как:

$$C_n = \frac{(g, \psi_n)_R}{(\psi_n, \psi_n)_R} = \frac{\int_0^R g(r) \psi_n^*(r) r dr}{\int_0^R |\psi_n(r)|^2 r dr} \quad (26)$$

Чем больше будет N , тем точнее получится аппроксимация.

Численный расчёт

Решение задачи на нахождение собственных значений и собственных функций оператора $h_p h_R$ будем искать численно, решая аналогичную задачу линейной алгебры для дискретного аналога заданного оператора. Радиус первой апертуры R в расчётах всегда принимаем равным единице. Радиус второй апертуры (спектра) P будем варьировать, от него зависит число степеней свободы нашей системы.

На рис. 2 изображены графики собственных значений при различных параметрах спектра. Можно увидеть, что количество значащих собственных чисел увеличивается с увеличением спектра системы. Начиная с некоторого номера, все собственные значения приближённо равны нулю. Из рисунка может показаться, что это не так, в частности, при $P = 5$ начиная с 12-го собственного значения соответствующий график прекращает убывать и остаётся на отметке 0,1. Однако увеличение числа отсчётов дискретизации устраняет данную ошибку вычислений. Похожее «ступенчатое» поведение имеют собственные значения сферидальных функций, являющихся собственными к ограниченному преобразованию Фурье [8].

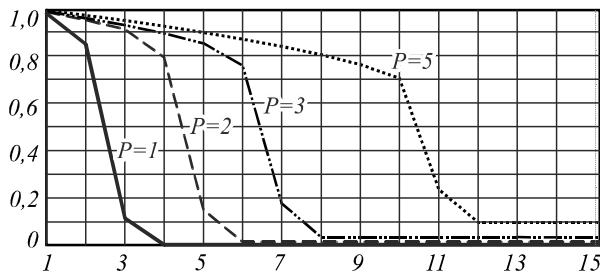


Рис. 2. Графики собственных значений при различных значениях спектра

На рис. 3 показаны примеры собственных функций системы при значении спектра $P = 3$.

Из рис. 2 видно, что ширина спектра P определяет число значащих собственных значений оператора распространения. Проведём аппроксимацию светового поля, используя формулу (26). На рис. 4 представлено приближение собственными функциями круговой функции. Она принимает значение 1 при $r \leq 0,5$, а за пределами данного множества – значение 0. Ширину спектра P принимает равным трём. Аппроксимация осуществляется тремя, пятью и семью функциями. Дальнейшее увеличение числа N не приносит значительных изменений, поскольку значащих собственных значений семь. График на рис. 2 для $P = 3$ показывает, что все собственные значения очень близки к нулю, начиная с восьмого. Среднеквадратическое отклонение при $N = 7$ составляет 19 % (рис. 4).

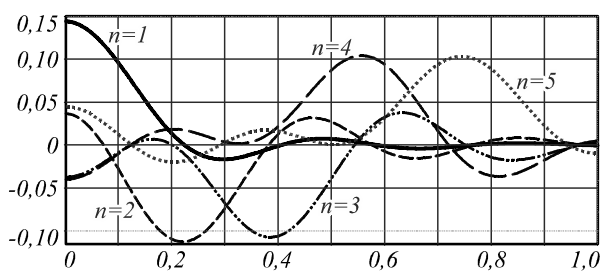


Рис. 3. Пять примеров радиального сечения собственных функций для фиксированного значения спектра

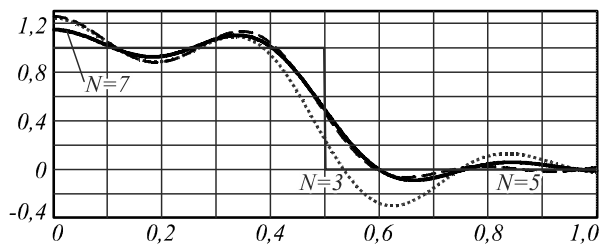


Рис. 4. Аппроксимация круга собственными функциями (радиальное сечение)

Двумерные представления круговой функции и её аппроксимации семью собственными функциями изображены на рис. 5а, б.

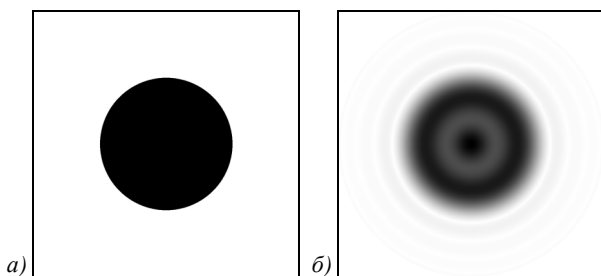


Рис. 5. Круговая функция (а) и её аппроксимация (б)

Другой пример входного поля – кольцевая функция. Она принимает значение 1 внутри отрезка $0,25 \leq r \leq 0,5$ и значение 0 – за его пределами. Полученные графики можно увидеть на рис. 6. Соответствующее двумерное представление показано на рис. 7а, б. Среднеквадратическое отклонение составляет 31 %.

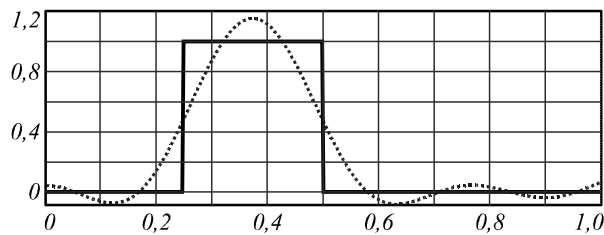


Рис. 6. Аппроксимация кольца собственными функциями (радиальное сечение)

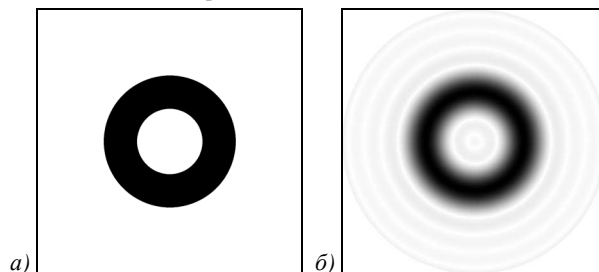


Рис. 7. Кольцевая функция (а) и её аппроксимация (б)

Рассмотрим в качестве примера непрерывную функцию:

$$g(r) = \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (27)$$

где $\sigma = 0,12$. Её аппроксимация семью собственными функциями показана на рис. 8. Двумерное представление изображено на рис. 9а, б. Среднеквадратическое отклонение не превышает 5 %.

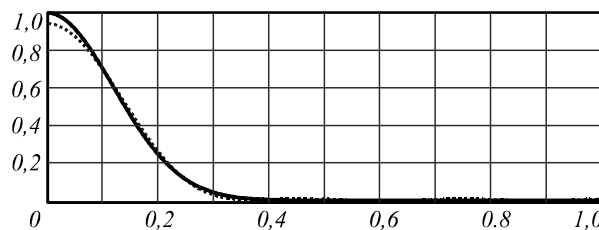


Рис. 8. Аппроксимация экспоненциальной функции собственными функциями

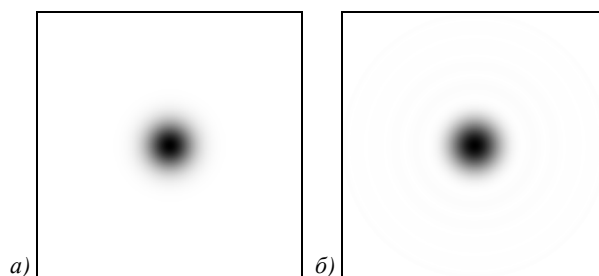


Рис. 9. Экспоненциальная функция (а) и её аппроксимация (б)

Заключение

Мы рассмотрели оптическую установку, состоящую из двух линз и двух ограниченных круговых апертур (рис. 1), и нашли собственные функции системы (рис. 3), согласованной с этой установкой. С помощью численных расчётов мы установили, что ширина спектра (радиус второй апертуры установки) прямо пропорциональна числу степеней свободы системы. Для аппроксимации светового поля можно ис-

пользовать собственные функции, соответствующие собственным значениям которых не равны (приближённо) нулю (рис. 2). Чем шире спектр, тем таких функций больше и, следовательно, погрешность аппроксимации меньше.

В качестве примера мы рассмотрели три радиально-симметричные функции: круговую (рис. 4, 5а, б), кольцевую (рис. 6, 7а, б) и экспоненциальную (рис. 8, 9а, б). Радиусы апертур при этом были зафиксированы. В отличие от кольцевого и кругового сигналов, содержащих высокочастотные составляющие, наилучшего приближения собственными функциями удалось достичь для случая экспоненциального пучка, который не содержит составляющих с высокими частотами: среднеквадратическое отклонение составило всего 5 %. При этом для обеспечения такой низкой ошибки аппроксимации требуется небольшое число собственных функций.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ и гранта РФФИ 13-07-00266.

Литература

1. **Miller, D.A.B.** Communicating with waves between volumes: evaluating orthogonal spatial channels and limits on coupling strength / D.A.B. Miller // *Applied Optics*. – 2000. – V. 39(11). – P. 1681-1699.
2. **Martinsson, P.** Communication modes in scalar diffraction / P. Martinsson, P. Ma, A. Burvall, A.T. Friberg // *Optik*. – 2008. – V. 199(3). – P. 103-111.
3. **Khonina, S.N.** Effect of diffraction on images matched with prolate spheroidal wave functions / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar // *Pattern Recognition and Image Analysis. (Advances in Mathematical Theory and Applications)*. – 2001. – V. 11(3). – P. 521-528.
4. **Хонина, С.Н.** Метод вычисления собственных значений вытянутых сфероидальных функций нулевого порядка / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский, В.А. Соифер // *Доклады Академии наук*. – 2001. – Т. 376, № 1. – С. 30-32.
5. **Volotovskii, S.G.** Analysis and development of the methods for calculating eigenvalues of prolate spheroidal functions of zero order / S.G. Volotovskii, N.L. Kazanskii, S.N. Khonina // *Pattern Recognition and Image Analysis (Advances in Mathematical Theory and Applications)*. – 2001. – V. 11(2). – P. 473-475.
6. **Хонина, С.Н.** Приближение сфероидальных волновых функций конечными рядами / С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика*. – 1999. – Т. 19. – С. 65-70.
7. **Frieden, B.R.** Evaluation, design and extrapolation methods for optical signals / B.R. Frieden // *Progress in Optics*. – 1971. – V. IX. – P. 311-407.
8. **Slepian, D.** Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I / D. Slepian, H.O. Pollak // *Bell System Technical Journal*. – 1961. – V. 40(1). – P. 43-63.
9. **Landau, H.J.** Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – II / H.J. Landau, H.O. Pollak // *Bell System Technical Journal*. – 1961. – V. 40(1). – P. 65-84.
10. **Комаров, И.В.** Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции / И.В. Комаров, Л.И. Пономарев, С.Ю. Славянов; под ред. В.С. Булдырева. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
11. **Кириленко, М.С.** Формирование оптического сигнала, согласованного со сфероидальными функциями, для передачи в линзовой системе без искажений / М.С. Кириленко, С.Н. Хонина // *Известия Самарского научного центра РАН*. – 2013. – Т. 15, № 6. – С. 31-34.
12. **Kirilenko, M.S.** Coding of an optical signal by a superposition of spheroidal functions for undistorted transmission of information in the lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // *Proceedings of SPIE*. – 2014. – V. 9156. – P. 91560J (8 pp.).
13. **Pich'e, K.** Experimental realization of optical eigenmode super-resolution / K. Pich'e, J. Leach, A.S. Johnson, J.Z. Salvail, M.I. Kolobov, R.W. Boyd // *Optics Express*. – 2012. – V. 20(24). – P. 26424-26433.
14. **Воронцов, М.А.** Принципы адаптивной оптики / М.А. Воронцов, В.И. Шмальгаузен. – М.: Наука, 1985.
15. **Tyson, R.K.** Principles of Adaptive Optics / R.K. Tyson. – CRC Press, Taylor and Francis Group, 2011.
16. **Itoh, Y.** Evaluation of Aberrations Using the Generalized Prolate Spheroidal Wavefunctions / Y. Itoh // *Journal of the Optical Society of America*. – 1970. – V. 60(1). – P. 10-14.
17. **Вулих, Б.З.** Введение в функциональный анализ / Б.З. Вулих. – Изд. 2-е, переработ. и дополн. – М.: Наука, 1976. – 416 с.

References

1. **Miller, D.A.B.** Communicating with waves between volumes: evaluating orthogonal spatial channels and limits on coupling strength / D.A.B. Miller // *Applied Optics*. – 2000. – V. 39(11). – P. 1681-1699.
2. **Martinsson, P.** Communication modes in scalar diffraction / P. Martinsson, P. Ma, A. Burvall, A.T. Friberg // *Optik*. – 2008. – V. 199(3). – P. 103-111.
3. **Khonina, S.N.** Effect of diffraction on images matched with prolate spheroidal wave functions / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar // *Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications*. – 2001. – V. 11(3). – P. 521-528.
4. **Khonina, S.N.** A method of eigenvalue calculation of zero-order prolate spheroidal functions / S.N. Khonina, S.G. Volotovskii, V.A. Soifer // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences*. – 2001. – V. 376(1). – P. 30-32. – (In Russian).
5. **Volotovskii, S.G.** Analysis and development of the methods for calculating eigenvalues of prolate spheroidal functions of zero order / S.G. Volotovskii, N.L. Kazanskii, S.N. Khonina // *Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications*. – 2001. – V. 11(2). – P. 473-475.
6. **Khonina, S.N.** A finite series approximation of spheroidal wave functions / S.N. Khonina // *Computer Optics*. – 1999. – V. 19. – P. 65-70. – (In Russian).
7. **Frieden, B.R.** Evaluation, design and extrapolation methods for optical signals / B.R. Frieden // *Progress in Optics*. – 1971. – V. IX. – P. 311-407.
8. **Slepian, D.** Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I / D. Slepian, H.O. Pollak // *Bell System Technical Journal*. – 1961. – V. 40(1). – P. 43-63.
9. **Landau, H.J.** Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – II / H.J. Landau, H.O. Pollak // *Bell System Technical Journal*. – 1961. – V. 40(1). – P. 65-84.
10. **Komarov, I.V.** Spheroidal and Coulomb spheroidal functions / I.V. Komarov, L.I. Ponomarev, S.Yu. Slavyznov; Ed. by V.S. Buldyrev. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1976. – 320 p. – (In Russian).
11. **Kirilenko, M.S.** Forming of an optical signal matched with spheroidal functions for undistorted transmission in the lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // *The News of Samara Science Center of RAS*. – 2013. – V. 15(6). – P. 31-34. – (In Russian).

12. **Kirilenko, M.S.** Coding of an optical signal by a superposition of spheroidal functions for undistorted transmission of information in the lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // Proceedings of SPIE. – 2014. – V. 9156. – P. 91560J (8 pp.).
13. **Pich'e, K.** Experimental realization of optical eigenmode super-resolution / K. Pich'e, J. Leach, A.S. Johnson, J.Z. Salvail, M.I. Kolobov, R.W. Boyd // Optics Express. – 2012. – V. 20(24). – P. 26424-26433.
14. **Voroncov, M.A.** Principles of adaptive Optics / M.A. Voroncov, V.I. Shmalgauzen. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1985. – (In Russian).
15. **Tyson, R.K.** Principles of Adaptive Optics / R.K. Tyson. – CRC Press, Taylor and Francis Group, 2011.
16. **Itoh, Y.** Evaluation of Aberrations Using the Generalized Prolate Spheroidal Wavefunctions / Y. Itoh // Journal of the Optical Society of America. – 1970. – V. 60(1). – P. 10-14.
17. **Vulikh, B.Z.** Introduction to Functional Analysis / B.Z. Vulikh. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1976. – 416 p. – (In Russian).

CALCULATION OF EIGENFUNCTIONS FOR IMAGING TWO-LENS SYSTEM WITH AXIAL SYMMETRY

M.S. Kirilenko, S.N. Khonina

*Image Processing Systems Institute, Russian Academy of Sciences,
Samara State Aerospace University*

Abstract

Eigenfunctions of the optical operator describing limited imaging system with two lenses are considered under axial symmetry. Resulting functions are analogous to the generalized spheroidal functions which are eigenfunctions of the zero-order Hankel transformation. The expression for eigenfunctions' calculation is obtained using operator representation of the optical system.

The influence of the spectrum width on the number of significant eigenvalues is investigated. Decomposition of circular, annular, and Gaussian beam by eigenfunctions is calculated and deviation from the original signals is estimated.

Key words: optical operator, eigenfunctions, axial symmetry, Hankel transform, spectrum, two-dimensional convolution, optical signal.

Сведения об авторах



Кириленко Михаил Сергеевич, 1990 года рождения, в 2013 году окончил магистратуру Самарского государственного аэрокосмического университета (национальный исследовательский университет) по специальности «Прикладная математика и информатика». В настоящее время является аспирантом первого года обучения кафедры технической кибернетики данного университета по специальности «Оптика». Работает лаборантом в Институте систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, оптические операторы распространения, программирование.

E-mail: areatangent@gmail.com.

Mikhail Sergeevich Kirilenko, born in 1990, in 2013 he graduated from Samara State Aerospace University (National Research University), majoring in Applied Mathematics and Computer Science. He is currently a post-graduated student of first year of Technical Cybernetics department. He is working as a laboratory assistant at the Institute of Image Processing Systems, Russian Academy of Sciences. Research interests: diffractive optics, optical propagation operators, programming.

Сведения об авторе Хонина Светлана Николаевна – см. стр. 411 этого номера.

Поступила в редакцию 4 июня 2014 г.