

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ДРОБНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

М.С. Кириленко^{1,2}, Р.О. Зубцов², С.Н. Хонина^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Аннотация

В данной работе рассмотрено одномерное дробное преобразование Фурье в приложении к градиентным оптическим волноводам. Выполнен расчёт собственных функций преобразования с учётом ограниченности интервала как в пространственной, так и в спектральной областях.

Ключевые слова: дробное преобразование Фурье, ограниченный парааксиальный оператор, собственные функции, моды Эрмита–Гаусса, сфероидальные волновые функции.

Цитирование: Кириленко, М.С. Вычисление собственных функций ограниченного дробного преобразования Фурье / М.С. Кириленко, Р.О. Зубцов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 3. – С. 332–338.

Введение

Дробное преобразование Фурье (ДрПФ) – это семейство линейных преобразований, обобщающих преобразование Фурье. Обычная интерпретация преобразования Фурье – преобразование сигнала из временной области в его частотную область.

Каноническое ДрПФ рассмотрено [1] как Фурье–преобразование α -степени, где α – действительное число. Таким образом, происходит преобразование сигнала между временной и частотной областями. Можно рассматривать ДрПФ как операцию вращения частотно-временного распределения на некоторый угол [2].

Изначально ДрПФ рассматривалось в приложениях для квантовой механики. Однако в последнее время оно привлекло повышенное внимание исследователей в оптике, в результате чего были выполнены обширные исследования по его свойствам, оптической реализации и потенциальных приложениях в оптике. Таким образом, в настоящее время ДрПФ активно используется при анализе в оптической обработке информации [3]. Кроме того, что дробное преобразование является удобным инструментом при описании различных явлений в оптике и квантовой механике, дробление некоторого преобразования даёт новую степень свободы (порядок дробления), которая может быть использована для более полного описания объекта/сигнала или как дополнительный кодирующий параметр.

ДрПФ используется в решении дифференциальных уравнений, в квантовой механике и квантовой оптике, в оптической теории дифракции, в описании оптических систем и оптической обработке сигналов, включая применение частотных фильтров, временной фильтрации и мультиплексирования, а также при распознавании образов, в вейвлет-преобразованиях, при операциях над чирп-функциями, при кодировании, создании нейронных сетей и др. Подробный обзор приложений можно найти в работе Т. Алиевой с соавторами [3].

Среди методов оптической реализации ДрПФ можно назвать модульную линзовую систему, систему из нескольких сферических и/или цилиндрических

линз [4–8]. Некоторые из таких систем, особенно с цилиндрическими линзами, используются для астигматического преобразования с целью формирования вихревых пучков [5, 8–10].

Одним из приложений ДрПФ является описание распространения лазерного излучения в средах с градиентным показателем преломления [11, 12].

В данной работе используется одномерное ДрПФ для моделирования распространения оптических сигналов в оптическом волноводе с параболической зависимостью показателя преломления. В случае бесконечной среды аналитическое решение для собственных функций среды известно [1] и описывается модами Эрмита–Гаусса (ЭГ). При учёте поперечной ограниченности градиентного волновода необходимо численно решать задачу на собственные значения и функции. В данной работе выполняется расчёт собственных функций при различных параметрах волновода с квадратичным показателем преломления.

Дробное преобразование Фурье

Рассмотрим одномерный случай прохождения светового пучка через градиентную среду с ограниченной входной областью (рис. 1). Дифракционные эффекты, связанные с данными пространственными ограничениями, влияют на результат прохождения.

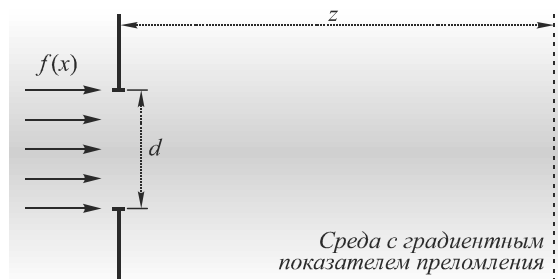


Рис. 1. Схема оптической системы

Парааксиальное распространение входного пучка через ABCD-систему может быть описано следующим образом [13]:

$$F(u) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i B}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left[\frac{ik}{2B}(Ax^2 - 2xu + Du^2)\right] dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ – поле на входе оптической системы, $F(u)$ – результат на выходе, $n(x) = n_0(1 - (x^2 / 2a^2))$ $k = 2\pi / \lambda$ – волновое число, A, B, C, D – параметры системы.

В случае градиентной среды коэффициенты определяются как [14, 15]:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(z/a) & a \sin(z/a) \\ -\sin(z/a)/a & \cos(z/a) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где z – дальность распространения, a – параметр, связанный с функцией изменения показателя преломления среды.

Тогда формула (1) может быть переписана как ДрПФ:

$$\Gamma_\alpha[f(x)] = F_\alpha(u) = \sqrt{\frac{k}{2\pi ia \sin \alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times \exp\left[\frac{ik}{2a \sin \alpha} (x^2 \cos \alpha - 2xu + u^2 \cos \alpha)\right] dx, \quad (3)$$

где $\alpha = z/a$.

Если принять во внимание, что на входе система является ограниченной, как показано на рис. 1, то тогда из соотношения (3) для неё получается ограниченное ДрПФ:

$$\Gamma_{\alpha,d}[f(x)] = F_{\alpha,d}(u) = \sqrt{\frac{k}{2\pi ia \sin \alpha}} \int_{-d/2}^{d/2} f(x) \times \exp\left[\frac{ik}{2a \sin \alpha} (x^2 \cos \alpha - 2xu + u^2 \cos \alpha)\right] dx, \quad (4)$$

где d – ширина ограниченной области.

Распространение световых пучков через заданную градиентную среду обладает свойством периодичности, которое справедливо как для неограниченного преобразования, так и для ограниченного. Период самовоспроизведения составляет $z_T = 2\pi a$. При этом на расстоянии $z_{T/4} = \pi a / 2$ ДрПФ вырождается в обычное преобразование Фурье, справедливое для линзовых систем. В плоскости $z_{T/2} = \pi a$ исходное изображение «переворачивается», а в плоскости $z_{3T/4} = 3\pi a / 2$ полученный результат эквивалентен применению обратного преобразования Фурье для исходной функции.

Обозначим оператор, соответствующий преобразованию (3), через Γ_α . Для ДрПФ характерны свойства коммутативности и аддитивности:

$$\forall \alpha, \beta: \Gamma_{\alpha+\beta} = \Gamma_\alpha \Gamma_\beta = \Gamma_\beta \Gamma_\alpha. \quad (5)$$

Отметим, что свойство коммутативности не работает в общем случае для произвольной парааксиальной ABCD-системы, отвечающей уравнению (1), и для ограниченного преобразования (4).

Поставим нашей целью отыскать такой класс функций, которые самовоспроизводятся на произвольном расстоянии, не обязательно кратном z_T . Иными словами, требуется найти набор функций $\{h_n\}$, инвариантных к прохождению через оператор Γ_α . В общем случае такая

задача является задачей нахождения собственных функций оператора распространения:

$$L[f_n] = \mu_n f_n, \quad (6)$$

где L – произвольный линейный оператор, μ_n – собственное значение, отвечающее собственной функции f_n .

Решения поставленной задачи для неограниченного оператора (3) хорошо известны – они представляют собой моды ЭГ [16]:

$$h_n(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}\right] H_n\left(\frac{x}{\sigma_0}\right). \quad (7)$$

Моды ЭГ проходят через оператор распространения Γ_α , не изменяя своего вида (с точностью до фазового набега), каким бы ни был параметр α .

Ограниченное дробное преобразование Фурье

Существенный интерес представляет задача нахождения распределений, которые самовоспроизводятся в условиях ограничения входной области, т.е. собственных к оператору распространения $\Gamma_{\alpha,d}$ (4).

Если на вход подать собственную функцию такого оператора, то на расстоянии $z = a\alpha$ данная функция будет самовоспроизводиться в промежутке $[-d/2, d/2]$. Желательно, чтобы полученные собственные функции не зависели от параметра α (пройденного расстояния), как и в случае с модами ЭГ. Это дало бы возможность использовать их для передачи информации без искажений в системах, ограниченных не только на входе, но и на всей области распространения. Схема такой оптической системы изображена на рис. 2.

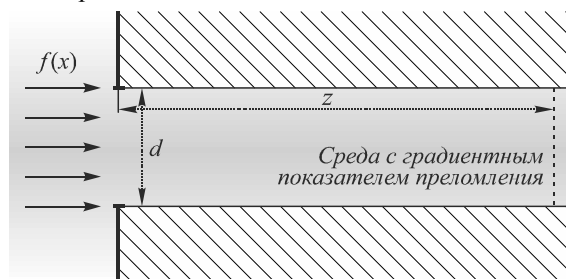


Рис. 2. Оптическая система с ограничением всей области распространения

Поставленное условие соответствует тому, что множества функций во входной и выходной плоскостях, определённых на заданном промежутке, совпадают. Таким образом, можно задать скалярное произведение, зависящее от d :

$$(f, g) = \int_{-d/2}^{d/2} f(x) g^*(x) dx. \quad (8)$$

Введённое скалярное произведение позволяет рассмотреть сопряжённый оператор $\Gamma_{\alpha,d}^*$:

$$(\Gamma_{\alpha,d}[f], g) = (f, \Gamma_{\alpha,d}^*[g]). \quad (9)$$

Используя теорию линейных операторов, можно определить вид сопряжённого оператора:

$$\Gamma_{\alpha,d}^* [f(u)] = \sqrt{\frac{ik}{2\pi a \sin \alpha}} \int_{-d/2}^{d/2} f(u) \times \exp\left[\frac{-ik}{2a \sin \alpha} (u^2 \cos \alpha - 2xu + x^2 \cos \alpha)\right] du. \quad (10)$$

Тогда будет существовать набор ортогональных функций $\{\varphi_n(x; \alpha, d)\}$, удовлетворяющих уравнению на собственные значения:

$$\Gamma_{\alpha,d}^* [\Gamma_{\alpha,d} [\varphi_n]] = |g_n|^2 \varphi_n, \quad (11)$$

а также аналогичный набор $\{\chi_n(u; \alpha, d)\}$ для уравнения:

$$\Gamma_{\alpha,d} [\Gamma_{\alpha,d}^* [\chi_n]] = |g_n|^2 \chi_n, \quad (12)$$

причём эти функции связаны между собой следующими соотношениями [17]:

$$\Gamma_{\alpha,d} [\varphi_n] = g_n \chi_n, \quad (13)$$

$$\Gamma_{\alpha,d}^* [\chi_n] = g_n^* \varphi_n. \quad (14)$$

Отметим, что в общем случае оба набора функций не являются собственными для исходного оператора.

Оператор $\Gamma_{\alpha,d} \Gamma_{\alpha,d}^*$ может быть записан как:

$$\Gamma_{\alpha,d}^* [\Gamma_{\alpha,d} [f(x)]] = \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left\{\frac{-ik}{2a} (u^2 - x^2) \operatorname{ctg} \alpha\right\} \times \frac{\sin\left(\frac{kd}{2a \sin \alpha} (u-x)\right)}{\pi(u-x)} f(x) dx. \quad (15)$$

В частности, если $\alpha = \pi/2$, мы получаем:

$$\Gamma_{\pi/2,d}^* [\Gamma_{\pi/2,d} [f(x)]] = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\sin(kd(u-x)/2a)}{\pi(u-x)} f(x) dx. \quad (16)$$

Соотношение (16) хорошо известно в теории сфероидальных волновых функций (СВФ), которые являются инвариантными относительно преобразования Фурье на ограниченном промежутке [18]. Таким образом, собственные функции $\varphi_n(x; \pi/2, d)$ рассматриваемого оператора являются СВФ $\psi_n(x; \pi/2, d)$.

Учитывая упомянутое выше свойство инвариантности сфероидальных функций, а также вид ДрПФ, нетрудно показать, чему равняются функции $\{\varphi_n(x; \alpha, d)\}$ и $\{\chi_n(u; \alpha, d)\}$:

$$\varphi_n(x; \alpha, d) = \psi_n(x; \alpha, d) \exp\{-ik x^2 \operatorname{ctg} \alpha / 2a\}, \quad (17)$$

$$\chi_n(u; \alpha, d) = \psi_n(u; \alpha, d) \exp\{ik u^2 \operatorname{ctg} \alpha / 2a\}, \quad (18)$$

где СВФ $\psi_n(x; \alpha, d)$ могут быть численно найдены из соотношения:

$$\int_{-d/2}^{d/2} \frac{\sin(kd(u-x)/2a \sin \alpha)}{\pi(u-x)} \psi_n(x; \alpha, d) dx = |g_n(\alpha, d)|^2 \psi_n(u; \alpha, d). \quad (19)$$

Особенности расчёта СВФ через приближение конечными рядами и матричным методом были рассмотрены в работах [19–22].

Отметим, что функции $\varphi_n(x; \alpha, d)$ обладают свойством самовоспроизведения на расстоянии $z = \alpha a$ с точностью до изменения фазы (амплитуда сохраняется).

Преобразование, основанное на инвариантности к сфероидальным волновым функциям

В работе [1] рассматривается вывод дробного преобразования Фурье через инвариантность к модам ЭГ. На основании этого можно попытаться вывести аналогичное ограниченное преобразование через СВФ.

Рассмотрим некоторое преобразование Φ_α , которое бы изменяло вид СВФ $\psi_n(x)$, добавляя фазовый набег:

$$\Phi_\alpha [\psi_n(x)] = \exp(i\alpha_n) \psi_n(x). \quad (20)$$

Для $\alpha_n = \pi n / 2$ данное преобразование вырождается в последовательное применение операций преобразования Фурье, если $n \leq N$, где N – число степеней свободы системы, определяемое размерами области определения и ширины спектра СВФ [23]. Если же брать СВФ с индексом больше, чем N , то соответствующие им собственные числа по модулю будут близки к нулю, что приведёт к нарушению равенства (20).

СВФ образуют ортогональный базис функций, заданных на ограниченном интервале $[-d/2, d/2]$. Это означает, что по данному базису можно раскладывать произвольные функции, заданные на этом же промежутке [24–26]. Будем рассматривать только такие функции, которые можно разложить по первым N СВФ:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N c_n \psi_n(x), \quad (21)$$

где c_n – коэффициенты разложения. Будем считать, что СВФ нормированы. Тогда коэффициенты можно найти следующим образом:

$$c_n = \int_{-d/2}^{d/2} f(u) \psi_n^*(u) du, \quad (22)$$

где звёздочкой обозначено комплексное сопряжение. Стоит отметить, что СВФ являются действительными, поэтому этот знак можно опустить.

Применим преобразование Φ_α к функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha [f(x)] &= \sum_{n=0}^N c_n \Phi_\alpha [\psi_n(x)] = \\ &= \sum_{n=0}^N c_n \exp(i\alpha_n) \psi_n(x). \end{aligned} \quad (23)$$

Подставим в (23) коэффициенты c_n из (22):

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha [f(x)] &= \\ &= \int_{-d/2}^{d/2} \left[\sum_{n=0}^N \exp(i\alpha_n) \psi_n(x) \psi_n^*(u) \right] f(u) du. \end{aligned} \quad (24)$$

Формула (24) осуществляет преобразование, относительно которого СВФ (с номерами меньше N) и их суперпозиции сохраняют свой вид во время распространения. Ядром преобразования в данном случае является внутренняя сумма:

$$K(x,u) = \sum_{n=0}^N \exp(i\alpha_n) \psi_n(x) \psi_n^*(u). \quad (25)$$

Можно увеличить число слагаемых в сумме до бесконечности, превратив её в ряд, можно также подставить в преобразование произвольную функцию, однако это не избавит от двух основных проблем.

Во-первых, ядро преобразования содержит сумму (либо ряд в случае $N \rightarrow \infty$), вычисление которой сложно осуществлять. Во-вторых, не ясно, какой оптической среде соответствует такой оператор. Тем не менее, наличие этой формулы даёт направление исследований для построения оптической системы, где бы энергия ни вышла за заданные границы области распространения.

Результаты моделирования

Численный расчёт выполнялся при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 1$ мкм, квадратичная функция изменения показателем преломления среды задана параметром $a = 25\lambda$, ширина волновода выбиралась различная. Соотношение $\alpha = z/a$ будет меняться в пределах от 0 до 2π . Далее картина периодически повторяется.

Сначала зададим ширину входной области $d = 24\lambda$ и рассчитаем собственные функции для параметра $\alpha = \pi/5$. График модулей первых собственных значений в этом случае принимает вид в соответствии с рис. 3.

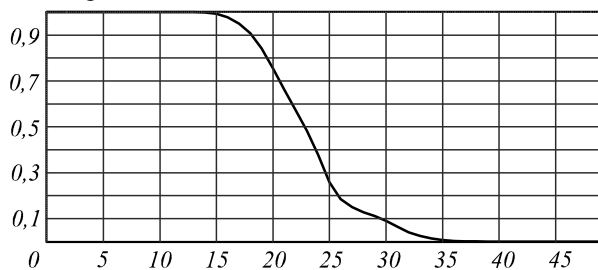


Рис. 3. Модули собственных значений при $\alpha = \pi/5, d = 24\lambda$.

График имеет «ступенчатый» вид, поэтому можно сделать вывод о том, что только первые собственные функции, у которых собственное значение не равно нулю, распространяются в заданной среде без потери энергии. Первые три собственные функции изображены на рис. 4.

Как видно из рис. 4, собственные функции очень напоминают моды ЭГ. Распространение 4-й моды показано на рис. 5. Вид функции не меняется с точностью до фазового набега.

Вычислим теперь функции из соотношений (17) и (18). Стоит отметить, что расчёт СВФ, присутствующих в данных формулах, характеризуется неустойчивостью и зависит от ширины волновода d . Полученные функции были рассчитаны при параметрах $d = 20\lambda, \alpha = \pi/3$.

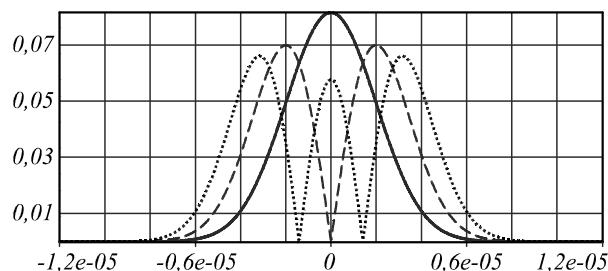


Рис. 4. Амплитуды собственных функций при $\alpha = \pi/5, d = 24\lambda$.

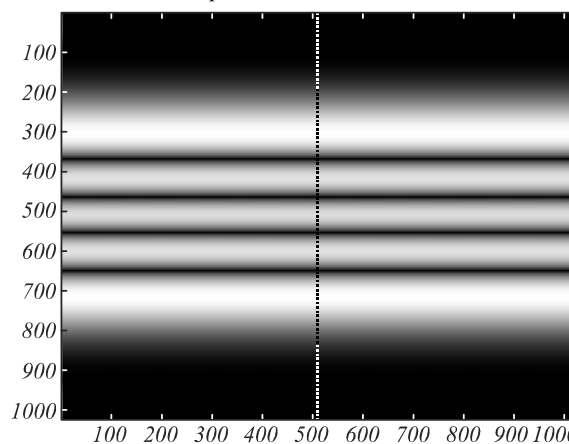


Рис. 5. Распространение четвертой собственной функции, рассчитанной при $\alpha = \pi/5, d = 24\lambda$.

Результаты распространения рассчитанных функций $\varphi_7(x; \alpha, d)$ и $\chi_7(x; \alpha, d)$ показаны на рис. 6а, 6б соответственно. Как видно из рисунков, данные функции действительно восстанавливают свой вид на расстояниях $z = \pi/3$ и $z = 2\pi/3$ соответственно.

Уменьшим размеры входной области до $d = 12\lambda$ и посмотрим, как меняются соответствующие результаты. На рис. 7 представлен график полученных собственных значений. Как видно, количество ненулевых значений сильно сократилось по сравнению с предыдущими расчётами. Это говорит о том, что число степеней свободы системы уменьшилось.

Собственные функции, изображённые на рис. 8, тоже изменились: на краях области определения они перестали обращаться в ноль.

На рис. 9 показано моделирование распространения собственной функции с номером 4. По сравнению с рис. 5 вид изображения сильно изменился. Данная функция имеет собственное число, меньшее единицы, а значит, распространяется в волноводе с потерей энергии, т.е. не является модой волновода.

Заметим, что расчёт функций, собственные значения которых меньше единицы, затруднён, т.к. задача на собственные значения становится неустойчивой. Проблемы неустойчивого расчёта в описанных условиях отмечались также при вычислении СВФ конечными рядами [19, 20].

Таким образом, набор функций, имеющих собственные значения, близкие к единице, однозначно определяет число степеней свободы рассматриваемой оптической среды и возможность передачи оптического сигнала без искажений.

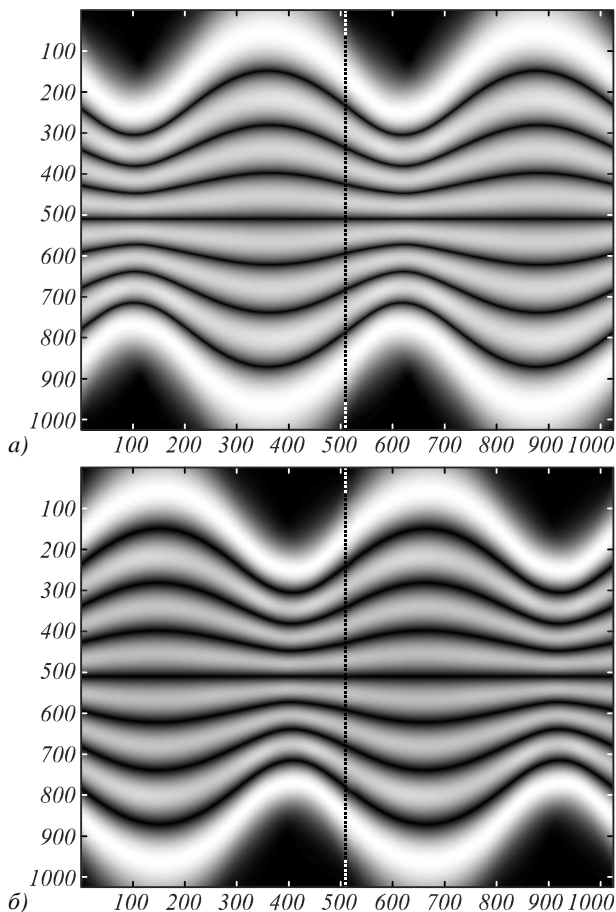


Рис. 6. Распространение функций $\varphi_\lambda(x; \alpha d)$ (а) и $\chi_\lambda(x; \alpha d)$ (б) при $\alpha = \pi/3$, $d = 20\lambda$

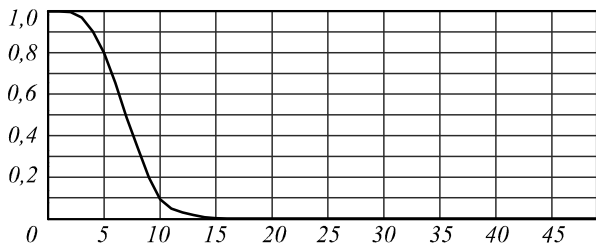


Рис. 7. Модули собственных значений при $\alpha = \pi/5$, $d = 12\lambda$

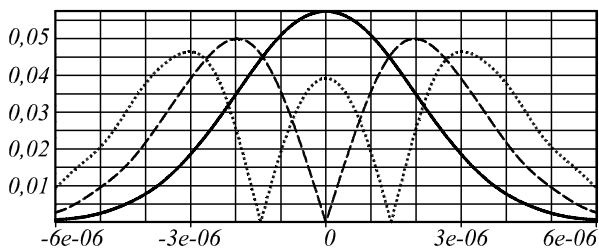


Рис. 8. Амплитуды собственных функций при $\alpha = \pi/5$, $d = 12\lambda$

Заключение

В работе рассмотрено одномерное ДрПФ, соответствующее градиентным оптическим средам.

Рассмотрен пространственно-ограниченный оператор распространения в градиентной среде на основе ДрПФ. Выполнен расчёт собственных функций при различных параметрах оптического волновода с квадратичным показателем преломления.

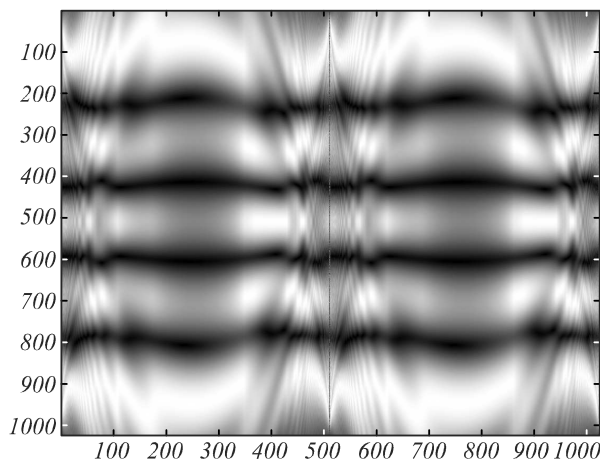


Рис. 9. Распространение собственной функции, рассчитанной при $\alpha = \pi/5$, $d = 12\lambda$

Также рассмотрены «парные» собственные функции, соответствующие «входу» и «выходу» из оператора распространения.

Результаты численного моделирования показали, что функции, собственные значения которых близки к единице, практически полностью входят в ограниченные размеры волновода и похожи на моды Эрмита-Гаусса, а также сфероидальные волновые функции.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-01-31401 мол_а).

Литература

1. **Namias, V.** The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics / V. Namias // Journal of the Institute of Mathematics and its Applications. – 1980. – Vol. 25. – P. 241-265.
2. **Abet, S.** Generalization of the fractional Fourier transformation to an arbitrary linear lossless transformation: an operator approach / S. Abet and J.T. Sheridan // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1994. – Vol. 27. – P.4179-4187.
3. **Alieva, T.** Fractional transforms in optical information processing / T. Alieva, M.J. Bastiaans, M.L. Calvo // EURASIP Journal on Applied Signal Processing. – 2005. – Vol. 10. – P. 1-22.
4. **Dorsch, R.G.** Fractional Fourier transform used for a lens-design problem / R.G. Dorsch and A.W. Lohmann // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34(2). – P. 4111-4112.
5. **Cai, L.Z.** Optical implementation of scale invariant fractional Fourier transform of continuously variable orders with a two-lens system / L.Z. Cai, Y.Q. Wang // Optics & Laser Technology. – 2002. – Vol. 34. – P. 249-252.
6. **Малютин, А.А.** Использование дробного Фурье-преобразования в $\pi/2$ -конвертерах лазерных мод / А.А. Малютин // Квантовая электроника. – 2004. – № 2. – С. 165-171.
7. **Hahn, J.** Optical implementation of iterative fractional Fourier transform algorithm / J. Hahn, H. Kim, B. Lee // Optics Express. – 2006. – Vol. 14, Issue 23. – P. 11103-11112.
8. **Хонина, С.Н.** Расширение функциональных возможностей модовых астигматических конвертеров на основе применения дифракционных оптических элементов / С.Н. Хонина,

- С.В. Карпеев, А.В. Устинов // Известия Самарского научного центра РАН. – 2009. – № 11(5). – С. 13-23.
9. **Abramochkin, E.** Beams transformations and nontransformed beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. – 1991. – Vol. 83. – P. 123-135.
 10. **Beijersbergen, M.W.** Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum / M.W. Beijersbergen, L. Allen, H.E.L.O. van der Veen, J.P. Woerdman // Optics Communications. – 1993. – Vol. 96. – P. 123-132.
 11. **Ozaktas, H.M.** Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation / H.M. Ozaktas, D. Mendlovic // Optics Communications. – 1993. – Vol. 101. – P. 163-169.
 12. **Mendlovic, D.** Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I / D. Mendlovic, H.M. Ozaktas // Journal of the Optical Society of America A. – 1993. – Vol. 10(9). – P. 1875-1881.
 13. **Goodman, J.W.** Introduction to Fourier optics / J.W. Goodman. – McGraw-Hill, 1996. – 441 p.
 14. **McMullin, J.N.** The ABCD matrix in arbitrarily tapered quadratic-index waveguides / J.N. McMullin // Applied Optics. – 1986. – Vol. 25. – P. 2184.
 15. **Стрилец, А.С.** Согласование и исследование методов, основанных на дифференциальном и интегральном операторах распространения лазерного излучения в среде с малыми неоднородностями / А.С. Стрилец, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2008. – № 32, Т. 1. – С. 3-38.
 16. **Yariv, A.** Quantum Electronics / A. Yariv. – 2nd ed. – NY: Wiley, 1975.
 17. **Lanczos, C.** Linear Differential Operators / C. Lanczos. – London: Van Nostrand, 1961.
 18. **Slepian, D.** Eigenvalues associated with prolate spheroidal wave functions of zero order / D. Slepian, E. Sonnenblick // The Bell System Technical Journal. – 1965. – Vol. 44. – P. 1745-1763.
 19. **Хонина, С.Н.** Приближение сфероидальных волновых функций конечными рядами / С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 1999. – Вып. 19. – С. 65-70.
 20. **Хонина, С.Н.** Метод вычисления собственных значений вытянутых сфероидальных функций нулевого порядка / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский, В.А. Соيفер // Доклады Академии наук. – 2001. – № 376(1). – С. 30-32.
 21. **Volotovskii, S.G.** Analysis and development of the methods for calculating eigenvalues of prolate spheroidal functions of zero order / S.G. Volotovskii, N.L. Kazanskii, and S.N. Khonina // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2001. – Vol. 11(3). – С. 633-648.
 22. **Хонина, С.Н.** Исследование матричного метода вычисления вытянутых сфероидальных функций нулевого порядка // Известия Самарского научного центра РАН. – 2001. – № 3(1). – С. 111-117.
 23. **Slepian, D.** Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I / D. Slepian, H.O. Pollak // Bell Systems Technology Journal. – 1961. – Vol. 40. – P. 43-63.
 24. **Броварова, М.А.** Повышение разрешающей способности с помощью вытянутых сфероидальных волновых функций / М.А. Броварова, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2001. – Вып. 21. – С. 53-57.
 25. **Khonina, S.N.** Generating light fields matched to the spheroidal wave-function basis / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar // Optical Memory and Neural Networks. – 2001. – Vol. 10(4). – P. 267-276.
 26. **Kirilenko, M.S.** Coding of an optical signal by a superposition of spheroidal functions for undistorted transmission of information in the lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // Proceedings of SPIE. – 2014. – Vol. 9156. – P. 91560J (8 pp.).

References

- [1] Namias V. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics. J Inst Math Appl 1980; 25: 241-65.
- [2] Abet S, Sheridant JT. Generalization of the fractional Fourier transformation to an arbitrary linear lossless transformation: an operator approach. J Phys A: Math Gen 1994; 27: 4179-87.
- [3] Alieva T, Bastiaans MJ, Calvo ML. Fractional transforms in optical information processing. EURASIP J Appl Signal Processing 2005; 10: 1-22.
- [4] Dorsch RG, Lohmann AW. Fractional Fourier transform used for a lens-design problem. Appl Opt 1995; 34(20): 4111-2.
- [5] Cai LZ, Wang YQ. Optical implementation of scale invariant fractional Fourier transform of continuously variable orders with a two-lens system. Opt Laser Technol 2002; 34: 249-52.
- [6] Malutin AA. Use of fractional Fourier-transformation in $\pi/2$ -converters of laser modes. Quantum Electronics 2004; 2: 165-71.
- [7] Hahn J. Optical implementation of iterative fractional Fourier transform algorithm. Opt Expr 2006; 14(23): 11103-12.
- [8] Khonina SN, Karpeev SV, Ustinov AV. Functional enhancement of mode astigmatic converters on the basis of application of diffractive optical elements. News of the Samara Science Center of the RAS 2009; 11(5): 13-23.
- [9] Abramochkin E, Volostnikov V. Beams transformations and nontransformed beams. Opt Commun 1991; 83: 123-35.
- [10] Beijersbergen MW, Allen L, van der Veen H.E.L.O., Woerdman JP. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum. Opt Commun 1993; 96: 123-32.
- [11] Ozaktas HM, Mendlovic D. Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation. Opt Commun 1993; 101: 163-9.
- [12] Mendlovic D, Ozaktas HM. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I. J Opt Soc Am A 1993; 10(9): 1875-81.
- [13] Goodman JW. Introduction to Fourier optics. McGraw-Hill, 1996.
- [14] McMullin JN. The ABCD matrix in arbitrarily tapered quadratic-index waveguides. Appl Opt 1986; 25: 2184.
- [15] Striletz AS, Khonina SN. Matching and investigation methods based on differential and integral operators of laser radiation propagation in a medium with small inhomogeneities. Computer Optics 2008; 32(1): 33-8.
- [16] Yariv A. Quantum Electronics. 2nd ed. New York: Wiley, 1975.
- [17] Lanczos C. Linear Differential Operators. London: Van Nostrand, 1961.
- [18] Slepian D, Sonnenblick E. Eigenvalues associated with prolate spheroidal wave functions of zero order. The Bell System Technical Journal 1965; 44: 1745-63.
- [19] Khonina SN. Approximation of spheroidal wave functions by finite series. Computer Optics 1999; 19: 65-70.
- [20] Khonina SN, Volotovskii SG, Soifer VA. A method of eigenvalue calculation of the zero order prolate spheroidal functions. Reports of the Russian Academy of Sciences 2001; 376(1): 30-2.
- [21] Volotovskii SG, Kazanskii NL, Khonina SN. Analysis and development of the methods for calculating eigenvalues of prolate spheroidal functions of zero order. Pattern Recognition and Image Analysis 2001; 11(3): 633-48.

- [22] Khonina SN. Investigation of the matrix method of the zero order prolate spheroidal functions calculating. News of the Samara Science Center of the RAS 2001; 3(1): 111-7.
- [23] Slepian D, Pollak HO. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I. Bell Syst Technol J 1961, 40: 43-63.
- [24] Brovarova MA, Khonina SN. Increasing resolution using prolate spheroidal wave functions. Computer Optics 2001; 21: 53-7.
- [25] Khonina SN, Kotlyar VV. Generating light fields matched to the spheroidal wave-function basis. Optical Memory and Neural Networks 2001; 10(4): 267-76.
- [26] Kirilenko MS, Khonina SN. Coding of an optical signal by a superposition of spheroidal functions for undistorted transmission of information in the lens system. Proc SPIE 2014; 9156: 91560J.

CALCULATION OF EIGENFUNCTIONS OF A BOUNDED FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM

M.S. Kirilenko^{1,2}, R.O. Zubtsov², S.N. Khonina^{1,2}

¹ *Image Processing Systems Institute, Samara, Russia,
Russian Academy of Sciences,*

² *Samara State Aerospace University, Samara, Russia*

Abstract

In this paper we consider the use of a one-dimensional fractional Fourier transform for gradient-index optical waveguides. We calculate eigenfunctions of the transform in view of a limited range in the spatial and spectral domain.

Keywords: fractional Fourier transform, bounded paraxial operator, eigenfunctions, Hermite-Gaussian modes, spheroidal wave functions.

Citation: Kirilenko MS, Zubtsov RO, Khonina SN. Calculation of eigenfunctions of a bounded fractional Fourier transform. Computer Optics 2015; 39(3): 332-8.

Сведения об авторах

Кириленко Михаил Сергеевич, 1990 года рождения, в 2013 году окончил магистратуру Самарского государственного аэрокосмического университета (национальный исследовательский университет) по специальности «Прикладная математика и информатика». В настоящее время является аспирантом третьего года обучения кафедры технической кибернетики данного университета по специальности «Оптика». Работает стажёром-исследователем в Институте систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, оптические операторы распространения, программирование.

E-mail: areatangent@gmail.com.

Mikhail Sergeevich Kirilenko, born in 1990, he graduated from Samara State Aerospace University (National Research University) in 2013 with Master degree, majoring in Applied Mathematics and Computer Science. He is currently a post-graduated student of third year of Technical Cybernetics department. He is working as a laboratory assistant at the Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences. Research interests: diffractive optics, optical propagation operators, programming.

Зубцов Руслан Олегович, 1993 года рождения, в 2015 году окончил бакалавриат Самарского государственного аэрокосмического университета (национальный исследовательский университет) по специальности «Прикладная математика и информатика». Область научных интересов: дифракционная оптика, программирование.

E-mail: zubtsov.r@gmail.com.

Ruslan Olegovich Zubtsov, born in 1993, he graduated from Samara State Aerospace University (National Research University) in 2015 with Bachelor degree, majoring in Applied Mathematics and Computer Science. Research interests: diffractive optics, programming.

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва; ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений.

E-mail: khonina@smr.ru.

Svetlana Nikolaevna Khonina, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov (National Research University). Leading researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing.

*Поступила в редакцию 5 июня 2015 г.
Окончательный вариант – 18 июня 2015 г.*